GH. ILIE
V. FIERBINȚEANU
N. STĂNILĂ
I. PETRESCU



MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Prof. dr. ing. GHEORGHE ILIE   Conf. dr. ing. VIRGIL FIERBINȚEANU
Ing. NICOLAE STĂNILĂ   Dr. ing. IORDAN PETRESCU

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

EDITURA TEHNICĂ
București – 1987

Mecanica construcţiilor este ştiinţa care stă la baza proiectării corecte şi raţional-economice a structurilor de rezistenţă ale construcţiilor. În lucrarea de faţă se prezintă, într-o manieră unitară şi sintetică, elementele fundamentale de mecanică generală şi de mecanica corpurilor deformabile, bazele necesare inginerului constructor în domeniul teoriei inginereşti. În cele 14 capitole ale lucrării se găsesc reunite principalele cunoştinţe de Mecanică teoretică, Statica construcţiilor şi Rezistenţa materialelor.

Lucrarea se adresează inginerilor constructori, subinginerilor constructori, arhitecţilor, studenţilor de la facultăţile şi secţiile cu profil de construcţii.

Redactor: ing. **Adina Negoiţă**
Tehnoredactor: **Maria Trăsnea**
Coperta: arh. **Aurel Dan**

Bun de tipar: 18.05.1987
Coli de tipar: 33
C.Z.: 624: 621

I. P. „Oltenia" Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4

Prefaţă

Activitatea în domeniul concepţiei şi realizării construcţiilor, prin complexitatea ei tehnico-ştiinţifică şi prin eforturile de ordin material şi energetic ale colectivităţii umane, reclamă din partea specialistului constructor cunoştinţe temeinice necesare soluţionării optime şi eficiente a problemelor privind aspectele de proiectare, cercetare şi execuţie. Ca aspect tehnic major, în faţa proiectantului se situează concepţia asupra structurii de rezistenţă a construcţiei. Structura de rezistenţă trebuie astfel concepută şi dimensionată încît să fie optim conformată în vederea preluării încărcărilor fixe sau mobile, statice sau dinamice. Este cazul să menţionăm o caracteristică specifică domeniului construcţiilor, şi anume marea varietate geometrico-structurală a construcţiilor corelată cu marea varietate cantitativ-calitativă a acţiunilor la care acestea sînt permanent, temporar sau excepţional solicitate. Acest specific se traduce printr-un veritabil impact cu necesitatea obiectivă de a adopta ipotezele şi metodele de calcul cele mai indicate pentru a cunoaşte cît mai real distribuţiile de eforturi şi deformaţii în structură, răspunsul acesteia la diversele acţiuni pe care le primeşte. Analiza devine mai rafinată în situaţiile în care se impune, în condiţii existente de fapt după o anumită perioadă de exploatare, reconsiderarea capacităţii portante şi consolidarea structurii de rezistenţă la cerinţe noi.

Dezvoltarea ştiinţei de a construi raţional este favorizată astăzi de trei factori ce se găsesc în deplină interacţiune, cu ponderile calitative şi cantitative respective: teoria de calcul, cercetările experimentale şi instrumentul de calcul (calculatorul electronic). Teoria de calcul inclusă în ceea ce numim Mecanica construcţiilor constituie elementul de bază în analiza structurilor de rezistenţă ale construcţiilor, ea fiind verificată şi confirmată experimental şi putînd adopta ipoteze şi schematizări de detaliu şi rafinament datorită capacităţii cantitative a calculatorului electronic de rezolvare numerică a unor mari şi laborioase sisteme de ecuaţii.

Mecanica construcţiilor include astăzi o serie de discipline care sînt tratate didactic şi în publicaţii separat sau parţial împreună. Lucrarea de faţă este concepută cu scopul de a prezenta sintetic şi unitar elementele fundamentale de mecanică generală şi de mecanica corpurilor deformabile. În cele 14 capitole ale lucrării s-a avut în vedere o grupare şi o înlănţuire a noţiunilor de bază, cît mai uşor de urmărit, punîndu-se accentul pe prezentarea grafică, matematică şi în scris a fenomenului fizic analizat.

Considerăm că pe baza cunoaşterii sau a revederii celor prezentate în lucrare se realizează consolidarea cunoştinţelor de Mecanica construcţiilor şi se poate trece la abordarea componentelor superioare ale teoriei de calcul a structurilor de rezistenţă.

AUTORII

CUPRINS

1. Noțiuni fundamentale

1.1. OBIECTUL ȘI DIVIZIUNILE MECANICII

Mecanica este una dintre științele fundamentale ale naturii; ea studiază forma cea mai simplă de mișcare, și anume mișcarea mecanică, care constă în schimbarea în timp a poziției unui corp material macroscopic, în raport cu alt corp material ales ca reper (sistem de referință). Mecanica clasică (newtoniană) are în vedere mișcările care se desfășoară cu viteze mult mai mici, practic neglijabile, în raport cu viteza luminii, ceea ce face ca rezultatele ei să fie aplicabile în activitatea tehnică curentă.

Din punctul de vedere al obiectului de studiu, mecanica prezintă trei mari diviziuni, și anume:

— mecanica teoretică (generală) studiază legile generale ale mișcării mecanice în cazul sistemelor materiale alcătuite din puncte și/sau corpuri rigide;

— mecanica fluidelor studiază echilibrul și mișcarea fluidelor, considerate perfecte sau vîscoase, compresibile sau incompresibile, precum și acțiunea reciprocă dintre corpurile solide, aflate în mișcare sau în repaus, cu mediile fluide ambiante;

— mecanica mediilor deformabile studiază transformările pe care le înregistrează corpurile solide, considerate deformabile și cu o capacitate de rezistență limitată, sub diversele acțiuni aplicate asupra lor.

Mecanica construcțiilor, ca parte a mecanicii mediilor deformabile, se ocupă cu studiul comportării structurilor de rezistență ale diverselor construcții la acțiuni statice sau dinamice, stabilind condiții și criterii de rezistență, deformabilitate și stabilitate, compatibile cu funcționalitatea construcției.

Mecanica construcțiilor a apărut și s-a dezvoltat din necesitatea aplicării noțiunilor și legilor mecanicii generale la problemele practicii ingineriei de construcții. Ea poate fi privită ca o grupare de subramuri ale mecanicii aplicate, care, atît prin creșterea volumului de cunoștințe cît și din necesitățile învățămîntului, s-au constituit ca discipline distincte, și anume:

— Statica construcțiilor studiază structurile de rezistență alcătuite din bare, stabilind metode pentru determinarea eforturilor și deformațiilor produse de acțiunile statice.

— Rezistența materialelor se ocupă cu verificarea și dimensionarea construcțiilor și elementelor de construcție, avînd în vedere eforturile din

secțiunile acestora, proprietățile materialelor din care sînt alcătuite și geometria (forma și dimensiunile) secțiunilor transversale.

— Teoria elasticității și plasticității are același obiect de studiu ca și Rezistența materialelor, dar folosește un număr mai restrîns de ipoteze simplificatoare. Deși rezultatele obținute prezintă o mai mare generalitate, aplicarea practică este mult îngreunată de dezvoltările matematice complicate.

— Stabilitatea construcțiilor studiază condițiile în care structurile de rezistență, în ansamblul lor sau elemente ale acestora, își pierd forma geometrică devenind improprii pentru exploatarea normală.

— Dinamica construcțiilor se ocupă de comportarea și calculul structurilor la acțiuni dinamice.

— Mecanica rocilor aplică rezultatele teoriei elasticității și plasticității la studiul comportării masivelor de rocă în legătură cu problemele inginerești privind construcțiile subterane (tuneluri, galerii, stații de metrou, centrale hidroelectrice etc.) și, în special, cu realizarea fundațiilor pentru construcții.

După natura problemelor studiate, mecanica teoretică este alcătuită din trei mari părți, și anume: statica, cinematica și dinamica.

Statica studiază echilibrul sistemelor materiale sub acțiuni exterioare cunoscute considerînd și interacțiunile dintre componentele sistemului.

Cinematica se ocupă cu studiul mișcărilor posibile ale sistemelor materiale avînd în vedere restricțiile geometrice impuse sistemului și condițiile inițiale ale acestuia, fără a lua în considerație însă cauzele care produc sau modifică mișcarea. Cinematica studiază deci mișcarea numai din punct de vedere geometric.

Dinamica reprezintă partea cea mai generală a mecanicii teoretice. Ea studiază mișcările efective ale sistemelor mecanice, și anume, determină mișcările pe care acestea le efectuează avînd în vedere acțiunile exterioare, proprietățile inerțiale ale sistemului, legăturile acestuia cu mediul ambiant și condițiile cinematice inițiale.

Scopul principal al mecanicii teoretice este de a stabili principiile generale pe baza cărora să fie posibilă descrierea și prevederea fenomenelor de mișcare mecanică și, în particular, de echilibru al corpurilor.

1.2. MODELE DE CALCUL UTILIZATE ÎN MECANICĂ

Obiectele și fenomenele naturii sînt extrem de complexe. Pentru a găsi răspunsuri satisfăcătoare problemelor tehnice curente este necesar ca, în descrierea unor fenomene, să se adopte anumite simplificări care constau din neglijarea voită a însușirilor neesențiale, de importanță minoră pentru fenomenul sau aspectul studiat. Rezultă deci că, pentru studiu, sistemul real este înlocuit cu un alt sistem, mai simplu, numit model de calcul, în care se regăsesc numai proprietățile esențiale ale sistemului real, dar care este mai accesibil calculului matematic. Datorită modelării, calculul capătă evident un caracter convențional, mai puțin riguros, deoarece nu se analizează sistemul real ci modelul de calcul.

Modelul de calcul trebuie să satisfacă următoarele cerințe principale:

— să fie abordabil calculului și să conducă la soluții practice efective;

— rezultatele să fie semnificative pentru fenomenul studiat;

— să ofere o bună concordanță între rezultatele calculului matematic și cele obținute experimental.

În mecanica teoretică se utilizează pentru schematizarea corpurilor două modele de bază: punctul material și corpul (solidul) rigid.

Punctul material constituie modelul matematic al unui corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate fie în comparație cu distanțele la alte corpuri, fie în raport cu dimensiunile corpurilor cu care corpul studiat are interacțiuni. Elementele punctului material sînt reprezentate prin punctul geometric, care precizează poziția sa în spațiu, și prin masă, această mărime constituind caracteristica sa inerțială.

Corpul rigid este schematizarea unui corp fizic considerat indeformabil, indiferent de mărimea forțelor aplicate asupra sa. Se presupune deci că distanța dintre oricare două puncte ale corpului rămîne invariabilă în orice condiții. Din punct de vedere inerțial, mărimea globală a masei nu este suficientă pentru caracterizarea corpului, fiind necesară și cunoașterea distribuției masei.

Un sistem material este alcătuit dintr-un ansamblu de puncte materiale și/sau corpuri rigide între care se exercită interacțiuni.

Mecanica construcțiilor face uz și de alte modele ale corpurilor. O largă răspîndire o are modelul mediului continuu deformabil. Acest model se bazează pe ipoteza că orice element de volum, oricît de mic, conține materie, adică are masă și se deformează sub acțiunea forțelor aplicate asupra sa. Prin deformație a unui corp se înțelege modificarea formei sale ca urmare a exercitării unor acțiuni exterioare. Legătura dintre caracteristica încărcărilor și caracteristica deformării corpului stă la baza diferențierii modelelor de calcul ale continuului material. Relațiile dintre aceste mărimi, proprii fiecărui material, se stabilesc prin încercări efectuate în laborator pe elemente de probă (epruvete). Schematizarea comportării unui material se referă la alegerea unui model mecanic care să se racordeze cît mai strîns cu rezultatele experimentale. Deformațiile pot fi elastice (atunci cînd ele dispar complet odată cu încetarea cauzelor care le-au produs și corpul revine la forma și dimensiunile inițiale), plastice (deformațiile se mențin și după încetarea cauzelor) sau vîscoase (deformațiile depind de viteza de aplicare a încovoierilor). Avînd în vedere faptul că orice corp real prezintă, într-o măsură mai mare sau mai mică, proprietăți elastice, plastice și vîscoase, există trei modele fundamentale, fiecare reproducînd o anumită componentă a deformării, și anume:

— modelul Hooke (fig. 1.1, *a*), reprezentat printr-un resort, descrie comportarea ideal elastică;

— modelul Newton (fig. 1.1, *b*) constă dintr-un amortizor vîscos și corespunde comportării ideal vîscoase;

— modelul Prandtl (fig. 1.1, *c*) este materializat printr-un corp rezemat cu frecare și se referă la comportarea ideal plastică.

Modelul elastic (Hooke) are în momentul de față cea mai largă utilizare, deoarece:

— pentru nivelul acțiunilor curente din exploatare, materialele din care sînt realizate construcțiile au o comportare foarte apropiată de comportarea ideal elastică;

— modelul este comod de utilizat în calcule.

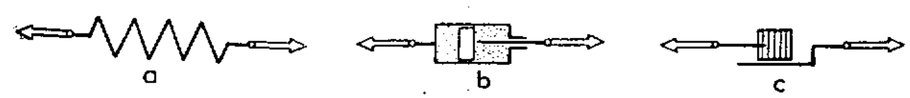


Fig. 1.1

În cazul unui corp real, în funcție de componentele dominante ale deformării, se realizează modele compuse, alcătuite din grupaje (în paralel și în serie) de modele fundamentale.

În general, materialele utilizate larg în construcții prezintă stadii diferite de comportare, în funcție de nivelul solicitării. Astfel, pentru oțelul moale, se pot distinge zone cu comportare elastică (modelul Hooke) și cu comportare plastică (modelul Prandtl).

Un alt criteriu de modelare și de clasificare a corpurilor îl constituie geometria lor, și anume raportul dimensiunilor lor. Acest criteriu prezintă importanță și în legătură cu metodele de calcul utilizate. Din acest punct de vedere se disting corpuri unidimensionale, bidimensionale și tridimensionale.

Prin însuși modul lor de a fi corpurile sînt tridimensionale. Totuși, în anumite probleme, se obțin simplificări importante dacă se neglijează una sau două din dimensiunile corpului, atunci cînd acestea sînt mult mai mici în raport cu celelalte, respectiv cu a treia.

Corpurile unidimensionale au două dimensiuni foarte mici în raport cu a treia. Din această categorie fac parte barele și firele, fiind definite din punct de vedere geometric prin axa lor.

Barele (fig. 1.2) prezintă rigiditate transversală (la încovoiere) și sînt caracterizate prin forma secțiunii transversale (dreptunghiulară, circulară, tubulară, profile laminate, secțiuni compuse). Din categoria barelor fac parte elementele de construcție de tip grinzi și stîlpi, arcele podurilor etc.

Firele (fig. 1.3) sînt elemente torsionabile și fără rigiditate transversală.

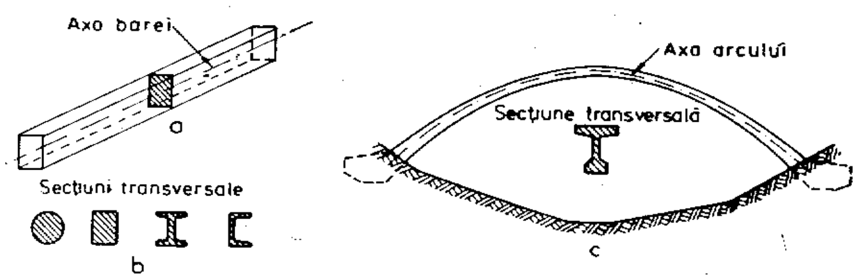


Fig. 1.2

Corpurile bidimensionale (cu suprafață medie) sînt acelea care au o dimensiune (grosimea) mult mai mică în raport cu celelalte două. Astfel de corpuri sînt caracterizate prin forma geometrică a suprafeței medii și prin grosimea lor, măsurată pe perpendiculara la suprafața medie. În funcție de direcția forțelor exterioare aplicate asupra lor, corpurile bidimensionale pot fi plăci (fig. 1.4, *a*), situație în care forțele sînt perpendiculare pe planul median, sau șaibe, cînd forțele acționează în planul median (fig. 1.4, *b*).

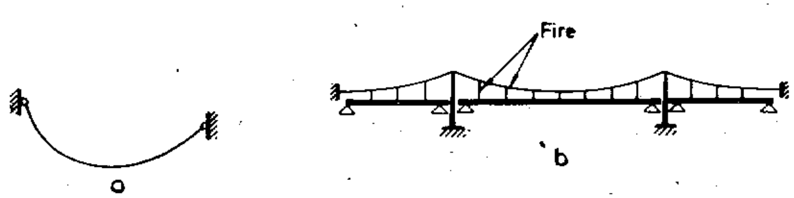


Fig. 1.3

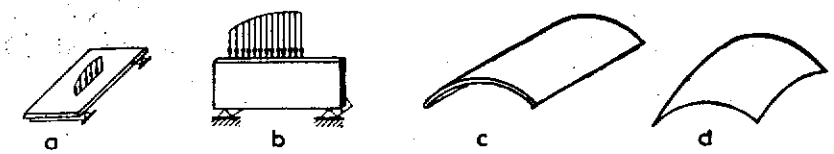


Fig. 1.4

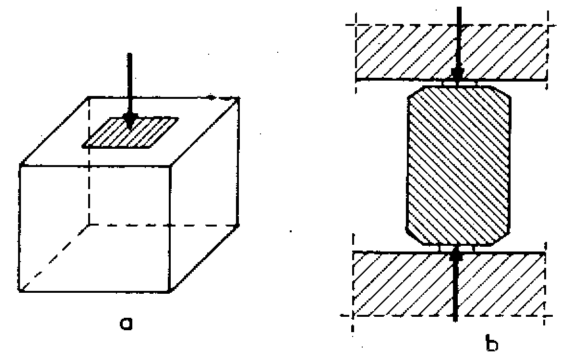


Fig. 1.5

Plăcile cu suprafața mediană curbă, a căror grosime este foarte mică și, ca urmare, nu prezintă rigiditate în direcția grosimii, se numesc membrane (fig. 1.4. *c*, *d*).

Corpurile tridimensionale au cele trei dimensiuni comparabile ca ordin de mărime. Ele sînt reprezentate de blocuri sau masive. Ca elemente de construcție ele se întîlnesc sub forma fundațiilor izolate pentru stîlpi, aparate de reazem la poduri (fig. 1.5, *a*, *b*).

Modelul de calcul al unui sistem material sau al unui fenomen tehnic nu se stabilește în mod arbitrar. Această schematizare (simplificare) presupune cunoașterea calitativă a fenomenului, selectarea aspectelor esențiale ale comportării sistemului, aprecierea volumului și complexității calculelor, evaluarea erorilor și deci a gradului de aproximare al modelului. Automatizarea activităților cu caracter intelectual a creat posibilitatea utilizării unor modele tot mai complexe, capabile să reflecte în cît mai mare măsură comportarea sistemului real.

1.3. MĂRIMI FUNDAMENTALE. MĂRIMI DERIVATE

Mecanica, ca parte componentă a fizicii, este o știință a măsurării. Mărimile fizice din natură nu sînt independente și de aceea o definiție a unei mărimi măsurabile trebuie să conțină și regulile pentru calcularea ei în funcție de alte mărimi care pot fi măsurate. Este deci posibil să fie ales un număr restrîns de mărimi fizice independente, în funcție de care celelalte mărimi fizice să fie exprimate prin anumite relații.

Mărimile fizice independente formează clasa mărimilor fundamentale. Celelalte mărimi fizice care se definesc și se exprimă în funcție de acestea alcătuiesc clasa mărimilor derivate.

Pentru definirea tuturor mărimilor fizice sînt necesare trei mărimi fundamentale. Două dintre acestea sînt spațiul și timpul. A treia mărime fundamentală se alege masa, deși, cu egală justificare, poate fi aleasă și forța.

Spaţiul reprezintă o formă de existenţă obiectivă a materiei şi desemnează sediul fenomenelor mecanice. În mecanica clasică se utilizează modelul spaţiului euclidian care este tridimensional, infinit, omogen, izotrop şi continuu.

Timpul este una dintre formele de existenţă ale materiei şi caracterizează durata şi succesiunea fenomenelor şi proceselor materiale. El este considerat un continuu unidimensional, infinit, omogen, scurgîndu-se într-un singur sens.

Masa măsoară proprietatea de inerţie a materiei, manifestată prin rezistenţa opusă la schimbarea mişcării sale. Masa astfel definită poartă denumirea de masă inertă şi caracterizează materia din punctul de vedere al modificării vitezei sub influenţa unei anumite acţiuni. Noţiunea de masă intervine însă şi în teoria gravităţii, şi anume oglindeşte proprietatea materiei de a produce cîmpuri gravitaţionale şi de a fi acţionată de astfel de cîmpuri. Fenomenele inerţiale şi cele gravitaţionale reprezintă deci manifestări diferite ale masei. Masa inertă şi cea gravitaţională sînt mărimi proporţionale; dacă se aleg unităţi de măsură convenabile aceste mărimi devin identice pentru un acelaşi corp. Dependenţa masei de viteză este dată de relaţia

$$m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2} \qquad (1.1)$$

unde: m_0 este masa corpului în stare de repaus, v — viteza iar c — viteza de propagare a luminii în vid. În mecanica clasică, cantitatea $(v/c)^2$ este neglijabilă în raport cu unitatea şi de aceea masa este considerată o mărime constantă, independentă de viteză.

Orice altă mărime fizică poate fi exprimată în funcţie de mărimile fundamentale spaţiu, masă, timp. În Mecanica construcţiilor intervin numeroase mărimi derivate cum sînt: forţa, viteza, acceleraţia, lucrul mecanic, energia, deplasarea liniară, deplasarea unghiulară (rotirea), tensiunea (efortul unitar), densitatea etc. Mărimile fundamentale precum şi cele derivate cu utilizarea cea mai frecventă în Mecanica construcţiilor sînt prezentate în tabelul 1.1,

Tabelul 1.1

Unităţi de măsură ale unor mărimi mecanice

Mărimea	Denumirea unităţii	Dimensiuni în sistemul SI	Unitatea de măsură în sistemul SI
Lungimea	metru	L	m
Timpul	secundă	T	s
Masa	kilogram	M	kg
Aria	metru pătrat	L^2	m^2
Volumul	metru cub	L^3	m^3
Viteza	metru pe secundă	LT^{-1}	m/s
Viteza unghiulară	radian pe secundă	T^{-1}	s^{-1}
Acceleraţia	metru pe secundă la pătrat	LT^{-2}	m/s^2
Frecvenţa	hertz	T^{-1}	Hz (s^{-1})
Forţa	newton	LMT^{-2}	N
Presiunea	pascal	$L^{-1}MT^{-2}$	Pa (N/m^2)
Momentul forţei	newton-metru	L^2MT^{-2}	Nm
Lucrul mecanic	joule	L^2MT^{-2}	J
Energia	joule	L^2MT^{-2}	J
Puterea	watt	L^2MT^{-3}	W
Densitatea volumică	kg pe metru cub	$L^{-3}M$	kg/m^3
Greutatea specifică	newton pe metru cub	$L^{-2}MT^{-2}$	N/m^3

în care sînt indicate atît simbolurile cît şi dimensiunile şi unităţile de măsură în sistemul internaţional de unităţi de măsură (SI). Pentru unele mărimi fizice, în practica inginerească de construcţii se folosesc şi alte unităţi de măsură, multiplii sau submultiplii unităţilor SI, cele mai întîlnite fiind date în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2

Unităţi de măsură utilizate în tehnică

Mărimea	Denumirea unităţii	Simbolul	Relaţia cu unitatea SI
Forţa	decanewton	daN	1 daN = 10 N
	kilonewton	kN	1 kN = 10^3 N
Tensiunea (efortul unitar)	decanewton pe centimetru pătrat	daN/cm^2	1 daN/cm^2 = 10^5 Pa
	kilonewton pe metru pătrat	kN/m^2	1 kN/m^2 = 10^3 Pa

1.4. PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

Mecanica teoretică, asemenea altor ştiinţe ale naturii, utilizează metoda abstractizării. Aplicarea acestei metode, împreună cu generalizarea rezultatelor experienţei umane, acumulate prin activitatea practică şi experimentală, au făcut posibilă stabilirea cîtorva legi generale pe care este fundamentată mecanica, constituind deci baza sa axiometrică. Toate celelalte teoreme se deduc din aceste legi generale prin argumentaţie logică sau prin calcul matematic. Relaţiile cantitative dintre diversele mărimi fizice sînt stabilită prin calcule matematice. Deşi mecanica teoretică în raport cu celelalte ramuri ale mecanicii apelează în mai mică măsură la experiment, aceasta nu înseamnă că ea se poate concepe în afara necesităţii de verificare experimentală a legilor sale. Istoria dezvoltării ştiinţei în general, a Mecanicii construcţiilor în particular, confirmă constatarea potrivit căreia numai confruntarea rezultatelor teoretice cu cele ale practicii şi experimentului constituie criteriul de validare al principiilor şi ipotezelor fundamentale.

Isaac Newton (1642—1727) a enunţat principiile mecanicii teoretice, aşa cum sînt ele astăzi formulate, contribuţii importante în această problemă avînd şi Galileo Galilei (1564—1642). Aceste principii au următoarele enunţuri:

Principiul inerţiei (legea I). Orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, dacă nici o forţă nu este aplicată asupra lui şi nu-l constrînge să-şi modifice această stare.

Principiul acţiunii forţei (legea a II-a). Variaţia mişcării este proporţională cu forţa motoare imprimată şi este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este aplicată forţa.

Această lege se exprimă matematic sub forma

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F} \qquad (1.2)$$

care, avînd în vedere aproximaţiile admise în mecanica clasică în legătură cu relaţia (1.1), devine

$$m\frac{d\bar v}{dt}=\bar F \text{ sau } m\bar a=\bar F \qquad (1.3)$$

unde prin $\bar a$ s-a notat acceleraţia punctului material.

Principiul acţiunii şi reacţiunii (legea a III-a). La orice acţiune corespunde o reacţiune egală şi de sens contrar sau, acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale şi dirijate în sensuri opuse.

La aceste trei axiome de bază se mai adaugă principiul condiţiilor iniţiale al lui Galilei şi principiul compunerii forţelor, numit şi regula paralelogramului, care are următoarea formulare:

Două forţe ($\bar F_1$ şi $\bar F_2$), aplicate simultan asupra unui corp, au acelaşi efect mecanic ca şi acţiunea unei forţe unice ($\bar R$), cu mărimea şi sensul diagonalei paralelogramului avînd ca laturi forţele considerate (fig. 1.6).

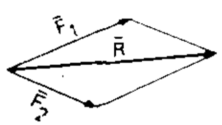


Fig. 1.6

Prin noţiunea de corp folosită de Newton în enunţul legilor mecanicii se înţelege modelul matematic de punct material, aşa cum este el definit în paragraful 1.2.

1.5. NOŢIUNEA DE FORŢĂ

În mecanică, se înţelege prin forţă mărimea care caracterizează din punct de vedere cantitativ interacţiunea mecanică dintre corpurile materiale.

Pentru studiul mişcării unui punct material, în conformitate cu relaţia (1.3), este necesară cunoaşterea expresiei forţei $\bar F$ care acţionează asupra punctului, adică stabilirea dependenţei acestei forţe de mărimile care o determină.

Forţele fundamentale care stau la baza tuturor fenomenelor mecanice sînt forţele de atracţie şi forţele electrice. Cît timp masele în interacţiune sînt în repaus sau se deplasează cu viteze mult mai mici decît viteza luminii, aceste forţe au expresii similare, şi anume:

— forţa de atracţie se determină în conformitate cu legea atracţiei universale, fiind proporţională cu produsul maselor inerţiale m_1 şi m_2 ale punctelor materiale şi invers proporţională cu pătratul distanţei d dintre puncte, adică

$$F=f\frac{m_1m_2}{d^2} \qquad (1.4)$$

unde f este constanta universală a gravitaţiei;

— forţa electrică (Coulomb) poate fi de atracţie sau de respingere şi are expresia

$$F=k\frac{q_1q_2}{d^2} \qquad (1.5)$$

în care coeficientul de proporţionalitate k depinde de sistemul de unităţi de măsură ales iar q_1 şi q_2 sînt sarcinile electrice.

Deşi interacţiunile gravitaţionale şi cele electrice stau la baza tuturor fenomenelor mecanice, în cele mai multe cazuri, utilizarea lor ca atare complică foarte mult analiza fenomenelor, în special a celor din domeniul macroscopic. Pentru rezolvarea practică a problemelor este mai comod să se recurgă

la expresii aproximative ale forţelor, deduse în principiu din legile (1.4) şi (1.5) cu scopul simplificării formalismului matematic. În acest sens, cele mai utilizate expresii de forţe din Mecanica construcţiilor sînt următoarele:

— forţa de greutate

$$\bar F=m\bar g \qquad (1.6)$$

unde m este masa gravifică iar $\bar g$ reprezintă acceleraţia gravitaţională:

— forţa elastică

$$\bar F=-k\bar r; \qquad (1.7)$$

este o forţă proporţională cu distanţa $\bar r$ a punctului material în raport cu poziţia iniţială, fiind dirijată spre poziţia de echilibru. Factorul de proporţionalitate k se numeşte constanta elastică a sistemului şi depinde de alcătuirea şi caracteristicile elastice ale acestuia;

— forţa de frecare de alunecare

$$F=\mu N \qquad (1.8)$$

în care μ este coeficientul de frecare, iar N reprezintă reacţiunea normală la suprafaţa de rezemare. Sensul forţei F este invers sensului sau tendinţei de mişcare;

— forţe rezistente ale mediului ambiant

$$F=\alpha v^n; \qquad (1.9)$$

este o forţă îndreptată în sens invers vitezei corpului (punctului) material. Coeficientul α depinde de forma corpului iar exponentul n se determină experimental.

În Mecanica construcţiilor, la analiza comportării construcţiilor sub acţiuni dinamice, avînd în vedere că vitezele sînt mici, se admite că forţele rezistente sînt proporţionale cu viteza ($n = 1$).

2. Statica corpului rigid

Aşa cum s-a arătat în paragraful 1.2, corpul rigid reprezintă modelul de calcul al unui corp indeformabil. Rezultă ca o consecinţă a acestei ipoteze proprietatea forţelor, aplicate asupra unor astfel de corpuri, de a putea fi deplasate pe suportul lor, adică de a fi considerate vectori alunecători. Pentru justificarea acestei proprietăţi se examinează un corp rigid, asupra căruia acţionează o forţă $\bar{F}$, aplicată în punctul A (fig. 2.1, *a*).

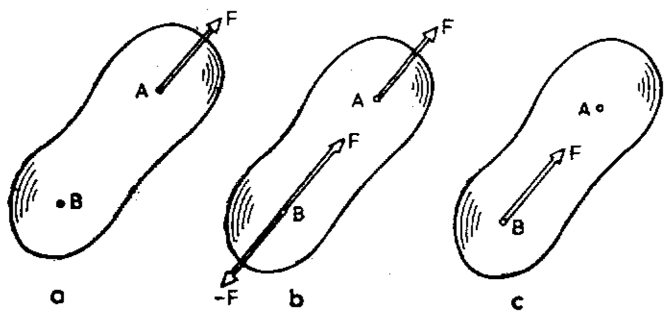


Fig. 2.1

Într-un punct B, aflat pe suportul forţei, se introduc două forţe egale şi de sensuri opuse, avînd acelaşi suport şi aceeaşi mărime cu cele ale forţei $\bar{F}$ (fig. 2.1, *b*). Această pereche nu are nici un efect mecanic asupra corpului şi deci nu influenţează efectul forţei $\bar{F}$ aplicată în A. Corpul fiind indeformabil, distanţa dintre punctele A şi B nu se modifică, fapt ce permite suprimarea concomitentă a forţelor $\bar{F}$ din A şi $-\bar{F}$ din B, ele fiind egale, de sensuri opuse şi fără efect asupra distanţei dintre A şi B. Se ajunge astfel la situaţia din fig. 2.1, *c*, care este echivalentă din punct de vedere mecanic cu cea iniţială (fig. 2.1, *a*), singura deosebire constînd din modificarea punctului de aplicaţie al forţei, prin deplasarea acesteia pe suportul său. Rezultă deci că o forţă aplicată asupra unui corp rigid este un vector alunecător.

2.1. MOMENTUL UNEI FORŢE ÎN RAPORT CU UN PUNCT

În studiul efectelor pe care un sistem de forţe le are asupra unui corp apare necesitatea utilizării şi a altor noţiuni decît cele prezentate mai înainte. Una dintre aceste noţiuni o constituie momentul forţei în raport cu un punct.

Prin definiţie, momentul unei forţe $\bar{F}$, în raport cu un punct O, este mărimea egală cu produsul vectorial dintre vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei, raportat la punctul O, şi forţa $\bar{F}$ (fig. 2.2).

$$\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F}. \tag{2.1}$$

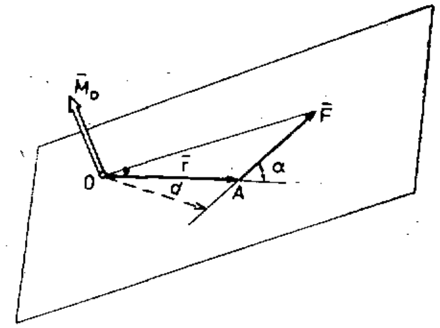


Fig. 2.2

În conformitate cu proprietăţile produsului vectorial, momentul unei forţe în raport cu un punct prezintă următoarele caracteristici:

— are direcţia perpendiculară pe planul determinat de punct şi suportul forţei considerate;

— sensul momentului este stabilit după regula şurubului drept, fiind deci sensul de înaintare al şurubului, dacă acesta se roteşte astfel încît $\bar{r}$ să se suprapună peste $\bar{F}$ după unghiul cel mai mic;

— mărimea este dată de aria triunghiului construit cu $\bar{r}$ şi $\bar{F}$, adică

$$M_0 = rF \sin \alpha = Fd. \tag{2.2}$$

Din expresia (2.2) rezultă că momentul unei forţe în raport cu un punct este nul atunci cînd punctul respectiv se găseşte pe suportul forţei ($d = 0$).

Momentul forţei în raport cu punctul O este invariabil în raport cu deplasarea forţei pe suportul său. Pentru a se demonstra această proprietate se consideră forţa $\bar{F}$ în două poziţii diferite, caracterizate prin punctele de aplicaţie A şi B (fig. 2.3) şi se calculează pentru fiecare poziţie, momentul în raport cu punctul O, obţinîndu-se

$$\bar{M}_{OA} = \bar{r}_A \times \bar{F}\,;\; \bar{M}_{OB} = \bar{r}_B \times \bar{F} \tag{2.3}$$

dar

$$\bar{r}_A = \bar{r}_B + \overline{BA} \text{ astfel că}$$

$$\bar{M}_{OA} = (\bar{r}_B + \overline{BA}) \times \bar{F} = \bar{r}_B \times \bar{F} + \overline{BA} \times \bar{F}. \tag{2.4}$$

Observînd că vectorii $\overline{BA}$ şi $\bar{F}$ sînt coliniari, şi deci produsul vectorial al lor este nul, rezultă din relaţiile (2.3) şi (2.4) că $\bar{M}_{OA} = \bar{M}_{OB}$, ceea ce înseamnă că momentul nu se schimbă dacă forţa este deplasată pe suportul său.

Expresia analitică a momentului se obţine dacă se exprimă vectorii $\bar{r}$ şi $\bar{F}$ din relaţia (2.1) prin proiecţiile lor pe axele de coordonate (fig. 2.4), adică:

$$\bar{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}\,;\; \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

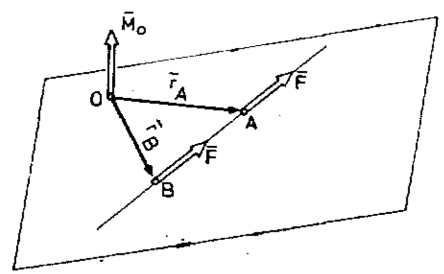


Fig. 2.3

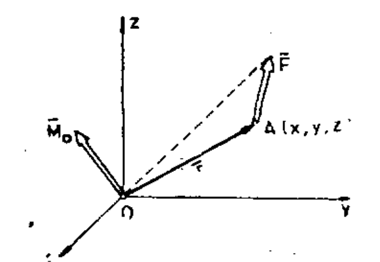


Fig. 2.4

şi deci

$$\bar{M}_0 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} \tag{2.5}$$

unde

$$M_x = yZ - zY\,;\; M_y = zX - xZ\,;\; M_z = xY - yX \tag{2.6}$$

reprezintă proiecţiile (componentele) pe axele de coordonate ale momentului forţei în raport cu punctul O, ales ca origine a sistemului de coordonate.

2.2. MOMENTUL UNEI FORŢE ÎN RAPORT CU O AXĂ

Se consideră o forţă $\bar{F}$ şi o axă Δ, a cărei orientare este precizată prin versorul $\bar{u}$ (fig. 2.5).

Prin definiţie, se numeşte moment al forţei $\bar{F}$ în raport cu axa Δ, proiecţia pe această axă a momentului forţei în raport cu un punct O arbitrar de pe axă.

Conform definiţiei rezultă

$$M_\Delta = \bar{u}\bar{M}_0 = \bar{u}(\bar{r} \times \bar{F}) = M_0 \cos\alpha. \tag{2.7}$$

Momentul M_Δ este deci o mărime scalară, al cărei semn se stabileşte avînd în vedere sensul versorului $\bar{u}$ de orientare a axei.

Pentru ca definiţia să aibă sens, trebuie arătat că momentul forţei în raport cu axa nu se schimbă dacă se are în vedere un alt punct O' al axei. Într-adevăr, dacă se alege un alt punct O' se obţine

$$M'_\Delta = \bar{u}(\bar{r}' \times \bar{F}). \tag{2.8}$$

Observînd că $\bar{r}' = \overline{O'O} + \bar{r}$ şi înlocuind în expresia (2.8) se obţine

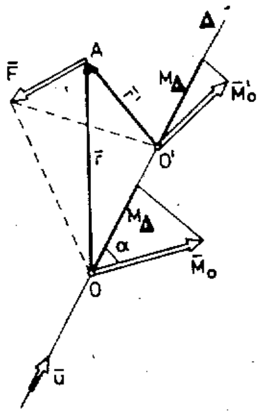


Fig. 2.5

$$M'_\Delta = \bar{u}[(\overline{O'O} + \bar{r}) \times \bar{F}] = \bar{u}(\overline{O'O} \times \bar{F}) + \bar{u}(\bar{r} \times \bar{F})$$

în care $\bar{u}(\overline{O'O} \times \bar{F}) = 0$ deoarece vectorii $\bar{u}$ şi $\overline{O'O}$ sînt coliniari. Ca atare, $\bar{M}'_\Delta = \bar{u}(\bar{r} \times \bar{F})$ şi conform relaţiei (2.7) $M'_\Delta = M_\Delta$.

Momentul forţei în raport cu axa este nul atunci cînd:

— forţa $\bar{F}$ şi cu axa Δ sînt concurente, deoarece în acest caz, alegînd drept punct al axei punctul de concurenţă, vectorul $\bar{r} = 0$;

— forţa şi axa sînt paralele ($\bar{F} \parallel \bar{u}$).

Cele două situaţii conduc la concluzia că momentul unei forţe în raport cu o axă este nul atunci cînd forţa şi axa sînt coplanare.

O altă interpretare a momentului forţei în raport cu o axă este arătată în fig. 2.6, în care forţa este descompusă în două componente, şi anume: componenta $\bar{F}_n$ paralelă cu axa şi componenta $\bar{F}_t$ paralelă cu un plan π perpendicular pe axă. Procedînd astfel, există relaţiile

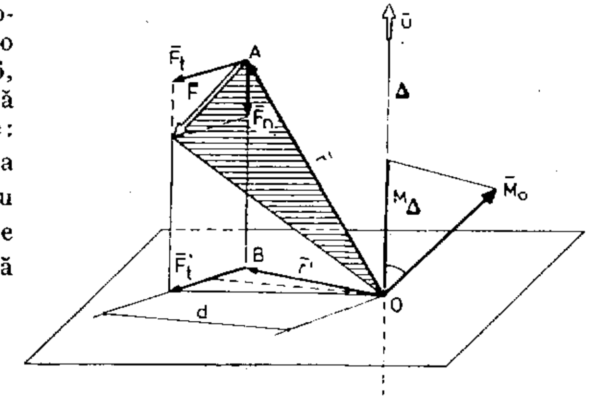


Fig. 2.6

$$\bar{F} = \bar{F}_t + \bar{F}_n\,;$$

$$\bar{r} = \overline{OB} + \overline{BA} = \bar{r}' + \overline{BA}$$

şi deci

$$M_\Delta = \bar{u}(\bar{r} \times \bar{F}) = \bar{u}[(\bar{r}' + \overline{BA}) \times (\bar{F}_t + \bar{F}_n)] =$$

$$= \bar{u}(\bar{r}' \times \bar{F}_t) + \bar{u}(\bar{r}' \times \bar{F}_n) + \bar{u}(\overline{BA} \times \bar{F}_t) + \bar{u}(\overline{BA} \times \bar{F}_n)$$

Observînd că $\bar{u}$ este paralel cu $\bar{F}_n$ şi $\overline{BA}$ se obţine

$$M_\Delta = \bar{u}(\bar{r}' \times \bar{F}_t)$$

sau

$$M_\Delta = \bar{u}(\bar{r}' \times \bar{F}'_t) = F'_t d \tag{2.9}$$

unde $\bar{F}'_t$ reprezintă proiecţia forţei $\bar{F}$ pe un plan perpendicular pe dreapta Δ, iar d este distanţa de la punctul O, în care dreapta intersectează planul Π, la proiecţia F'_t.

Pe baza relaţiei (2.9) se obţine o regulă practică pentru calculul momentului unei forţe în raport cu o axă, şi anume: momentul unei forţe în raport cu o axă este egal cu produsul dintre proiecţia forţei pe un plan perpendicular pe axa respectivă şi distanţa de la punctul de intersecţie al planului cu axa pînă la suportul proiecţiei forţei.

Din definiţia dată momentului unei forţe în raport cu o axă, rezultă că expresiile (2.6) ale proiecţiilor momentului forţei respective în raport cu originea unui sistem de axe reprezintă tocmai momentele forţei în raport cu aceste axe.

2.3. CUPLURI DE FORŢE

Un cuplu de forţe este alcătuit din două forţe egale, de sensuri contrare, cu suporturile distincte şi paralele (fig. 2.7, *a*). Cuplul prezintă următoarele elemente caracteristice:

— planul cuplului este planul definit de cele două forţe care alcătuiesc cuplul;

— momentul cuplului $\bar{M}$ este un vector liber, perpendicular pe planul cuplului.

Pentru a arăta că $\bar{M}$ este un vector liber se consideră un punct arbitrar O, situat în afara planului cuplului şi se evaluează momentul celor două forţe în raport cu acest punct, obţinîndu-se

$$\bar{M} = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times (-\bar{F}) = \bar{r}_A \times \bar{F} + (-\bar{r}_B) \times \bar{F}$$

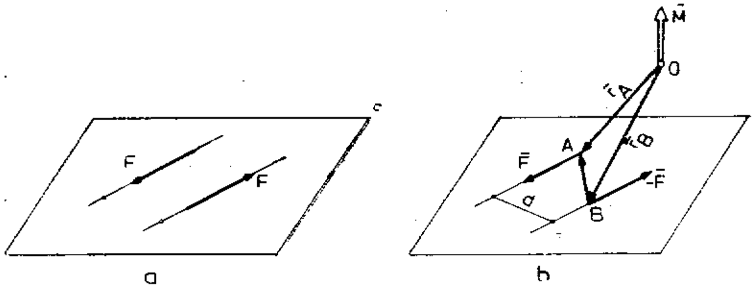


Fig. 2.7

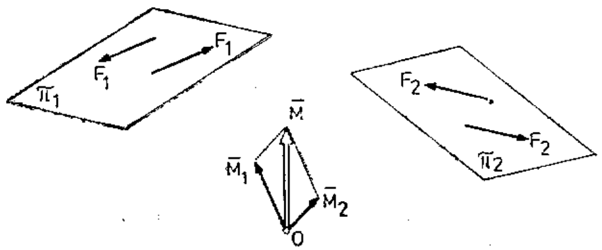


Fig. 2.8

de unde

$$\bar{M} = (\bar{r}_A - \bar{r}_B) \times \bar{F} = \overline{BA} \times \bar{F}$$

ceea ce înseamnă că, indiferent de punctul O, momentul cuplului este un vector constant, avînd mărimea egală cu produsul dintre valoarea uneia din forțe și distanțe d dintre suporturile celor două forțe. Sensul momentului se stabilește după aceeași regulă ca cea a momentului unei forțe în raport cu un punct.

Două sau mai multe cupluri pot fi înlocuite printr-un cuplu rezultant, acesta avînd același efect mecanic ca cel al cuplurilor componente. Operația poartă denumirea de compunerea cuplurilor și constă din însumarea vectorială a momentelor cuplurilor. În figura 2.8 se prezintă compunerea a două cupluri, ale căror momente sînt vectorii liberi $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$, reprezentanți într-un punct arbitrar O. Vectorul rezultant $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ este dat de diagonala paralelogramului avînd ca laturi cei doi vectori.

Din cele arătate mai înainte rezultă că două cupluri sînt echivalente dacă au același moment, adică $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$. Aceasta implică ca cele două cupluri să fie situate în plane paralele (în particular să fie situate în același plan), să aibă același sens și același modul al momentului.

2.4. REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

Construcțiile și elementele de construcție sînt supuse la acțiuni foarte diverse. O pilă a unui pod, de exemplu, este solicitată datorită greutății proprii, greutăților suprastructurii podului, elementelor căii, instalațiilor montate pe pod ; de asemenea, asupra ei se exercită efectul convoaielor care circulă pe pod, precum și acțiuni climatice (presiunea vîntului), acțiunea

seismică etc. Efectul acestor acțiuni asupra pilei se poate considera ca fiind produs de un sistem de forțe aplicate pe elementul de construcție respectiv. Unele din acțiunile enumerate mai înainte se exercită în permanență asupra elementului de construcție analizat (de exemplu greutatea proprie), în timp ce altele (acțiuni climatice, seismice) au un caracter accidental sau extraordinar.

Exploatarea normală a construcției impune ca elementul respectiv să aibă o comportare corespunzătoare la orice combinație posibilă de acțiuni. Din acest motiv, apare necesitatea de a examina următoarele aspecte :

a) modalitatea de a înlocui un sistem de forțe cu un altul, echivalent din punct de vedere mecanic, dar cu alcătuirea cea mai simplă ;

b) criteriul pe baza căruia două sisteme de forțe pot fi comparate.

Modalitățile de abordare a celor două aspecte au în vedere, așa cum se arată în continuare, simplificările acceptate la modelarea sistemelor materiale.

2.4.1. OPERAȚII ELEMENTARE DE ECHIVALENȚĂ

Se numesc sisteme echivalente două sau mai multe sisteme de forțe care, aplicate independent asupra unui corp rigid, produc în orice punct al acestuia efecte mecanice identice. Pentru a analiza echivalența a două sisteme de forțe este necesar ca ele să fie reduse la cea mai simplă formă. Reducerea este, deci, operația prin care se determină sistemul cel mai simplu, care are aceleași efecte mecanice cu cele ale sistemului de forțe inițial.

O astfel de problemă s-a pus și în cazul forțelor concurente, situație în care forțele se pot înlocui cu rezultanta lor, aceasta fiind determinată așa cum s-a arătat în fig. 1.6.

Pentru obținerea unui sistem de forțe echivalent cu un sistem dat, se aplică forțelor o serie de operații simple, astfel ca după fiecare operație sistemul să rămînă echivalent cu el însuși. Aceste operații se numesc operații elementare de echivalență și sînt următoarele :

— o forță care acționează asupra unui solid rigid poate fi deplasată în lungul suportului ei ;

— în orice sistem de forțe se pot suprima sau introduce două forțe egale, cu același suport dar cu sensuri opuse ;

— două sau mai multe forțe concurente sînt echivalente cu rezultanta lor ;

— o forță poate fi înlocuită prin componentele sale.

Justificarea operațiilor elementare de echivalență se bazează fie pe principiile mecanicii teoretice, fie pe introducerea ipotezei de corp rigid avută în vedere la modelarea corpurilor.

2.4.2. TORSORUL DE REDUCERE. INVARIANȚII UNUI SISTEM DE FORȚE

Fiind dat un corp rigid, asupra căruia acționează într-un punct A al său forța $\bar{F}$, se pune problema de a găsi mărimile mecanice echivalente aplicate într-un alt punct O (fig. 2.9, *a*). Aceasta înseamnă, de fapt, schimbarea punctului de aplicație al forței $\bar{F}$ în afara suportului său, adică reducerea forței într-un punct care nu este situat pe suportul forței. Pentru aceasta se consideră în punctul O două forțe ($\bar{F}$ și $-\bar{F}$) egale, de sensuri opuse și

paralele cu forța inițială ($\bar{F}$) din punctul A (fig. 2.9, b). Avînd în vedere operațiile elementare de echivalență, situația nou creată este echivalentă cu situația inițială. Se observă însă că perechea de forțe $\bar{F}$ (din A) și $-\bar{F}$ (din B) formează un cuplu reprezentat prin momentul $\bar{M}_0 = \overline{OA} \times \bar{F}$, astfel că se obține, în final, situația din fig. 2.9, c alcătuită dintr-o forță aplicată în punctul de reducere O avînd sensul și mărimea aceleași cu cele ale forței inițiale, fiind paralelă cu aceasta și un moment $\bar{M}_0$, egal cu momentul forței în raport cu punctul de reducere.

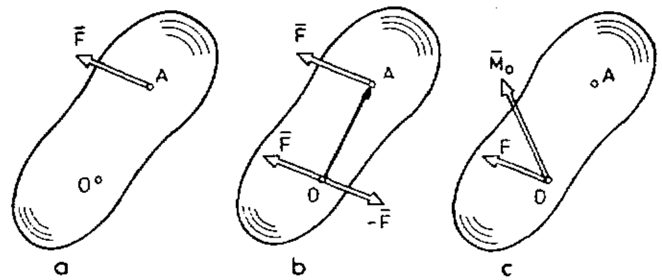


Fig. 2.9

În cazul în care asupra corpului sînt aplicate mai multe forțe $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_i, \ldots, \bar{F}_n$, și acestea urmează să fie reduse toate în același punct O, se procedează, cu fiecare forță în parte, așa cum s-a procedat în situația din figura 2.9. O astfel de operație este arătată în fig. 2.10, unde forțele $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_i, \ldots, \bar{F}_n$ urmează să fie reduse în punctul O (fig. 2.10, a). Fiecare forță $\bar{F}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) se reduce în punctul O la o forță egală și paralelă cu forța inițială, avînd același sens cu aceasta, și la un moment $\bar{M}_{0i} = \overline{OA}_i \times \bar{F}_i$, ceea ce face ca în punctul de reducere să se obțină un sistem de forțe concurente (fig. 2.10, b) și un sistem de vectori moment (fig. 2.10, c). Forțele concurente și vectorii moment se compun apoi separat, conform regulii paralelogramului, astfel că se determină o rezultantă $\bar{R}$ și un moment rezultant $\bar{M}_0$ (fig. 2.10, d), conform relațiilor următoare:

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i \,;\; \bar{M}_0 = \Sigma \bar{M}_{0i} = \Sigma(\overline{OA}_i \times \bar{F}_i). \tag{2.10}$$

În concluzie, un sistem de forțe oarecare se reduce într-un punct O la o forță rezultantă $\bar{R}$, egală cu suma vectorială a forțelor, și la un vector rezultant $\bar{M}_0$, obținut prin însumarea geometrică a momentelor forțelor în ra-

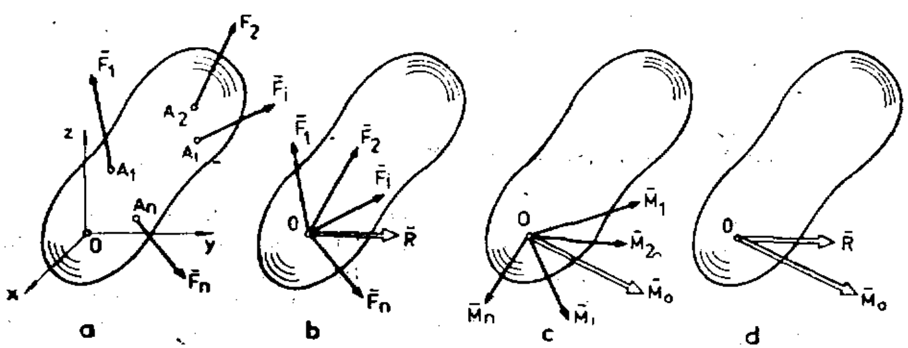


Fig. 2.10

port cu punctul de reducere. Ansamblul acestor două mărimi vectoriale ($\bar{R}$, $\bar{M}_0$) poartă numele de torsorul de reducere al sistemului de forțe în punctul O și se notează cu τ_0.

Pentru exprimarea analitică a relațiilor (2.10) se utilizează un sistem de axe rectangulare cu originea în punctul de reducere. Notînd cu X_i, Y_i, Z_i proiecțiile forțelor pe axele Ox, Oy, Oz și cu x_i, y_i, z_i coordonatele punctelor de aplicație, prin înmulțirea scalară a primei relații (2.10), succesiv cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ai axelor rezultă

$$X = \Sigma X_i \,;\; Y = \Sigma Y_i \,;\; Z = \Sigma Z_i. \tag{2.11}$$

și, în baza relației (2.6)

$$M_x = \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i) \,;\; M_y = \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i) \,;$$

$$M_z = \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) \tag{2.12}$$

în care X, Y, Z sînt proiecțiile rezultantei, deci

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \tag{2.13}$$

iar M_x, M_y, M_z reprezintă proiecțiile momentului $\bar{M}_0$ pe axele de coordonate sau momentele forțelor în raport cu axele Ox, Oy și Oz, de unde

$$\bar{M}_0 = M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k}. \tag{2.14}$$

Prin urmare, torsorul de reducere (τ_0) al unui sistem de forțe reprezintă ansamblul mecanic cu alcătuirea cea mai simplă, aplicat în punctul de reducere, echivalent din punct de vedere mecanic cu sistemul de forțe considerat.

Torsorul de reducere al unui sistem de forțe face posibilă evidențierea unor proprietăți intrinseci ale sistemului de forțe. În acest scop se studiază variația torsorului de reducere în raport cu schimbarea punctului de reducere. Se consideră sistemul de forțe $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_i, \ldots, \bar{F}_n$ din fig. 2.11, al cărui torsor de reducere în punctul O este compus din $\bar{M}_0$ și $\bar{R}$, determinate cu relațiile (2.10). Pentru reducerea în alt punct, de exemplu O', se procedează în mod similar, obținîndu-se

$$\bar{R}_{0'} = \Sigma \bar{F}_i \,;\; \bar{M}_{0'} = \Sigma(\overline{O'A}_i \times \bar{F}_i). \tag{2.15}$$

Observîndu-se însă că $\overline{O'A}_i = \overline{O'O} + \overline{OA}_i$ rezultă,

$$\bar{M}_{0'} = \Sigma(\overline{O'O} + \overline{OA}_i) \times \bar{F}_i = \overline{O'O} \times (\Sigma \bar{F}_i) + \Sigma \overline{OA}_i \times \bar{F}_i. \tag{2.16}$$

Dacă în relația (2.16) se pun în evidență elementele torsorului de reducere în punctul O, se obține

$$\bar{M}_{0'} = \bar{M}_0 + \overline{O'O} \times \bar{R} \tag{2.17}$$

Relația (2.17) arată variația momentului la schimbarea punctului de reducere și anume cînd se trece de la punctul O la alt punct O'. Din prima relația (2.15) se constată că $\bar{R}_{0'} = \bar{R}$ ceea ce înseamnă că forța rezultantă $\bar{R}$ nu depinde de punctul de reducere, ea fiind deci un invariant al sistemului de forțe.

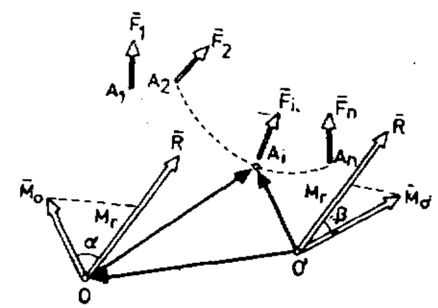


Fig. 2.11

Un alt invariant al sistemului de forțe rezultă dacă se înmulțește scalar relația (2.17) cu vectorul $\bar{R}$, astfel

$$\bar{R}\bar{M}_{0'} = \bar{R}(\bar{M}_0 + \overline{O'O} \times \bar{R})$$

Deoarece $\bar{R}(\overline{O'O} \times \bar{R}) = 0$, rezultă

$$\bar{R}\bar{M}_{0'} = \bar{R}\bar{M}_0$$

ceea ce înseamnă că produsul scalar dintre vectorul rezultantă și vectorul moment este constant în raport cu punctul în care se face reducerea sistemului de forțe, această cantitate constituind deci al doilea invariant al sistemului de forțe, și anume invariantul scalar. Prin utilizarea proiecțiilor pe axe ale mărimilor vectoriale $\bar{R}$ și $\bar{M}_0$, produsul lor scalar se scrie

$$\bar{R}\bar{M}_0 = XM_x + YM_y + ZM_z \tag{2.18}$$

semnificațiile notațiilor fiind cele din relațiile (2.11) și (2.12).

Membrul al doilea al relației (2.18) se numește trinomul invariant al sistemului de forțe. O altă interpretare a invariantului scalar se obține prin exprimarea produselor scalare (2.17) sub forma

$$RM_{0'} \cos \beta = RM_0 \cos \alpha \tag{2.19}$$

relație care, după simplificarea cu R, devine

$$M_0 \cos \alpha = M_{0'} \cos \beta. \tag{2.20}$$

Relația (2.20) conduce la constatarea că în orice punct al spațiului, proiecția vectorului moment pe direcția vectorului rezultantă este aceeași (v. fig. 2.11). Notînd această valoare cu M_r se obține

$$M_r = \frac{\bar{R}\bar{M}_0}{R} = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \tag{2.21}$$

Analizînd modificarea torsorului de reducere atunci cînd se trece de la un punct de reducere la altul, rezultă că orice sistem de forțe prezintă două mărimi mecanice, $\bar{R}$ și $\bar{R}\bar{M}_0$, care nu depind de punctul de reducere, ele constituind deci invarianții sistemului de forțe.

Dacă momentul $\bar{M}_0$ este descompus în două componente, și anume după direcția rezultantei ($\bar{M}_r$) și după direcția normală la aceasta ($\bar{M}_n$) așa cum se arată în fig. 2.12, a, avînd în vedere relația (2.21) se constată că variația

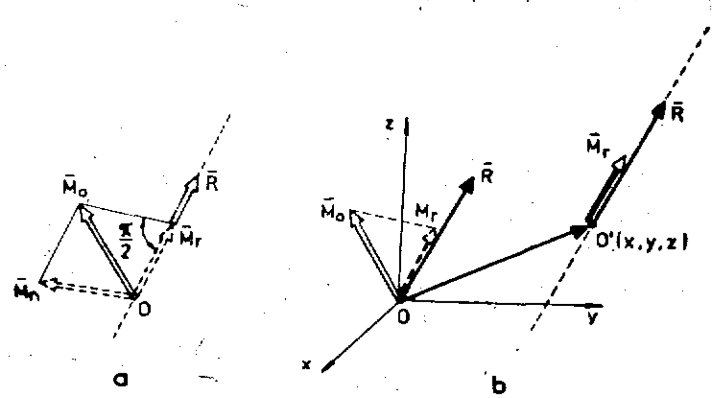


Fig. 2.12

momentului se datorește numai modificării componentei M_n, deoarece cealaltă componentă este constantă. Această observație pune problema determinării punctelor din spațiu care au proprietatea că vectorul moment este minim. Torsorul alcătuit din $\bar{R}$ și $\bar{M}_{min}$ este numit torsor minimal. Minimul modulului momentului se înregistrează, evident, atunci cînd $M_n = 0$, ceea ce înseamnă că momentul total este coliniar cu vectorul rezultantă ($\bar{R}$). Pentru stabilirea locului geometric al punctelor care au această proprietate se consideră situația din fig. 2.12, b, în care, pentru sistemul de forțe studiat, este figurat torsorul de reducere în punctul O, $\tau_0 = (\bar{R}, \bar{M}_0)$. Fie un punct $O'(x, y, z)$ al locului geometric căutat; prin urmare, în acest punct, torsorul de reducere este minim. Așa cum s-a arătat, vectorii $\bar{R}$ și $\bar{M}_0$ sînt coliniari, proprietate care se poate exprima sub forma

$$\bar{M}_{0'} = \bar{M}_r = \lambda \bar{R} \tag{2.22}$$

unde λ este un scalar.

Modificarea momentului atunci cînd se trece de la punctul de reducere O la alt punct O', este dată de relația (2.16) care poate fi scrisă și astfel

$$\bar{M}_{0'} = \bar{M}_0 - \overline{OO'} \times \bar{R}. \tag{2.23}$$

Avînd în vedere că vectorul $\overline{OO'}$ are expresia

$$\overline{OO'} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{2.24}$$

iar $\bar{M}_0$ și $\bar{R}$ se pot exprima prin proiecțiile lor pe axele de coordonate, se obține expresia momentului minim sub forma

$$\bar{M}_r = [M_x - (yZ - zY)]\bar{i} + [M_y - (zX - xZ)]\bar{j} + [M_z - - (xY - yX)]\bar{k}. \tag{2.25}$$

Coliniaritatea vectorilor $\bar{M}_r$ și $\bar{R}$, așa cum se arată în relația (2.22), presupune proporționalitatea proiecțiilor respective pe axele de coordonate, adică

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_z - (xY - yX)}{Z} \tag{2.26}$$

în care x, y, z reprezintă coordonatele unui punct curent al locului geometric. Se recunosc în relațiile (2.26) ecuațiile unei drepte în spațiu, această dreaptă fiind numită axa centrală a sistemului de forțe.

În situația particulară în care trinomul invariant (2.18) este nul, atunci și vectorul $\bar{M}_r$ este nul și deci definiția dată axei centrale, exprimată sub forma (2.22), este lipsită de sens. În acest caz, axa centrală reprezintă locul geometric al punctelor în care vectorul moment $\bar{M}$ este nul.

În concluzie, reducerea unui sistem de forțe într-un punct situat pe axa sa centrală conduce la un torsor minimal, alcătuit din forța rezultantă $\bar{R}$ și vectorul moment $\bar{M} = \bar{M}_r$, coliniar cu $\bar{R}$, sau în particular la $\bar{M} = 0$.

2.4.3. CLASIFICAREA SISTEMELOR DE FORȚE

S-a arătat în paragraful precedent că orice sistem de forțe poate fi redus într-un punct la elementele mecanice cele mai simple, și anume la vectorul forță $\bar{R}$ și vectorul moment $\bar{M}_0$, acestea avînd expresiile (2.10), componentele lor pe axe fiind obținute cu relațiile (2.11) și respectiv (2.12).

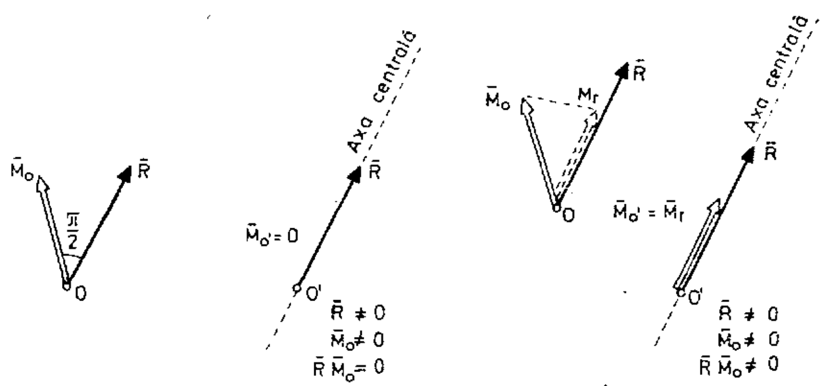


Fig. 2.13

Reducerea sistemelor de forțe într-un punct și evidențierea invarianților acestora fac posibilă gruparea sistemelor de forțe în clase de echivalență, adică clasificarea sistemelor de forțe. Criteriul de clasificare se stabilește avînd în vedere teorema de echivalență a două sisteme de forțe, și anume : condiția necesară și suficientă ca două sisteme de forțe să fie echivalente este ca elementele torsorului de reducere într-un punct să fie respectiv identice, adică,

$$\bar{R}^{(1)} = \bar{R}^{(2)}\ ;\ \bar{M}_0^{(1)} = \bar{M}_0^{(2)}. \tag{2.27}$$

În acest fel, mulțimea tuturor sistemelor de forțe se clasifică în patru clase de echivalență, și anume :

I) $\bar{R} \neq 0, \bar{M}_0 \neq 0$, reprezintă cazul cel mai general, în care sînt posibile două situații, în funcție de valoarea trinomului invariant (2.18).

a) $\bar{R}\bar{M}_0 = 0$, ceea ce înseamnă că cei doi vectori sînt perpendiculari. În acest caz, reducerea sistemului de forțe într-un punct O' situat pe axa centrală conduce numai la vectorul rezultantă $\bar{R}$, vectorul $\bar{M}_{0'}$ fiind nul.

În concluzie, un astfel de sistem de forțe este echivalent cu o forță unică $\bar{R} = \Sigma\bar{F}_i$, numită rezultantă, situată pe axa centrală a sistemului (fig. 2.13, *a*).

b) $\bar{R}\bar{M}_0 \neq 0$; spre deosebire de cazul precedent, cei doi vectori formează un unghi diferit de $\pi/2$ și deci $M_r \neq 0$. Într-un punct O' aparținînd axei centrale, sistemul de forțe se reduce la un vector forță $\bar{R}$ și un vector moment $\bar{M}_r$, coliniar cu $\bar{R}$ (fig. 2.13, *b*).

II) $\bar{R} \neq 0 ; \bar{M}_0 = 0$. Sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică $\bar{R}$ numită rezultantă, al cărui suport este axa centrală. Această situație reprezintă un caz particular de forma I a, în care punctul de reducere O este situat chiar pe axa centrală.

III) $\bar{R} = 0 ; \bar{M}_0 \neq 0$. În acest caz sistemul de forțe se reduce în orice punct la același moment $\bar{M}_0$, care este un vector liber. Așa cum s-a arătat în legătură cu cuplurile de forțe (v. §2.3), vectorul liber $\bar{M}_0$ se poate înlocui printr-o pereche de forțe paralele, egale și cu sensuri opuse, conținute într-un plan perpendicular pe vectorul moment. Rezultă deci că sistemul de forțe este echivalent cu o pereche de forțe care formează un cuplu situat într-un plan perpendicular pe $\bar{M}_0$ (fig. 2.14).

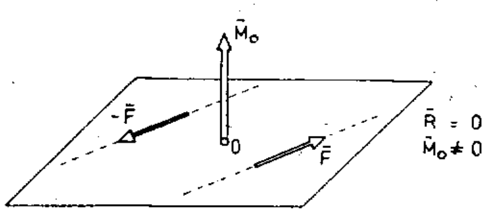


Fig. 2.14

IV) $\bar{R} = 0 ; \bar{M}_0 = 0$. În orice punct al spațiului, torsorul de reducere are ambele elemente nule. Sistemul de forțe este echivalent cu zero, ceea ce înseamnă că forțele sînt în echilibru și deci, aplicate asupra unui corp rigid, nu au nici un efect mecanic.

2.4.4. REDUCEREA SISTEMELOR PARTICULARE DE FORȚE

Se numesc sisteme particulare de forțe sistemele care se reduc la o forță unică, numită rezultantă, situată pe axa centrală. Trinomul invariant al acestor sisteme este nul ($\bar{R}\bar{M}_0 = 0$). Din această categorie fac parte forțele coplanare, forțele paralele și forțele concurente.

Teorema lui Varignon. Se consideră un sistem particular de forțe $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_i, \ldots, \bar{F}_n$, echivalent deci cu forța unică $\bar{R}$ al cărui suport este axa centrală (fig. 2.15). Prin reducerea forțelor într-un punct O, situat în afara axei centrale, se obține momentul $\bar{M}_0$ evaluat conform relației (2.10) adică :

$$\bar{M}_0 = \Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_i. \tag{2.28}$$

Într-un punct al axei centrale momentul rezultant $M_{0'}$ este nul. Acest moment poate fi însă calculat cu relația (2.16), plecînd de la torsorul de reducere din punctul O, obținîndu-se

$$\bar{M}_{0'} = \bar{M}_0 + \overline{O'O} \times \bar{R} = 0$$

din care, pe baza proprietății $\overline{O'O} = -\overline{OO'}$, rezultă

$$\bar{M}_0 = \overline{OO'} \times \bar{R}. \tag{2.28 a}$$

Se observă că membrul al doilea reprezintă de fapt momentul rezultantei sistemului de forțe în raport cu punctul O. Avînd în vedere și relația (2.28) se pune în evidență egalitatea

$$\Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_i = \overline{OO'} \times \bar{R}. \tag{2.29}$$

Relația (2.29) reprezintă teorema lui Varignon și exprimă o proprietate importantă a sistemelor particulare de forțe și anume că momentul rezultantei în raport cu orice punct al spațiului este egal cu suma momentelor tuturor forțelor sistemului în raport cu același punct. Teorema lui Varignon are un enunț similar în cazul considerării momentelor în raport cu o axă. Într-adevăr, dacă se înmulțește scalar relația (2.29) cu versorul $\bar{u}$, se obțin momentele forțelor, respectiv momentul rezultantei, în raport cu axa definită prin versorul considerat.

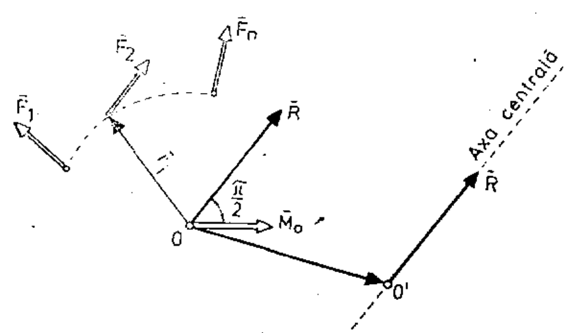


Fig. 2.15

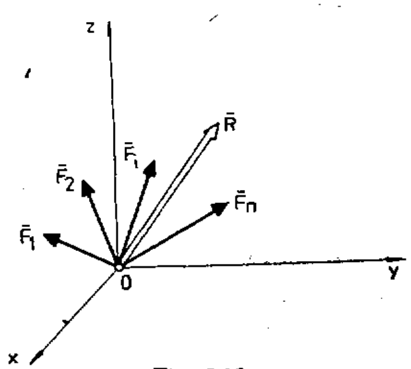


Fig. 2.16

Reducerea forțelor concurente. Se consideră sistemul de forțe concurente din fig. 2.16. Rezultanta forțelor se poate determina prin aplicarea succesivă

a regulei paralelogramului, dar în calculul practic se utilizează compunerea analitică. Pentru aceasta se alege sistemul de referință cu axele rectangulare și cu originea în punctul de concurență. Proiecțiile rezultantei pe axele de coordonate se obțin cu relațiile (2.11) iar vectorul rezultantă $\bar{R}$ are expresia (2.13). Cunoscîndu-se proiecțiile rezultantei pe axe, se determină mărimea rezultantei, și anume

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2.30}$$

iar direcția și sensul acesteia se obțin prin cosinușii directori.

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = X/R\,;\ \cos(\bar{R}, \bar{j}) = Y/R\,;\ \cos(\bar{R}, \bar{k}) = Z/R. \tag{2.31}$$

Avînd în vedere regula paralelogramului, rezultă că suportul rezultantei trece prin punctul de concurență al forțelor.

Sistemele de forțe concurente se pot găsi în două cazuri de reducere, și anume:

I) $R \neq 0$ forțele se reduc la o forță rezultantă determinată așa cum s-a arătat mai înainte.

II) $R = 0$ forțele sînt echivalente cu zero, ele fiind deci în echilibru.

Reducerea forțelor coplanare. Pentru simplificarea calculelor sistemul de axe se alege astfel încît forțele să fie conținute în planul xOy (fig. 2.17). În această situație, proiecțiile forțelor pe axa Oz sînt nule și în consecință rezultanta nu are componentă pe această axă ($Z = 0$). De asemenea, forțele fiind coplanare cu axele Ox și Oy momentele respective sînt nule ($M_x = 0$, $M_y = 0$). Torsorul de reducere a forțelor în punctul O are expresiile

$$\bar{R} = X\bar{i} + Y\bar{j}\,;\ \bar{M}_0 = M_z\bar{k} \tag{2.32}$$

fiind ușor de verificat că trinomul invariant (2.18) este nul. Se observă că momentul rezultat $\bar{M}_0$ este perpendicular pe planul forțelor, astfel că în reprezentarea din fig. 2.17 este indicat numai sensul său de rotire.

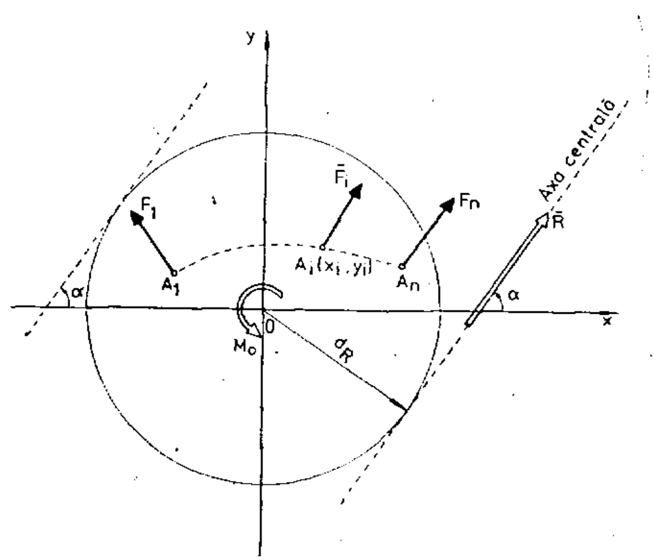


Fig. 2.17

Axa centrală, deci suportul rezultantei $\bar{R}$, se obține prin particularizarea ecuațiilor (2.26) pentru $z = 0$; $Z = 0$; $M_x = 0$; $M_y = 0$, adică

$$\frac{0}{X} = \frac{0}{Y} = \frac{M_0 - (xY - yX)}{0}, \tag{2.33}$$

de unde rezultă ecuația

$$Yx - Xy = M_0. \tag{2.34}$$

Poziția rezultantei poate fi obținută și pe baza teoremei lui Varignon, avînd în vedere că momentul rezultantei în raport cu punctul O trebuie să fie egal cu suma momentelor forțelor. Suportul rezultantei este reprezentat în acest caz de dreapta care are coeficientul unghiular $m = \operatorname{tg}\alpha = Y/X$ și este situată la distanța d_R față de punctul O, dată de relația

$$d_R = M_0/R. \tag{2.35}$$

Așa cum se observă în fig. 2.17, există două drepte tangente la cercul cu rază d_R și care au coeficientul unghiular m. Dintre acestea, suportul rezultantei îl constituie dreapta pentru care momentul rezultantei în raport cu O are același sens cu M_0.

Cazurile de reducere sînt următoarele:

I) $R \neq 0$; $M \neq 0$. În acest caz sistemul de forțe este echivalent cu o rezultantă $\bar{R}$ situată pe axa centrală, a cărei ecuație este (2.34) sau care se determină cu relația (2.35).

II) $R \neq 0$, $M_0 = 0$. Sistemul se reduce la o forță rezultantă al cărei suport trece chiar prin punctul O.

III) $R = 0$, $M_0 \neq 0$. Sistemul de forțe se reduce la un cuplu al cărui plan este chiar planul forțelor și al cărui moment este M_0.

IV) $R = 0$, $M_0 = 0$. Sistemul este echivalent cu zero, deci forțele sînt în echilibru.

Principiul paralelogramului forțelor face posibilă reducerea forțelor coplanare și prin procedee grafice. Compunerea grafică se bazează, de asemenea, pe operația elementară de echivalență potrivit căreia o forță poate fi înlocuită prin componentele sale. Pentru exemplificare se consideră sistemul din fig. 2.18, *a*. O cale de determinare a rezultantei constă din compunerea succesivă a forțelor și determinarea de rezultante parțiale, utilizînd de fiecare dată paralelogramul forțelor, adică

$$\bar{R}_{12} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2\,;\ \bar{R}_{13} = \bar{R}_{12} + \bar{F}_3\,;\ \bar{R} = \bar{R}_{13} + \bar{F}_4.$$

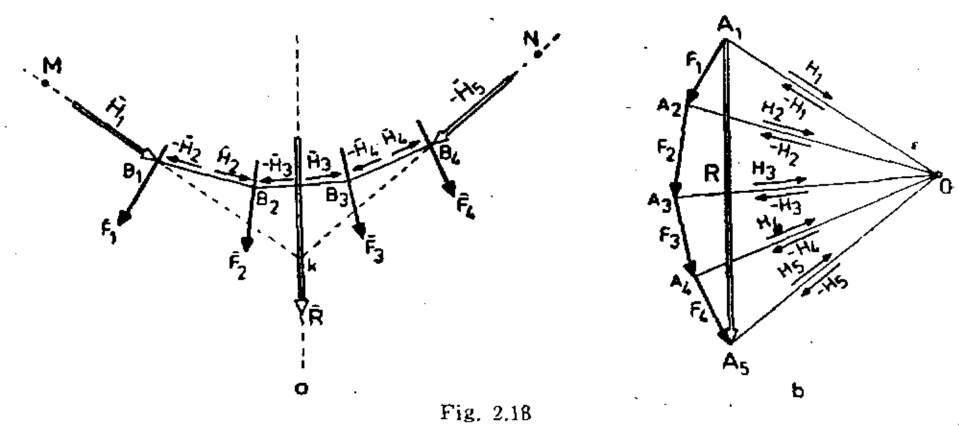


Fig. 2.18

Procedeul este greoi și ca atare nu este aplicabil pentru operarea practică, de aceea se utilizează o construcție grafică suplimentară care are și avantajul de a prezenta o anumită interpretare fizică. Pentru aceasta, se construiește poligonul forțelor, care constă din înșiruirea forțelor $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_4$, desenate la o scară aleasă (fig. 2.18, *b*). Latura $\overline{A_1A_5}$, determinată de originea primei forțe și extremitatea ultimei forțe a sistemului, reprezintă tocmai vectorul rezultantă dat de prima relație (2.10), stabilind deci mărimea, direcția și sensul rezultantei. În vederea precizării suportului rezultantei se urmărește găsirea unui punct de pe suportul respectiv. În acest scop, se alege un punct arbitrar O în afara laturilor poligonului forțelor (fig. 2.18, *b*) și se unește acesta cu punctele $A_1, \ldots, A_5$, adică cu vîrfurile poligonului, obținîndu-se razele polare A_1O, $A_2O, \ldots, A_5O$. Aceste raze pot fi considerate drept componente ale forțelor sistemului, astfel: $\bar{F}_1 = \bar{H}_1 + (-\bar{H}_2)$; $\bar{F}_2 = \bar{H}_2 + (-\bar{H}_3)$; $\bar{F}_3 = \bar{H}_3 + (-\bar{H}_4)$; $\bar{F}_4 = \bar{H}_4 + (-\bar{H}_5)$, de unde

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = \bar{H}_1 + (-\bar{H}_5).$$

Trecînd la sistemul de forțe (fig. 2.18, *a*), observînd că forța $\bar{F}_1$ are drept componente razele $\bar{H}_1$ și $(-\bar{H}_2)$ și că aceste trei forțe trebuie să fie concurente, se alege un punct arbitrar B_1 pe suportul forței $\bar{F}_1$, din care se duc paralele la razele polare A_1O și A_2O. Forțele $\bar{H}_1$ și $(-\bar{H}_1)$, aplicate în punctul B_1, sînt, așadar, echivalente cu forța $\bar{F}_1$. În continuare se procedează în același mod și cu componentele $\bar{H}_2$ și $(-\bar{H}_2)$ ale forței $\bar{F}_2$, dar punctul B_2 nu mai este arbitrar, el determinîndu-se plecînd de la constatarea că $\bar{H}_2$ și $(-\bar{H}_2)$ au același suport. Operația se repetă pînă la ultima forță a sistemului, astfel că aceasta este înlocuită prin componentele $\bar{H}_4$ și $(-\bar{H}_4)$, aplicate în punctul B_4. În acest fel, forțele $\bar{F}_1 \ldots \bar{F}_4$ au fost înlocuite prin componentele lor, respectiv perechile

$$(\bar{H}_1), (-\bar{H}_2); (\bar{H}_2), (-\bar{H}_3); (\bar{H}_3), (-\bar{H}_4); (\bar{H}_4), (-\bar{H}_5).$$

Construcția astfel obținută poartă numele de poligon funicular. Deoarece componentele de pe laturile intermediare ale poligonului funicular sînt două cîte două egale și cu sensuri opuse, în baza operațiilor elementare de echivalență, ele pot fi suprimate și ca atare întregul sistem de forțe este echivalent cu componentele $\bar{H}_1$ și $(-\bar{H}_5)$ de pe laturile extreme ale poligonului funicular. Rezultanta acestor două forțe trebuie să treacă prin punctul lor de concurență, care se obține prin prelungirea laturilor H_1 și H_5 ale poligonului funicular pînă la intersecția lor în punctul k. Prin acest punct se duce apoi o paralelă la latura A_1A_5 a poligonului forțelor obținîndu-se astfel suportul rezultantei $\bar{R}$. Poligonul funicular se interpretează ca fiind forma de echilibru a unui fir flexibil, inextensibil și fără greutate avînd lungimea $MB_1B_2B_3B_4N$, prins în punctele M și N aflate pe laturile extreme ale poligonului, acționat de forțele $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_4$. Dacă polul O s-ar alege la stînga poligonului de forțe, componentele $\bar{H}_1, \ldots, \bar{H}_5$ ar reprezenta forțele de compresiune în laturile poligonului funicular, situație în care configurația poligonului funicular este interpretat ca formă de echilibru a unui sistem de bare drepte, articulate în punctele M, B_1, B_2, B_3, B_4, N.

Cazurile de reducere a forțelor coplanare se regăsesc și pe cale grafică. Primul caz este cel prezentat în fig. 2.18, la care, în poligonul de forțe, originea A_1 nu coincide cu extremitatea A_5 și deci, poligonul de forțe este deschis, iar în poligonul funicular laturile extreme sînt distincte și concurente.

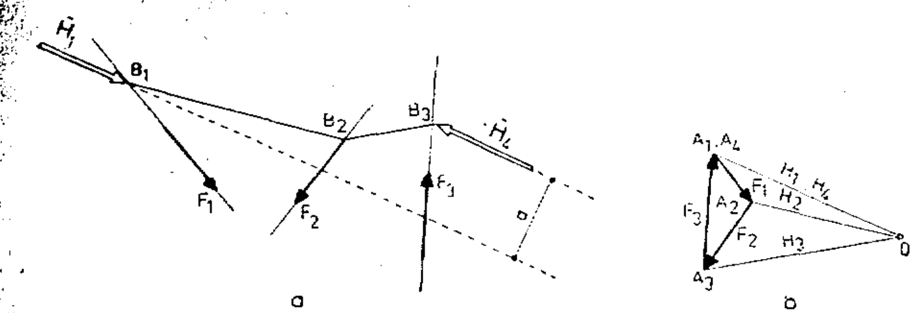


Fig. 2.19

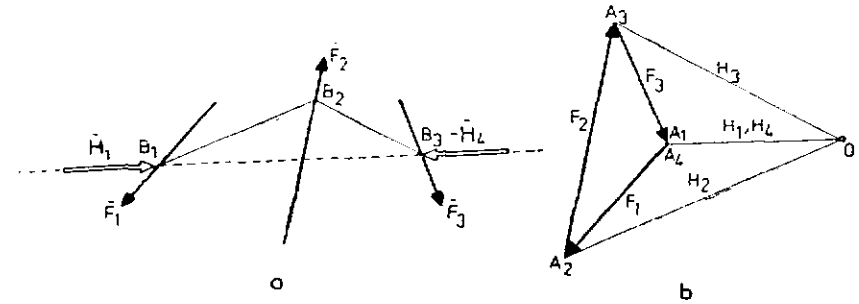


Fig. 2.20

Sistemul se reduce la o rezultantă $\bar{R}$, determinată din poligonul forțelor, care trece prin punctul de intersecție a laturilor extreme ale poligonului funicular.

Dacă la un sistem poligonul forțelor se închide, adică extremitatea ultimei forțe coincide cu originea primei forțe, rezultanta sistemului este nulă. Un astfel de sistem este arătat în fig. 2.19, *a*. Așa cum se observă în fig. 2.19, *b* prima rază a poligonului forțelor se confundă cu ultima și ca atare laturile extreme ale poligonului funicular sînt paralele, iar componentele respective sînt egale și cu sensuri opuse. Dacă laturile extreme ale poligonului funicular sînt distincte, cum se prezintă, de exemplu, cazul din fig. 2.19, *a*, atunci forțele respective se reduc la un cuplu al cărui moment este $M = H_1d$.

Ultimul caz de reducere este al sistemelor echivalente cu zero, situație în care *poligonul forțelor este închis*, deci $R = 0$, *iar laturile extreme ale poligonului funicular* se confundă (fig. 2.20).

Reducerea forțelor paralele. Se consideră sistemul de forțe paralele din fig. 2.21, *a*. Direcția comună a forțelor este definită prin versorul $\bar{u}$, astfel că forțele pot fi exprimate în funcție de acest versor sub forma $\bar{F}_i = F_i\bar{u}$. Vectorul rezultantă se obține din relația (2.10), astfel

$$\bar{R} = \Sigma\bar{F}_i = \Sigma F_i\bar{u} = \bar{u}\Sigma\bar{F}_i = \bar{u}R \qquad (2.36)$$

și deci

$$R = \Sigma F_i.$$

Momentul forțelor în raport cu punctul O este

$$\bar{M}_0 = \Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_i = \Sigma\bar{r}_i \times F_i\bar{u} = \Sigma F_i\bar{r}_i \times \bar{u} \qquad (2.37)$$

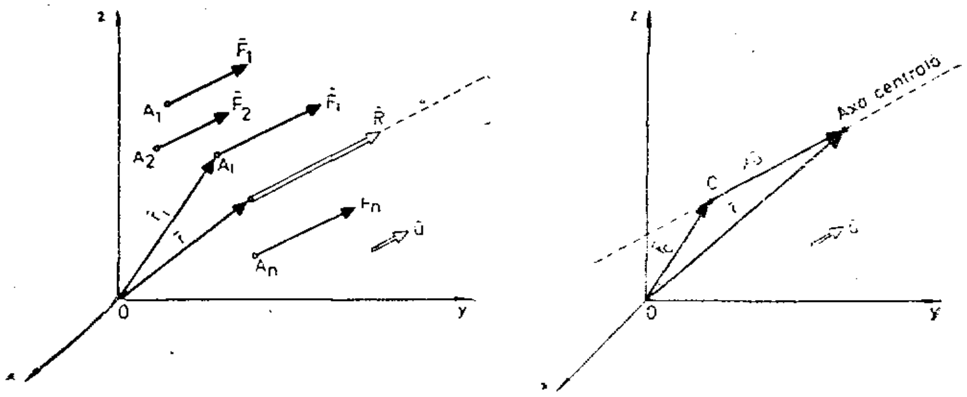


Fig. 2.21

astfel că, avînd în vedere relaţia (2.36), trinomul invariant devine

$$\bar{R}\bar{M}_0 = (\bar{u}R)(\Sigma F_i \bar{r}_i \times \bar{u}) = 0 \tag{2.38}$$

şi ca atare este aplicabilă teorema lui Varignon.

Relaţia (2.36) arată că mărimea rezultantei este egală cu suma algebrică a forţelor. Pentru a determina suportul rezultantei se aplică teorema lui Varignon în raport cu punctul O

$$\bar{r} \times \bar{R} = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{F}_i \text{ sau } \bar{r} \times R\bar{u} = \Sigma \bar{r}_i \times (F_i \bar{u}).$$

Avînd în vedere proprietăţile operaţiilor vectoriale se obţine

$$(R\bar{r} \times \bar{u}) = \Sigma F_i \bar{r}_i \times \bar{u}\,;\ (R\bar{r} - \Sigma F_i \bar{r}_i) \times \bar{u} = 0. \tag{2.39}$$

Produsul vectorial (2.39) este nul atunci cînd unul din cei doi termeni este nul sau cînd vectorii sînt coliniari. Eliminîndu-se cazul imposibil $u = 0$, sînt analizate în continuare celelalte situaţii, adică

$$R\bar{r} - \Sigma F_i \bar{r}_i = 0$$

relaţie care conduce la stabilirea suportului rezultantei prin vectorul de poziţie al unui punct C prin care trece rezultanta sistemului

$$\bar{r}_c = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_i}{\Sigma F_i} = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_i}{R}. \tag{2.40}$$

Condiţia ca cei doi vectori din produsul (2.39) să fie coliniari se poate scrie

$$R\bar{r} - \Sigma F_i \bar{r}_i = \lambda \bar{u}$$

de unde

$$\bar{r} = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_i}{R} + \frac{\lambda}{R}\bar{u} \tag{2.41}$$

sau, avînd în vedere relaţia (2.40)

$$\bar{r} = \bar{r}_c + \frac{\lambda}{R}\bar{u} \tag{2.42}$$

în care λ este un scalar oarecare.

Expresia (2.42) reprezintă ecuaţia unei drepte care trece prin punctul de aplicaţie al rezultantei (notat cu C) şi care are direcţia definită prin versorul $\bar{u}$, adică direcţia comună a forţelor şi a rezultantei. Această dreaptă reprezintă tocmai suportul rezultantei, fiind deci axa centrală a sistemului de forţe (fig. 2.21, *b*).

Se observă din relaţia (2.40) că vectorul $\bar{r}_c$ nu depinde de versorul $\bar{u}$ şi prin urmare punctul C nu depinde de direcţia comună a forţelor. Aceasta înseamnă că prin rotirea simultană a tuturor forţelor cu acelaşi unghi α, poziţia punctului C nu se modifică şi deci rezultanta forţelor paralele trece prin acest punct indiferent de orientarea forţelor paralele (fig. 2,22). Din acest motiv, punctul C se numeşte centrul forţelor paralele, avînd deci proprietatea că axa centrală a sistemului de forţe trece în permanenţă prin el atunci cînd toate forţele se rotesc cu acelaşi unghi.

Într-un sistem de referinţă $Oxyz$, coordonatele centrului forţelor paralele se obţin prin proiectarea relaţiei (2.40) pe axele sistemului

$$x_c = \frac{\Sigma x_i F_i}{\Sigma F_i}\,;\ y_c = \frac{\Sigma y_i F_i}{\Sigma F_i}\,;\ z_c = \frac{\Sigma z_i F_i}{\Sigma F_i}. \tag{2.43}$$

Centrul forţelor paralele prezintă încă două proprietăţi importante, şi anume:

— poziţia centrului forţelor paralele nu se modifică dacă toate forţele sînt multiplicate cu acelaşi scalar α; într-adevăr, dacă $F_i' = \alpha F_i$, expresia (2.40) devine

$$\bar{r}_c' = \frac{\Sigma \bar{r}_i F_i'}{\Sigma F_i'} = \frac{\alpha \Sigma \bar{r}_i F_i}{\alpha \Sigma F_i} = \bar{r}_c\,; \tag{2.44}$$

— poziţia centrului forţelor paralele este invariabilă în raport cu forţele, deci nu depinde de sistemul de axe ales. Fie un alt sistem de axe $O_1x_1y_1z_1$ faţă de care se determină poziţia centrului forţelor paralele $\bar{F}_i$ (fig. 2.23). Originea sistemului de referinţă iniţial are vectorul de poziţie $\bar{r}_0$. Se observă că între vectorii de poziţie ai punctului de aplicaţie al forţei $\bar{F}_i$ există relaţia $\bar{r}_{1i} = \bar{r}_0 + \bar{r}_i$ şi deci expresia (2.40) raportată la sistemul $O_1x_1y_1z_1$ devine

$$\bar{r}_{1c} = \frac{\Sigma F_i(\bar{r}_0 + \bar{r}_i)}{R} = \frac{\Sigma F_i \bar{r}_0 + \Sigma F_i \bar{r}_i}{R} \tag{2.45}$$

de unde rezultă $\bar{r}_{1c} = \bar{r}_0 + \bar{r}_c$, ceea ce înseamnă că vectorul de poziţie al centrului forţelor paralele s-a modificat ca şi vectorul de poziţie al oricărui alt punct, de exemplu al punctului A_i, şi deci poziţia punctului C este legată de sistemul de forţe.

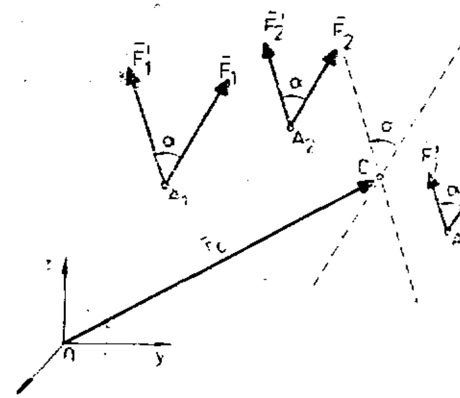


Fig. 2.22

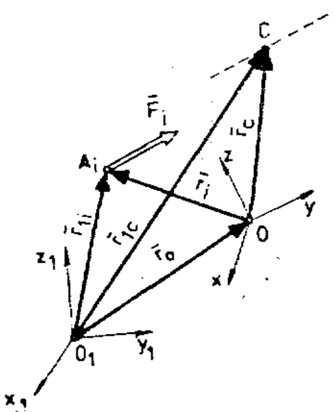


Fig. 2.23

Orice sistem de forțe paralele se încadrează într-unul din următoarele cazuri de reducere:

I) $R \neq 0$, $M_0 \neq 0$, sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică, numită rezultanta sistemului, al cărui suport este axa centrală.

II) $R \neq 0$, $M_0 = 0$ reprezintă o situație particulară a cazului I și anume aceea cînd rezultanta sistemului, deci axa centrală trece prin punctul 0.

III) $R = 0$, $M_0 \neq 0$, sistemul de forțe se reduce la un cuplu al cărui moment este $\bar{M}_0$.

IV) $R = 0$, $M_0 = 0$, sistemul este echivalent cu zero ceea ce înseamnă că forțele sînt *în echilibru*.

2.5. CENTRUL DE GREUTATE (CENTRUL MASELOR)

Așa cum s-a arătat la paragraful 1.5, una din forțele fundamentale care se dezvoltă în cazul interacțiunilor mecanice o reprezintă forța de greutate

$$\bar{G} = m\bar{g}$$

unde $\bar{g}$ reprezintă accelerația terestră iar m este masa gravifică.

Intensitatea $\bar{g}$ a cîmpului gravitațional al Pămîntului variază în funcție de latitudine și altitudine, prezentînd o valoare medie a modulului său de 9,80665 m/s^2. Direcția accelerației terestre poate fi considerată cu suficientă exactitate că este dirijată spre centrul Pămîntului.

În cazul sistemelor materiale (puncte și corpuri) răspîndite într-un domeniu relativ restrîns și ale cărui dimensiuni sînt neglijabile în raport cu dimensiunile generale ale Pămîntului, așa cum sînt de fapt situațiile din practica curentă, forțele de greutate pot fi considerate forțe paralele. Această constatare face ca toate rezultatele și concluziile paragrafului 2.4, referitoare la forțele paralele să fie aplicabile și pentru forțele de greutate.

2.5.1. CENTRUL DE GREUTATE AL UNUI SISTEM MATERIAL. EXPRESII GENERALE

Se consideră sistemul alcătuit din punctele materiale avînd masele $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$, ale căror poziții sînt precizate prin vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_i, \ldots, \bar{r}_n$ (fig. 2.24). Se numește centru de greutate al sistemului centrul forțelor paralele reprezentate de greutățile punctelor materiale respective. Vectorul de poziție al centrului de greutate se obține cu expresia (2.40)

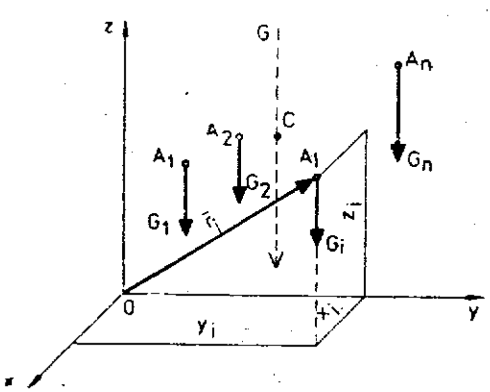


Fig. 2.24

$$\bar{r}_c = \frac{\Sigma G_i \bar{r}_i}{\Sigma G_i} = \frac{\Sigma G_i \bar{r}_i}{G} \qquad (2.46)$$

în care $G = \Sigma G_i$ este greutatea întregului sistem.

Dacă se are în vedere că $G_i = m_i g$ și se înlocuiește în relația (2.46) rezultă

$$\bar{r}_c = \frac{\Sigma m_i g \bar{r}_i}{\Sigma m_i g} = \frac{\Sigma m_i \bar{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \bar{r}_i}{M} \qquad (2.47a)$$

sau

$$M\bar{r}_c = \Sigma m_i \bar{r}_i \qquad (2.47b)$$

unde $M = \Sigma m_i$ reprezintă întreaga masă a sistemului material. Se observă că în expresia (2.47a) poziția centrului de greutate este obținută în funcție de distribuția maselor sistemului material fapt ce conduce la noțiunea mai generală de centrul maselor.

Dacă x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) reprezintă coordonatele punctelor materiale cu masele $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ ale căror greutăți sînt respectiv $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_n$, din relațiile (2.46) și (2.47a) se deduc expresiile coordonatelor x_c, y_c, z_c ale centrului de greutate (centrului maselor)

$$x_c = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma G_i x_i}{\Sigma G_i} \qquad (2.48a)$$

$$y_c = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma G_i y_i}{\Sigma G_i} \qquad (2.48b)$$

$$z_c = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma G_i z_i}{\Sigma G_i}. \qquad (2.48c)$$

Cantitățile $\Sigma m_i x_i$, $\Sigma m_i y_i$, $\Sigma m_i z_i$, reprezentînd suma produselor dintre masele punctelor materiale și distanțele lor pînă la planele de coordonate, se numesc momente statice în raport cu aceste plane

$$S_{yOz} = \Sigma m_i x_i\,; \quad S_{zOx} = \Sigma m_i y_i\,; \quad S_{xOy} = \Sigma m_i z_i. \qquad (2.49)$$

Cu notațiile (2.49), coordonatele centrului de greutate devin

$$x_c = \frac{S_{yOz}}{M}\,; \quad y_c = \frac{S_{zOx}}{M}\,; \quad z_c = \frac{S_{xOy}}{M}. \qquad (2.50)$$

Expresiile (2.50) își păstrează valabilitatea și în cazul unui corp rigid, acesta fiind considerat ca mediu continuu. Determinarea momentelor statice are în vedere în această situație o masă elementară dm (fig. 2.25), astfel că, prin însumarea pe întreg volumul V a momentelor statice ale maselor elementare, rezultă

$$S_{yOz} = \int_V x\, dm\,; \quad S_{zOx} = \int_V y\, dm\,; \quad S_{xOy} = \int_V z\, dm. \qquad (2.51)$$

Momentele statice sînt mărimi care pot avea orice valoare reală, ele putînd deci să fie, după caz, pozitive, negative sau nule, deoarece coordonatele x_i, y_i, z_i din relațiile (2.49) la rîndul lor pot avea orice semn.

Centrul de greutate are următoarele proprietăți generale:

1) Este legat invariabil de sistemul material, depinzînd numai de distribuția maselor acestuia.

2) Dacă sistemul material are un plan de simetrie, momentul static în raport cu acest plan este nul și deci centrul de greutate se găsește în acest plan. Într-adevăr, presupunînd că sistemul de puncte materiale are un plan de simetrie α aceasta înseamnă că fiecărui punct de masă m_i situat la

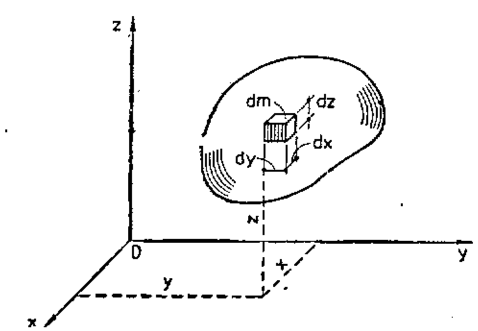


Fig. 2.25

distanța d_i de plan, îi corespunde un alt punct, cu aceeași masă m_i și la aceeași distanță față de plan, dar situat de cealaltă parte a planului, deci la distanță $-d_i$, iar prin însumare, se obține

$$S_\alpha = \Sigma m_i d_i + \Sigma m_i(-d_i) = 0.$$

Poziția centrului maselor, în raport cu acest plan, rezultă din (2.50) și anume

$$d_c = \frac{S_\alpha}{M} = 0$$

ceea ce înseamnă că centrul maselor este conținut de planul de simetrie α.

În mod similar se poate arăta că centrul de greutate al unui sistem material care are o axă de simetrie se găsește pe această axă, iar dacă sistemul material are un centru de simetrie centrul maselor coincide cu acest punct.

3) Dacă un sistem mecanic este descompus într-un număr de n subsisteme $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ale căror mase parțiale $M_1, M_2, \ldots, M_n$ și centre de masă $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt cunoscute, centrul de masă al întregului sistem coincide cu centrul de masă al unor puncte materiale de mase $M_1, M_2, \ldots, M_n$, concentrate în centrele de masă $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ale subsistemelor. Într-adevăr, centrul de mase al întregului sistem se obține cu relația (2.47a) care devine

$$\bar{r}_c = \frac{\sum\limits_{S_1} m_i \bar{r}_i + \sum\limits_{S_2} m_i \bar{r}_i + \ldots + \sum\limits_{S_n} m_i \bar{r}_i}{\sum\limits_{S_1} m_i + \sum\limits_{S_2} m_i + \ldots + \sum\limits_{S_n} m_i}. \tag{2.52}$$

Avînd însă în vedere (2.47b) rezultă

$$M_1 \bar{r}_{1c} = \sum_{S_1} m_i \bar{r}_i\,;\; M_2 \bar{r}_{2c} = \sum_{S_2} m_i \bar{r}_i \ldots M_n \bar{r}_{nc} = \sum_{S_n} m_i \bar{r}_i. \tag{2.53}$$

Prin substituirea expresiilor (2.53) în (2.52) se obține

$$\bar{r}_c = \frac{M_1 \bar{r}_{1c} + M_2 \bar{r}_{2c} + \ldots + M_n \bar{r}_{nc}}{M_1 + M_2 + \ldots + M_n} = \frac{\Sigma M_i \bar{r}_{ic}}{\Sigma M_i} \tag{2.54}$$

relație care este identică cu (2.47a), dacă se consideră masele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ concentrate în punctele $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Această proprietate se aplică și atunci cînd sistemul total S provine dintr-unul sau mai multe subsisteme $(S'_1, S'_2, \ldots, S'_n)$ din care se elimină unul sau mai multe subsisteme $(S''_1, S''_2, \ldots, S''_n)$. În acest caz, masele subsistemelor eliminate sînt considerate în relația (2.54) ca fiind negative, ceea ce conduce la expresia

$$\bar{r}_c = \frac{\sum\limits_{S'} M_i \bar{r}_{ic} + \sum\limits_{S''} (-M_i) \bar{r}_{ic}}{\sum\limits_{S'} M_i + \sum\limits_{S''} (-M_i)}. \tag{2.55}$$

Relațiile (2.54) și (2.55) sînt de mare utilitate în calculul practic privind determinarea centrului de greutate al unor corpuri cu alcătuire complexă, situație în care aplicarea relațiilor generale (2.50), (2.51) ar conduce la dezvoltări matematice foarte complicate.

2.5.2. CENTRUL DE GREUTATE AL CORPURILOR OMOGENE UNI-, BI- ȘI TRIDIMENSIONALE

În cazul problemelor concrete formulele generale (2.50) și (2.51) privind stabilirea poziției centrului maselor capătă forme particulare determinate de modelul de calcul al sistemului mecanic analizat.

Corpuri unidimensionale omogene, cu secțiunea transversală constantă. Se consideră bara omogenă din fig. 2.26, avînd secțiunea transversală constantă. Masa elementară dm se exprimă în funcție de densitatea materialului sub forma $dm = \rho\, dV$, în care $dV = A\, dl$, astfel că expresiile (2.50) și (2.51) devin

$$x_c = \frac{\int_L x\rho A\, dl}{\int_L \rho A\, dl}\,;\quad y_c = \frac{\int_L y\rho A\, dl}{\int_L \rho A\, dl}\,;$$

$$z_c = \frac{\int_L z\rho A\, dl}{\int_L \rho A\, dl},$$

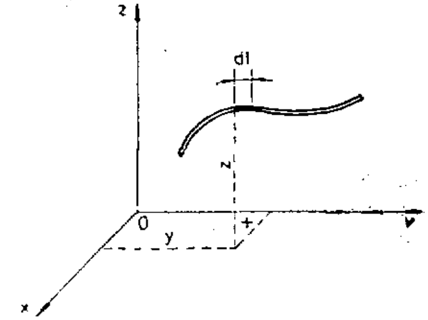


Fig. 2.26

unde L reprezintă domeniul de integrare adică lungimea curbei. Avînd în vedere că densitatea ρ și aria A sînt constante, în relațiile precedente aceste mărimi se simplifică, obținîndu-se

$$x_c = \frac{\int_L x\, dl}{\int_L dl}\,;\quad y_c = \frac{\int_L y\, dl}{\int_L dl}\,;\quad z_c = \frac{\int_L z\, dl}{\int_L dl}, \tag{2.56}$$

relații care conduc la noțiunea de centru de greutate al unei curbe (linii materiale), deoarece intervine arcul elementar dl.

Pentru exemplificare se determină centrul de greutate al unui arc de cerc cu raza R și unghiul la centru 2α (fig. 2.27). Deoarece bara are o axă de simetrie rezultă că $x_c = 0$. Se observă că $dl = R\, d\varphi$; $y = R \cos \varphi$ iar integrarea se face între limitele $-\alpha$ și $+\alpha$.

$$y_c = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} (R \cos \varphi) R\, d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\, d\varphi} = R\frac{\sin \alpha}{\alpha}. \tag{2.57}$$

În această expresie unghiul α se exprimă în radiani.

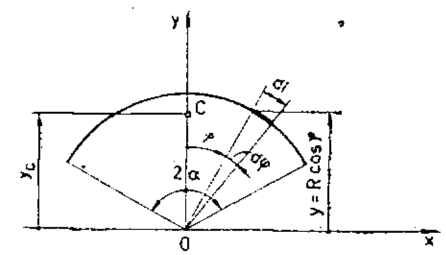


Fig. 2.27

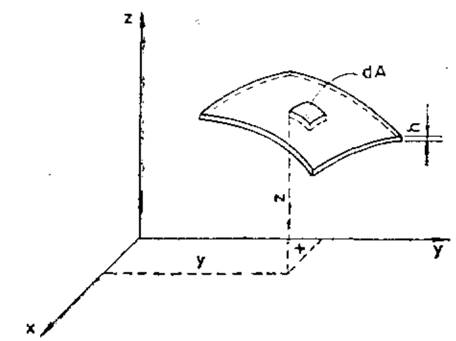


Fig. 2.28

Corpuri bidimensionale omogene și cu grosime constantă. În fig. 2.28 este reprezentată o placă omogenă (ρ = const) și cu grosimea h constantă. Considerînd un volum elementar $dV = h\, dA$ acesta are masa elementară $dm = \rho h\, dA$, utilizată apoi în relațiile (2.50) și (2.51), care devin

$$x_c = \frac{\int_A x\rho h\, dA}{\int_A \rho h\, dA}\,;\quad y_c = \frac{\int_A y\rho h\, dA}{\int_A \rho h\, dA}\,;\quad z_c = \frac{\int_A z\rho h\, dA}{\int_A \rho h\, dA}.$$

Prin simplificare cu ρh = const, se obţin expresiile coordonatelor centrului de greutate al unei plăci omogene cu grosimea constantă

$$x_c = \frac{\int_A x\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A};\quad y_c = \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A};\quad z_c = \frac{\int_A z\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A} \tag{2.58}$$

unde domeniul de integrare A este reprezentat de suprafaţa plăcii. Relaţiile (2.58) în care intervine aria elementară $\mathrm{d}A$ au un caracter geometric, astfel că x_c, y_c, z_c pot fi interpretate ca fiind coordonatele centrului de greutate al unei suprafeţe. Ca exemplu, se determină centrul de greutate al suprafeţei mărginite de o parabolă de gradul 2, de axa Ox şi dreapta $x = a$ (fig. 2.29). Fiind date lungimile a şi b, ecuaţia parabolei este $y = (b/a^2)x^2$. Aria elementară $\mathrm{d}A$ este asimilată cu un dreptunghi cu laturile $\mathrm{d}x$ şi respectiv $y(x)$, deci

$$\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2}x^2\,\mathrm{d}x$$

iar coordonatele sale sînt x şi $y/2$, astfel că din relaţiile (2.58) rezultă

$$x_c = \frac{\int_0^a x\,\mathrm{d}A}{\int_0^a \mathrm{d}A} = \frac{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^3\,\mathrm{d}x}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}a \tag{2.59a}$$

$$y_c = \frac{\int_0^a \left(\frac{y}{2}\right)(y\,\mathrm{d}x)}{\int_0^a \mathrm{d}A} = \frac{\int_0^a \frac{1}{2}\frac{b^2}{ax^4}x^4\,\mathrm{d}x}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,\mathrm{d}x} = 0{,}3\ b. \tag{2.59b}$$

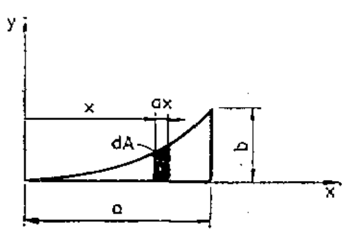


Fig. 2.29

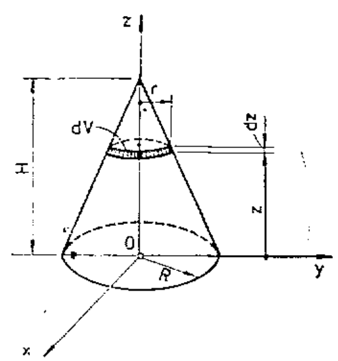


Fig. 2.30

Corpuri tridimensionale omogene. Este cazul general, reprezentat în fig. 2.25. Masa elementară are mărimea $\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Deoarece ρ = const, din formulele (2.50) şi (2.51) se obţin, după simplificări, expresiile:

$$x_c = \frac{\int_V x\,\mathrm{d}V}{\int_V \mathrm{d}V};\quad y_c = \frac{\int_V y\,\mathrm{d}V}{\int_V \mathrm{d}V};\quad z_c = \frac{\int_V z\,\mathrm{d}V}{\int_V \mathrm{d}V}. \tag{2.60}$$

Fie un con circular drept, cu raza bazei R şi cu înălţimea H (fig. 2.30). În vederea determinării centrului de greutate se alege sistemul de axe astfel încît axa Oz este dirijată după înălţimea conului. Din motive de simetrie $x_c = 0$ şi $y_c = 0$. Volumul elementar rezultă prin decuparea unei fişii de

grosime $\mathrm{d}z$, situată la distanţa z faţă de planul xOy, deci $\mathrm{d}V = \pi r^2\mathrm{d}z$ şi cu coordonatele $x = 0$, $y = 0$ şi z. Variabilele r şi z sînt legate prin relaţia

$$r = \frac{R}{H}(H - Z).$$

şi deci

$$\mathrm{d}V = \pi\frac{R^2}{H^2}(H - z)^2\mathrm{d}z.$$

astfel că, din relaţia (2.60), după simplificarea cu $\pi R^2/H^2$ se obţine

$$z_c = \frac{\int_0^H z(H - z)^2\mathrm{d}z}{\int_0^H (H - z)^2\mathrm{d}z} = \frac{H}{4}. \tag{2.61}$$

În tabelul 2.1 sînt date centrele de greutate ale unor figuri (suprafeţe) şi corpuri simple.

2.5.3. CENTRUL DE GREUTATE AL CORPURILOR CU FORMA OARECARE

În problemele concrete ale ingineriei de construcţii corpurile care alcătuiesc sistemele mecanice au, în general, o geometrie complicată ceea ce face inaplicabile pentru calculul practic formulele generale (2.50) şi (2.51) de determinare a poziţiei centrului de greutate. În această situaţie, se partiţionează sistemul mecanic în subsisteme cu geometria simplă, ale căror centre de greutate şi mase (lungimi, arii, volume) sînt uşor de determinat deoarece fie că au expresii cunoscute fie că sînt întabelate. Se face apoi uz de proprietăţile generale ale centrului de greutate, prezentate în paragraful 2.5.1. Avînd în vedere aceste proprietăţi, se concentrează masa fiecărui subsistem în centrul său de greutate, reducîndu-se astfel problema la aceea de determinare a centrului de mase al unui sistem alcătuit dintr-un număr finit de puncte materiale şi de aplicare a expresiei (2.54). Dacă se utilizează sistemul de referinţă $Oxyz$, coordonatele centrului de greutate au următoarele expresii, obţinute prin proiectarea pe aceste axe a relaţiei (2.54)

$$x_c = \frac{\Sigma M_i x_i}{\Sigma M_i};\quad y_c = \frac{\Sigma M_i y_i}{\Sigma M_i};\quad z_c = \frac{\Sigma M_i z_i}{\Sigma M_i}. \tag{2.62}$$

Prin particularizări pentru corpuri uni-, bi- şi tridimensionale, relaţiile (2.62) capătă formele următoare:

— Corpuri unidimensionale

$$x_c = \frac{\Sigma l_i x_i}{\Sigma l_i};\quad y_c = \frac{\Sigma l_i y_i}{\Sigma l_i};\quad z_c = \frac{\Sigma l_i z_i}{\Sigma l_i} \tag{2.63}$$

unde l_i reprezintă lungimea arcelor de curbă sau tronsoanelor de bară în care s-a partiţionat corpul.

— Corpuri bidimensionale

$$x_c = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i};\quad y_c = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i};\quad z_c = \frac{\Sigma A_i z_i}{\Sigma A_i}. \tag{2.64}$$

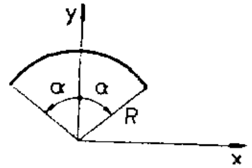
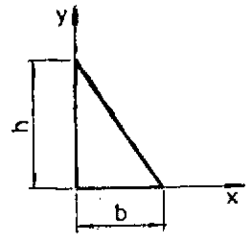
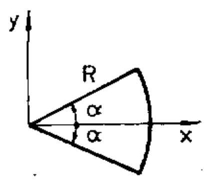
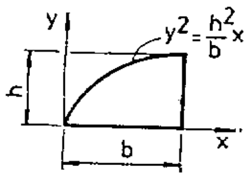
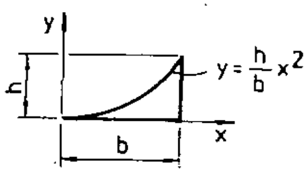
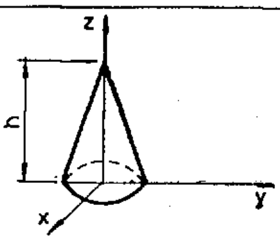
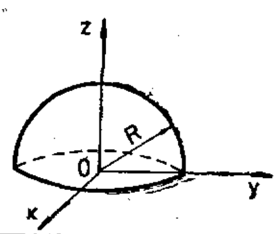
S-a notat cu A_i ariile figurilor componente.

— Corpuri tridimensionale

$$x_c = \frac{\Sigma V_i x_i}{\Sigma V_i};\quad y_c = \frac{\Sigma V_i y_i}{\Sigma V_i};\quad z_c = \frac{\Sigma V_i z_i}{\Sigma V_i}. \tag{2.65}$$

Tabelul 2.1

Centrele de greutate ale unor corpuri

	Corpul	Coordonatele centrului de greutate		
		x_c	y_c	z_c
Unidimensional		0	$\frac{R \sin \alpha}{\alpha}$	—
Bidimensional		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	—
		$\frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$	0	—
		$\frac{3}{5}b$	$\frac{3}{8}h$	—
		$\frac{3}{4}b$	$\frac{3}{10}h$	—
Tridimensional		0	0	$\frac{h}{4}$
		0	0	$\frac{3}{8}R$

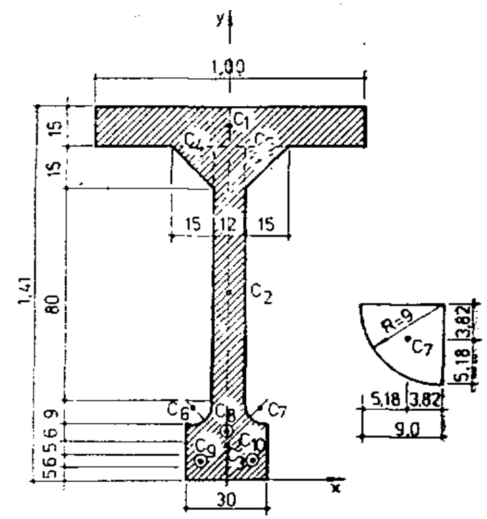


Fig. 2.31

în care V_i reprezintă volumele corpurilor în care s-a partiționat întregul domeniu.

În relațiile (2.63), (2.64) și (2.65) x_i, y_i, z_i sînt coordonatele centrelor de greutate ale subsistemelor componente.

Aplicația 2.1. Un exemplu de aplicare a relațiilor (2.64) este prezentat în legătură cu fig. 2.31 care reprezintă secțiunea transversală a unei grinzi din beton precomprimat. La partea inferioară a grinzii sînt plasate golurile pentru introducerea armăturii pretensionate astfel că se va determina centrul de greutate al secțiunii nete.

Centrul de greutate se găsește pe axa de simetrie a figurii și deci $x_c = 0$. Determinarea coordonatelor y_c se face cu relația (2.64) iar **calculul se** prezintă sub formă sistematizată în tabelul 2.2, astfel că rezultă

$$y_c = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{326\ 934}{3\ 583} = 91{,}24 \text{ cm.}$$

Este de observat că ariile parțiale ale elementelor *6—10* s-au **considerat** negative deoarece secțiunea netă totală se obține prin scăderea acestor **arii** din suma ariilor parțiale *1—5*.

Tabelul 2.2

Elementul i	A_i cm²	y_i cm	$A_i y_i$ cm³
1	1 500,0	133,50	200 250
2	1140,0	78,50	89 490
3	930,0	15,50	14 415
4	112,5	121,00	13 612
5	112,5	121,00	13 612
6	—63,6	27,18	—1 728
7	—63,6	27,18	—1 728
8	—28,2	19,00	— 537
9	—28,2	8,00	— 226
10	—28,2	8,00	— 226
	3 583,1		326 934

2.5.4. TEOREMELE LUI GULDIN-PAPPUS

Teorema I. Se consideră arcul de curbă plană de lungime L, care se rotește în jurul unei axe Ox coplanară cu arcul și care nu îl intersectează (fig. 2.32). Arcul generează o suprafață de rotație a cărei arie urmează să fie calculată. În acest scop se determină aria suprafeței descrisă de arcul elementar dl aceasta fiind aria laterală a unui cilindru cu înălțimea dl și cu raza cercului de bază y, deci $dA = 2\pi y dl$. Prin însumarea tuturor ariilor elementare se obține aria totală care este

$$A = \int_L dA = 2\pi \int_L y dl. \tag{2.66}$$

Dar, conform relației a doua (2.56), există egalitatea

$$\int_L y\, dl = y_c \int_L dl$$

sau

$$\int_L y\, dl = y_c L. \tag{2.67}$$

Din relațiile (2.66) și (2.67) se obține aria suprafeței laterale sub forma

$$A = (2\pi y_c)L. \tag{2.68}$$

În această relație se observă că $2\pi y_c$ reprezintă lungimea cercului descris de centrul de greutate al arcului de curbă astfel că prima teoremă are următorul enunț: aria suprafeței generate de un arc de curbă plană care se rotește complet în jurul unei axe situate în planul său și pe care nu o intersectează este egală cu produsul dintre lungimea arcului descris de centrul de greutate al arcului de curbă și lungimea acestui arc.

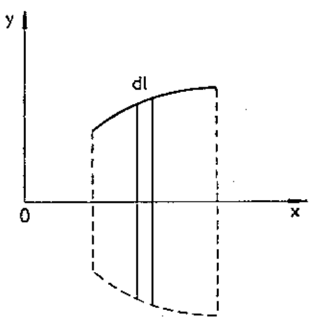


Fig. 2.32

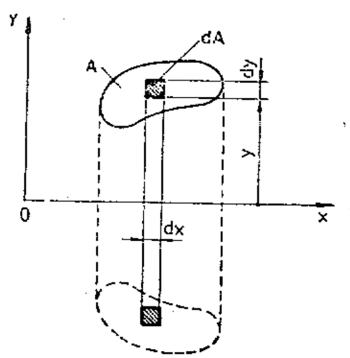


Fig. 2.33

Teorema II. Fie o curbă plană închisă care delimitează o suprafață cu aria A (fig. 2.33). Prin rotirea curbei în jurul unei axe coplanare cu ea și pe care nu o intersectează, de exemplu axa Ox, se generează un corp de rotație al cărui volum urmează să fie determinat. Fie dV volumul determinat prin rotirea ariei elementare dA. Acest volum se obține prin diferența volumelor a doi cilindri astfel:

$$dV = \pi(y + dy)^2 dx - \pi y^2 dx.$$

După efectuarea calculelor și eliminarea infiniților mici de ordin superior, avînd în vedere că $dx\,dy = dA$, rezultă

$$dV = 2\pi y\, dA$$

de unde

$$V = \int_A dV = 2\pi \int_A y\, dA. \tag{2.69}$$

Din relația (2.58) se obține însă

$$\int_A y\, dA = y_c \int_A dA$$

sau

$$\int_A y\, dA = y_c A. \tag{2.70}$$

Prin substituirea rezultatului din relația (2.70) în relația (2.69) se găsește

$$V = (2\pi y_c)A \tag{2.71}$$

rezultat care conduce la formularea teoremei a II-a astfel: volumul corpului generat prin rotirea unei curbe plane închise în jurul unei axe coplanare pe care nu o intersectează este egal cu produsul dintre aria mărginită de curbă și lungimea cercului descris de centrul de greutate al suprafeței.

Aplicația 2.2. Se dă sistemul de forțe din fig. 2.34 la care $F_1 = 2\sqrt{2}F$ $F_2 = \sqrt{3}F$, $F_3 = 2F$ și $M_1 = 2\sqrt{2}Fa$. Se cere determinarea torsorului de reducere în O și caracterizarea sistemului de forțe.

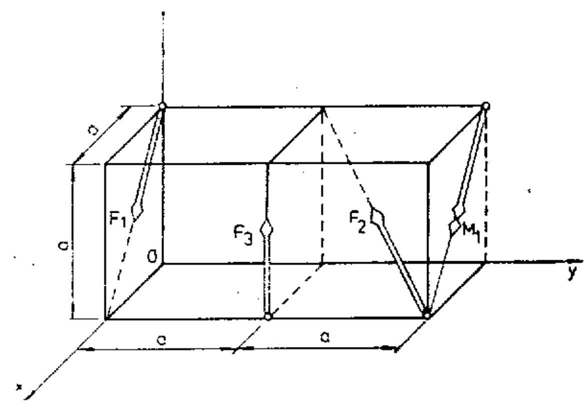


Fig. 2.34

Proiecțiile rezultantei se calculează pe baza expresiilor (2.11), de unde rezultă

$$X = (2\sqrt{2}F)\frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{3}F)\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 = F$$

$$Y = 0 + (-\sqrt{3}F)\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 = -F$$

$$Z = (-2\sqrt{2}F)\frac{\sqrt{2}}{2} + (\sqrt{3}F)\frac{1}{\sqrt{3}} + 2F = F$$

și deci $\quad \bar{R} = F\bar{i} + (-F)\bar{j} + F\bar{k}$ și $R = \sqrt{3}F$.

Direcția rezultantei este precizată prin unghiurile definite prin următoarele valori ale cosinușilor :

$$\cos(\bar{i}, \bar{R}) = 1/\sqrt{3}\,;\ \cos(\bar{j}, \bar{R}) = -1/\sqrt{3}\,;\ \cos(\bar{k}, \bar{R}) = 1/\sqrt{3}.$$

Pentru calculul componentelor M_x, M_y, M_z se are în vedere faptul că acestea reprezintă suma momentelor forțelor date în raport cu axele Ox, Oy, Oz, la care se adaugă proiecțiile pe axe ale momentului M_1, obținîndu-se

$$M_x = 0 + (\sqrt{3}F)(1/\sqrt{3})(2a) + (2F)(a) + (2\sqrt{2}Fa)(\sqrt{2}/2) = 6\ Fa$$

$$M_y = (2\sqrt{2}F)(\sqrt{2}/2)(a) - (\sqrt{3}F)(1/\sqrt{3})(a) - (2F)(a) + 0 = -Fa$$

$$M_z = 0 + [(\sqrt{3}F)(1/\sqrt{3})(2)(a) - (\sqrt{3}F)(1/\sqrt{3})(a)] + $$
$$+ 0 - (2\sqrt{2}Fa)(\sqrt{2}/2) = -Fa.$$

Rezultă

$$\bar{M}_0 = (6Fa)\bar{i} + (-Fa)\bar{j} + (-Fa)\bar{k}\,;\ M_0 = \sqrt{38}\ Fa.$$

Pentru a caracteriza sistemul este necesar să se determine torsorul invariant (2.18)

$$\bar{R}\bar{M}_0 = (F)(6Fa) + (-F)(-Fa) + (F)(-Fa) = 6Fa^2.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$ și $\bar{R}\bar{M}_0 \neq 0$ sistemul de forțe se reduce la o forță $\bar{R}$ situată pe axa centrală și la un moment minim $\bar{M}_r$, coliniar cu rezultanta, avînd mărimea dată de relația (2.21), adică

$$M_r = \frac{\bar{R}\bar{M}_0}{R} = \frac{6F^2a}{\sqrt{3}F} = 2\sqrt{3}Fa.$$

Axa centrală a sistemului de forțe are ecuațiile (2.26) adică

$$\frac{6Fa - (Fy + Fz)}{F} = \frac{-Fa - (Fz - Fx)}{-F} = \frac{-Fa - (-Fx - Fy)}{F}$$

care, după efectuarea calculelor, conduc la

$$x - y - 2z + 5a = 0$$
$$2x + y - z - 2a = 0.$$

3. Echilibrul sistemelor mecanice

3.1. CARACTERIZAREA GEOMETRICĂ A MODELELOR MECANICE DE BAZĂ

Studiul sistemelor mecanice are ca scop determinarea mărimilor de natură geometrică care precizează poziția (configurația) sistemului și a unor mărimi mecanice care se referă la starea acestuia.

Din punct de vedere geometric, un sistem mecanic este caracterizat prin gradele sale de libertate adică prin numărul parametrilor independenți necesari pentru a defini configurația sistemului. Astfel, poziția unui punct material P în spațiu este complet determinată dacă sînt cunoscute coordonatele sale x_P, y_P, z_P, într-un sistem de axe, așa cum se arată în fig. 3.1, *a*. Aceasta înseamnă că un astfel de punct prezintă trei grade de libertate. Modul de alegere și natura acestor parametri nu sînt unice dar pentru un același sistem numărul lor este invariabil. Un exemplu este arătat în fig. 3.1, *b*, *c* unde de această dată poziția punctului P este stabilită fie prin mărimile geometrice θ_P, ρ_P, z_P, fie prin θ_P, φ_P, ρ_P. Este evident că se pot stabili relații de trecere de la un grup de coordonate la alt grup, ceea ce înseamnă că, din cele nouă mărimi geometrice arătate în fig. 3.1, *a*, *b*, *c*, numai trei sînt independente, celelalte șase determinîndu-se din acestea prin relații liniare.

Un punct material se spune că este liber dacă, din punct de vedere geometric, el poate ocupa orice poziție. Dacă punctul material este obligat să respecte anumite condiții geometrice, ceea ce înseamnă că i se impun restricții

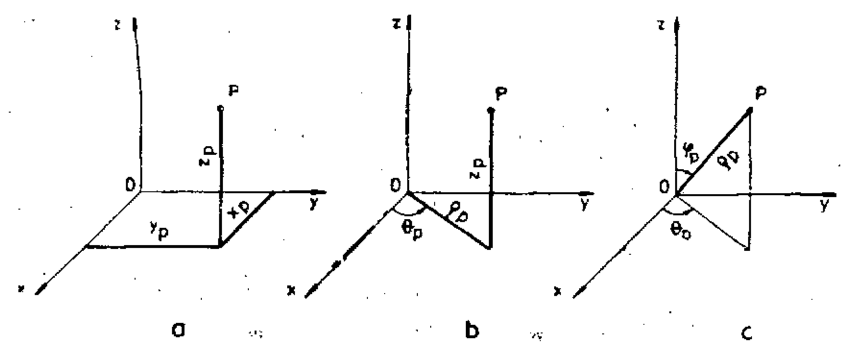


Fig. 3.1.

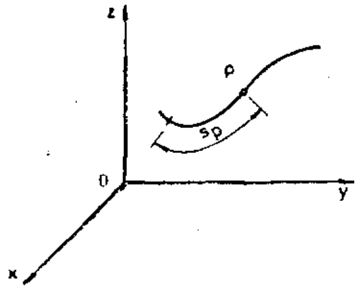


Fig. 3.2.

de această natură, se spune că punctul material este cu legături. Din această categorie face parte, de exemplu, un punct obligat să rămînă pe o suprafață sau pe o curbă. În aceste cazuri, coordonatele punctului trebuie să satisfacă ecuația suprafeței, adică o relație de forma $f(x, y, z) = 0$, respectiv ecuațiile curbei și anume $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$. *Constringerile geometrice impuse punctului material se numesc legături*, iar exprimarea analitică a acestor restricții se realizează prin relații de legătură.

Fiecare condiție impusă poziției punctului material, exprimată printr-o relație de legătură, reduce numărul gradelor de libertate cu o unitate. Astfel, un punct material situat pe o curbă prezintă un singur grad de libertate, și anume coordonata curbilinie s_p (fig. 3.2), celelalte două grade de libertate fiind anulate prin ecuațiile curbei.

În domeniul ingineriei de construcții prezintă interes practic clasificarea legăturilor după următoarele două criterii:

a) sensul în care se manifestă restricția geometrică, din acest punct de vedere existînd:

— legături *bilaterale*, care funcționează în ambele sensuri, ca de exemplu, o bilă plasată între două suprafețe plane, paralele, reprezentînd un punct material situat într-un plan (fig. 3.3, *a*);

— legături *unilaterale*, acestea manifestîndu-se într-un singur sens, cum este cazul unei bile suspendate cu un fir, situație în care bila este obligată să rămînă pe cercul determinat de lungimea firului numai dacă firul este efectiv întins (fig. 3.3, *b*).

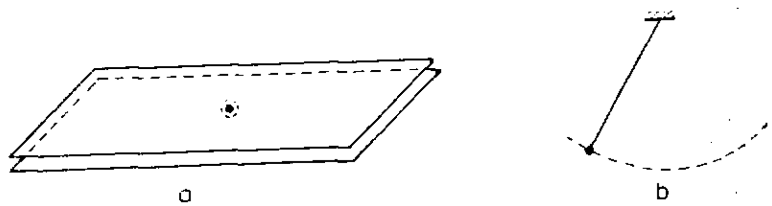


Fig. 3.3.

b) natura legăturilor, și anume:

— legături *ideale* sau *lucii*, la care forțele de frecare sînt neglijabile ca efect mecanic;

— legături *reale* sau cu *frecare*, la care forțele de frecare modifică semnificativ fenomenul mecanic și ca atare acestea urmează să fie considerate în calcule.

În cazul sistemelor de puncte materiale pot exista atît legături interioare, între punctele materiale care alcătuiesc sistemul, cît și legături exterioare între sistemul analizat și alte sisteme (corpuri).

În mod similar cu cele prezentate în legătură cu poziția unui punct material, se definește noțiunea de grade de libertate în cazul unui corp rigid. Astfel, pentru cunoașterea poziției în spațiu a unui corp rigid este suficientă precizarea poziției a trei puncte P_1, P_2, P_3 necoliniare ale sale, deci în total sînt necesare nouă coordonate (x_i, y_i, z_i, $i = 1, 2, 3$). Avînd însă în vedere

că distanțele dintre cele trei puncte sînt invariabile, deoarece corpul este rigid, cele nouă coordonate nu sînt independente, ele trebuind să satisfacă trei relații de forma

$$d_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2};\ i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \tag{3.1}$$

ceea ce conduce la constatarea că un corp rigid liber în spațiu are șase grade de libertate.

În cazul particular cînd unui punct material i se impune să rămînă într-un *plan* această restricție se *manifestă ca o legătură simplă și gradul de libertate* se micșorează cu o unitate. În consecință, un corp care se mișcă într-un plan va dispune numai de trei grade de libertate iar punctul material numai de două.

Se notează:

G_l° — numărul gradelor de libertate ale unui punct material liber sau ale unui corp rigid liber;

l_s — numărul legăturilor simple;

G_l — *numărul gradelor de libertate efective.*

S-a arătat că există relația

$$G_l = G_l^\circ - l_s \tag{3.2}$$

în care G_l° are valorile din tabelul 3.1.

Relația (3.2) și elementele din tabelul 3.1 servesc pentru caracterizarea sistemelor mecanice complexe, alcătuite din puncte materiale și/sau corpuri rigide, la care apar legături atît interioare cît și exterioare.

Tabelul 3.1

Gradele de libertate ale modelelor mecanice de bază

Modelul mecanic	Grade de libertate G_l°	
	Spațiu	Plan
Punct material	3	2
Corp rigid	6	3

3.2. ECHILIBRUL CORPULUI RIGID LIBER

Așa cum s-a arătat în paragraful precedent, un rigid liber poate ocupa din punct de vedere geometric orice poziție în spațiu, poziția sa efectivă fiind determinată exclusiv de sistemul de forțe care se aplică asupra lui.

Problemele *echilibrului corpului rigid liber* se încadrează într-unul din următoarele aspecte:

a) se cunosc forțele care acționează asupra rigidului și se cere să se precizeze poziția sa de echilibru, adică să se determine totalitatea parametrilor corespunzători gradelor de libertate;

b) se dau o parte din parametrii de poziție iar sistemul de forțe este cunoscut doar parțial, cerîndu-se să se determine restul parametrilor de poziție iar sistemul de forțe să fie complet determinat;

c) poziția rigidului este complet precizată urmînd să se determine sistemul de forțe care conduce la această poziție de echilibru.

În primul caz problema are, în general, o soluție unică; în celelalte două situații sînt posibile mai multe soluții și aceasta deoarece orice sistem de forțe poate fi înlocuit cu un alt sistem echivalent cu sistemul inițial; rezultă deci *că, în vederea obținerii unei soluții unice sînt necesare condiții suplimentare.*

Rezolvarea problemelor menționate mai înainte se bazează pe exprimarea condiției ca un sistem de forțe să fie în echilibru, adică să fie echivalent cu zero, şi anume ca ambii vectori ai torsorului de reducere să fie nuli

$$\bar{R} = 0 \; ; \; \bar{M}_0 = 0. \tag{3.3}$$

Condiția de echilibru (3.3) este necesară și suficientă deoarece, dacă vectorii torsorului de reducere în punctul O sînt nuli, ei își păstrează aceste valori în oricare alt punct al spațiului.

Avînd în vedere relațiile (2.11) și (2.12) condițiile vectoriale (3.3) conduc la următoarele șase ecuații scalare de bază, ele fiind liniar independente

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \qquad \Sigma Y_i = 0 \; ; \qquad \Sigma Z_i = 0 \; ; \tag{3.4}$$

$$\Sigma M_{xi} = 0 \; ; \qquad \Sigma M_{yi} = 0 \; ; \qquad \Sigma M_{zi} = 0. \tag{3.5}$$

Se face observația că numărul ecuațiilor scalare de echilibru pentru un corp rigid, așa cum rezultă din ecuațiile (3.4) și (3.5), este egal cu cel al gradelor de libertate pe care le prezintă corpul liber în spațiu.

Ecuațiile scalare de echilibru pot fi exprimate și sub altă formă și anume una, două sau toate cele trei ecuații de proiecții (3.4) înlocuindu-se prin ecuații de momente în raport cu alte axe decît ecuațiile (3.5). În acest caz este necesar să se analizeze în ce condiții cele șase ecuații obținute sînt independente. Alegerea modalității practice de exprimare a echilibrului se face în funcție de particularitățile fiecărei probleme concrete, astfel încît volumul calculelor să fie cît mai redus.

Dacă asupra corpului rigid sînt aplicate sisteme particulare de forțe, numărul ecuațiilor scalare de echilibru se reduce în mod corespunzător.

Astfel, în cazul forțelor concurente, pe baza relațiilor (2.32) condițiile vectoriale (3.3) conduc la trei ecuații scalare de echilibru. Într-adevăr, alegînd sistemul de axe așa fel ca forțele să fie conținute în planul xOy se obțin condițiile

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \qquad \Sigma Y_i = 0 \; ; \qquad \Sigma M_{zi} = 0. \tag{3.6}$$

Se observă că ecuația de momente în raport cu axa Oz se interpretează ca fiind ecuație de momente în raport cu un punct și anume cu originea sistemului de axe. Această ecuație poate fi înlocuită printr-o ecuație de momente în raport cu oricare alt punct din planul forțelor.

Ca și la forțe în spațiu, una sau ambele ecuații de proiecții se pot înlocui prin ecuații de momente în raport cu puncte situate în planul xOy.

În concluzie, rezultă că în cazul forțelor coplanare, cele trei condiții de echilibru se exprimă într-una din următoarele variante:

a) forma de bază, dată de relațiile (3.6), cele trei ecuații rezultînd independente;

b) o ecuație de proiecție pe o direcție coplanară cu forțele și două ecuații de momente în raport cu două puncte din același plan. Pentru ca ecuațiile să fie independente este necesar ca dreapta determinată de cele două puncte să nu fie normală pe direcția proiecțiilor.

c) trei ecuații de momente în raport cu trei puncte coplanare cu forțele și necoliniare.

Alegerea uneia din cele trei variante de exprimare a echilibrului este determinată de particularitățile sistemului de forțe, scopul urmărit fiind acela de a obține relații cît mai simplu de exprimat.

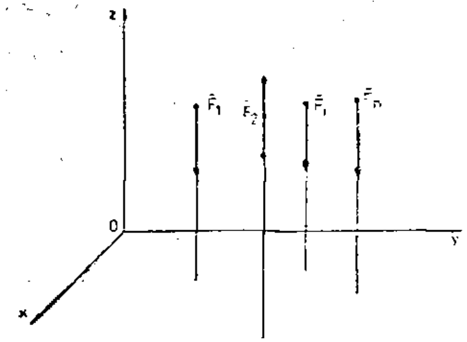


Fig. 3.4.

În cazul sistemelor de forțe paralele, dacă se alege axa Oz cu aceeași direcție cu cea a forțelor (fig. 3.4), atunci trei din cele șase condiții (3.4), (3.5) sînt identic satisfăcute și anume $\Sigma X_i = 0$, $\Sigma Y_i = 0$, $\Sigma M_{zi} = 0$, echilibrul fiind deci condiționat de satisfacerea celorlalte trei ecuații, adică:

$$\Sigma Z_i = 0 \; ; \qquad \Sigma M_{xi} = 0 \; ; \qquad \Sigma M_{yi} = 0. \tag{3.7}$$

Este posibilă și altă variantă de exprimare a echilibrului, și anume prin ecuații de momente în raport cu trei axe, cu restricția că aceste axe nu trebuie să fie nici concurente în același punct și nici paralele.

Un sistem particular îl reprezintă, de asemenea, forțele concurente, situație în care condiția vectorială de echilibru se reduce la $\bar{R} = 0$, ceea ce conduce la trei condiții scalare, și anume:

$$\Sigma X_i = 0 \; ; \qquad \Sigma Y_i = 0 \; ; \qquad \Sigma Z_i = 0. \tag{3.8}$$

În tabelul 3.2 este prezentată sinteza condițiilor de echilibru în cazul unui corp liber.

3.3. ECHILIBRUL CORPULUI RIGID CU LEGĂTURI

În paragraful precedent s-a analizat echilibrul corpului rigid liber, stabilindu-se condițiile în care un sistem de forțe aplicat asupra unui astfel de corp constituie un sistem echivalent cu zero. În practică însă, elementele de construcție și construcțiile în ansamblul lor, modelate drept corpuri rigide, nu sînt izolate și ca atare nu sînt libere. Elementele de construcție sînt legate între ele astfel încît să formeze, în general, un ansamblu invariabil, iar construcțiile sînt fixate la o bază de rezemare. Astfel, o grindă de pod este susținută în anumite puncte ale ei pe suporți care, la rîndul lor, se sprijină pe teren (fig. 3.5) Legătura dintre grindă și suporți se realizează constructiv astfel încît deplasările relative să fie parțial sau total împiedicate. Analizată izolat, grinda nu mai este un corp liber deoarece poziției sale i se impun constrîngeri geometrice în punctele de rezemare, puncte în care apar interacțiuni

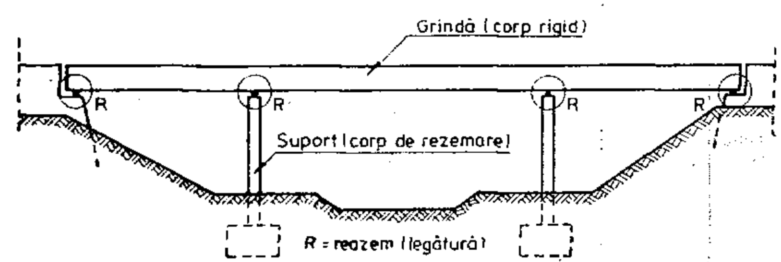


Fig. 3.5.

Tabelul 3.2

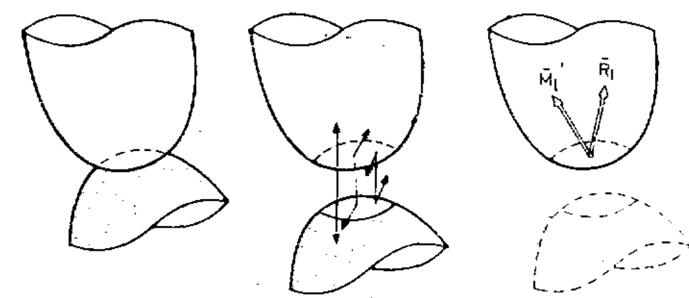
Condițiile de echilibru al sistemelor de forțe

Sistemul de forțe	Nr. ecuațiilor de echilibru	Forma de bază a condițiilor de echilibru	Varianta de exprimare a condițiilor de echilibru
Forțe oarecare în spațiu	6	3 ecuații de proiecții pe trei direcții oarecare; 3 ecuații de momente în raport cu 3 axe oarecare	a) 2 ecuații de proiecții pe 2 axe; 4 ecuații pe momente în raport cu 4 axe b) 1 ecuație de proiecție pe o axă; 5 ecuații de momente în raport cu 5 axe c) 6 ecuații de momente în raport cu 6 axe Obs. Cele șase ecuații trebuie să fie liniar independente
Forțe coplanare oarecare	3	2 ecuații de proiecții pe două direcții distincte coplanare cu forțele; 1 ecuație de moment în raport cu un punct din planul forțelor	a) 1 ecuație de proiecție pe o axă coplanară cu forțele: 2 ecuații de momente în raport cu două puncte din planul forțelor Dreapta care unește cele două puncte să nu fie perpendiculară pe axa de proiecție b) 3 ecuații de momente în raport cu 3 puncte care să nu fie coliniare
Forțe paralele a) în spațiu	3	1 ecuație de proiecții pe o direcție paralelă cu forțele; 2 ecuații de moment în raport cu două axe care nu sînt paralele cu forțele	a) 3 ecuații de momente în raport cu 3 axe care nu sînt nici concurente în același punct și nici paralele
b) în plan	2	1 ecuație de proiecție pe o direcție din planul forțelor fără a fi perpendiculară pe direcția forțelor; 1 ecuație de moment în raport cu un punct din planul forțelor	a) 2 ecuații de momente în raport cu două puncte din planul forțelor cu condiția ca dreapta determinată de aceste puncte să nu fie paralelă cu forțele
Forțe concurente a) în spațiu	3	3 ecuații de proiecție pe trei axe oarecare	
b) în plan	2	2 ecuații de proiecții pe două axe oarecare din planul forțelor	

mecanice. Legătura în aceste puncte se realizează prin intermediul unor elemente speciale numite aparate de reazem a căror descriere în detaliu se face la disciplinele de specialitate. Din punctul de vedere al problemelor Mecanicii construcțiilor se va considera că aparatul de rezemare face parte din corpul de rezemare care va fi, în continuare, numit reazem.

3.3.1. TIPURI DE REAZEME. FORȚE DE LEGĂTURĂ

Se constată că *legătura dintre un corp și reazemul său se realizează pe o anumită zonă de contact* (fig. 3.6, *a*). În fiecare punct al zonei de contact se dezvoltă forțe elementare de legătură, egale și direct opuse (fig. 3.6, *b*), ansamblul lor alcătuind două sisteme de forțe de legătură, fiecare sistem repartizat pe cîte unul din cele două corpuri. Distribuția forțelor elementare de contact depinde de numeroși factori fizici, dar în mecanică, pentru simplificare, se are în vedere doar efectul global al forțelor de legătură. În acest scop, se reduc forțele în punctul teoretic de rezemare obținîndu-se torsorul forțelor de legătură alcătuit din vectorii $\bar{R}_l$ și $\bar{M}_l$ (fig. 3.6, *c*).



a b c

Fig. 3.6.

În cazul cel mai general, deplasarea unui punct al rigidului este caracterizată prin doi vectori, și anume o translație $\bar{\delta}$ și o rotire $\bar{\theta}$. Dacă se utilizează un sistem de axe, cei doi vectori pot fi exprimați prin componentele lor sub forma

$$\bar{\delta} = \delta_x\bar{i} + \delta_y\bar{j} + \delta_z\bar{k} \tag{3.9a}$$

$$\bar{\theta} = \theta_x\bar{i} + \theta_y\bar{j} + \theta_z\bar{k}. \tag{3.9b}$$

Fiecare dintre cele șase componente din relațiile (3.9 a, b) reprezintă o deplasare simplă, definind deci o deplasare (translație sau rotire) după o singură direcție.

În concordanță cu realizarea lor constructivă, reazemele au rolul de a împiedica (bloca) una sau mai multe deplasări simple, exercitînd astfel constringeri geometrice asupra poziției corpului. Efectul de anulare a unei deplasări simple se numește legătură simplă. Rezultă deci că, în ceea ce privește tipurile de reazeme, există o multitudine de posibilități de realizare în funcție de numărul și natura deplasărilor simple pe care le suprimă sau, altfel spus, al legăturilor simple pe care le introduce. Totuși, în practica curentă a ingineriei de construcții sînt utilizate numai cîteva tipuri de reazeme.

Pentru a examina echilibrul corpului cu legături este necesar ca acesta să fie adus în situația corpului liber ale cărui condiții de echilibru au forma

(3.4). (3.5). Aceasta este posibil pe baza axiomei legăturilor care are următorul enunț: *orice legătură poate fi suprimată cu condiția introducerii efectului său mecanic care constă dintr-o forță de legătură corespunzătoare.* Rezultă deci că, pe direcția unei legături simple care anulează o translație, se dezvoltă o forță de legătură de tip forță concentrată iar pe direcția unei legături simple care împiedică o rotire apare o forță de legătură de tip moment concentrat. Astfel, legătura completă a corpului cu reazemul său (fig. 3.6, *a*) presupune deci $\bar{\delta} = 0$, $\bar{\theta} = 0$ și conduce la forțele de legătură $\bar{R}_l$ și $\bar{M}_l$ reprezentate în figura 3.6, *c*.

Pentru reprezentarea diverselor tipuri de reazeme se folosesc schematizări care pun în evidență restricțiile geometrice (legăturile) pe care aceste reazeme le manifestă asupra corpului. În general, la schematizare se utilizează bare drepte, dublu articulate, indeformabile (penduli), grupate astfel încît să realizeze restricțiile geometrice specifice fiecărui tip de reazeme.

În continuare, sînt prezentate tipurile uzuale de reazeme, atît pentru problemele spațiale cît și pentru cele plane.

Probleme spațiale. În acest caz se examinează:

— *Reazemul simplu*, care constă din rezemarea corpului într-un singur punct (fig. 3.7, *a*). În acest fel, orice translație a punctului de reazem, conținută în planul tangent la suprafața corpului, este posibilă. Este permisă, de asemenea, rotirea $\bar{\theta}$ în raport cu orice axă care trece prin punctul de reazem. Rezultă deci că, din totalul celor șase deplasări simple distincte, puse în evidență în relațiile (3.9 a, b), este blocată o singură componentă, și anume translația după direcția normală la suprafața corpului în punctul de rezemare. O modalitate de materializare constructivă a reazemului simplu constă dintr-o sferă de dimensiuni relativ mici interpusă între corp și baza sa de sprijinire. Schematizarea reazemului se reprezintă ca în fig. 3.7, *b* în care legătura simplă este realizată printr-o bară dreaptă orientată după direcția deplasării blocate.

În conformitate cu axioma legăturilor, suprimarea reazemului impune deci introducerea unei forțe de legătură de tip forță concentrată al cărui suport este dat de pendulul din fig. 3.7, *b*. Din punct de vedere static reazemul simplu prezintă o singură necunoscută, și anume mărimea forței de legătură (fig. 3.7, *c*).

— *Reazemul articulat sau articulația* împiedică în totalitate translația punctului de reazem ($\bar{\delta} = 0$), astfel că acest tip de reazem conține trei legături simple, așa cum rezultă din expresia (3.9 a). Reazemul permite rotiri în raport

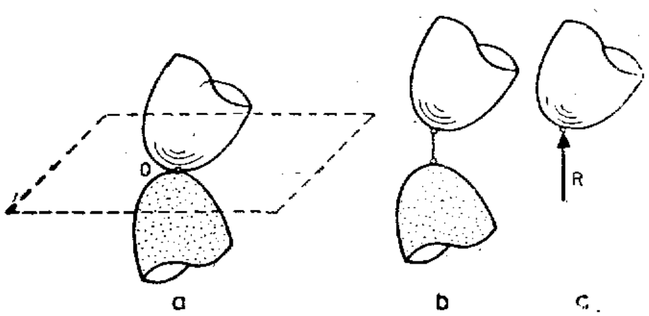


Fig. 3.7.

cu oricare axă aparținînd familiei de drepte care trec prin reazem. Un exemplu de realizare constructivă a unui reazem articulat este prezentat în fig. 3.8. Legătura dintre corp și reazem este asigurată printr-o sferă care pătrunde în două cavități — de asemenea sferice — practicate atît în corpul examinat cît și în reazem. Schematizarea reazemului se face fie prin trei penduli concurenți în punctul teoretic de rezemare și care au o dispunere spațială ca în fig. 3.9, *a*, fie ca în fig. 3.9, *b*.

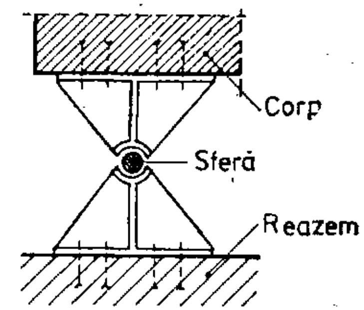


Fig. 3.8.

Forța de legătură corespunzătoare reazemului articulat constă dintr-o forță concentrată care trece prin articulație, avînd deci mărimea și direcția necunoscute (R, α, β din fig. 3.9, *c*). O altă modalitate de reprezentare a forței de legătură are în vedere precizarea acesteia prin componentele sale pe trei axe distincte (X_R, Y_R, Z_R). În ambele variante reazemul articulat introduce trei necunoscute statice (scalare).

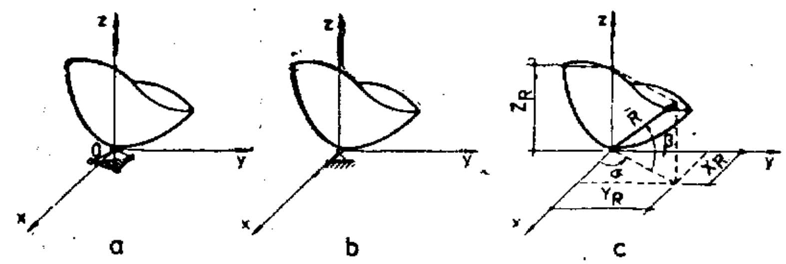


Fig. 3.9.

— *Articulația cilindrică* este arătată în fig. 3.10 și se compune dintr-un manșon solidar cu corpul în interiorul căruia glisează o bară cilindrică atașată reazemului. Din modul de realizare a reazemului se observă că sînt permise două deplasări simple, și anume translația în lungul barei și rotirea în jurul acesteia. Atașînd reazemului un sistem de axe, se pot identifica deplasările simple blocate (nule) care sînt: δ_y, δ_z, θ_y, θ_z. Schematizarea reazemului este alcătuită din patru penduli în grupe de cîte doi penduli concurenți, determinînd plane perpendiculare pe direcția comună a barei și manșonului (fig. 3.11, a). Cele patru legături simple conduc la patru necunoscute statice: componentele Y_R, Z_R ale reacțiunii forță $\bar{R}$ și respectiv M_y, M_z, componentele reacțiunii

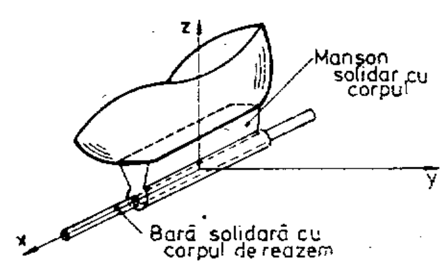


Fig. 3.10.

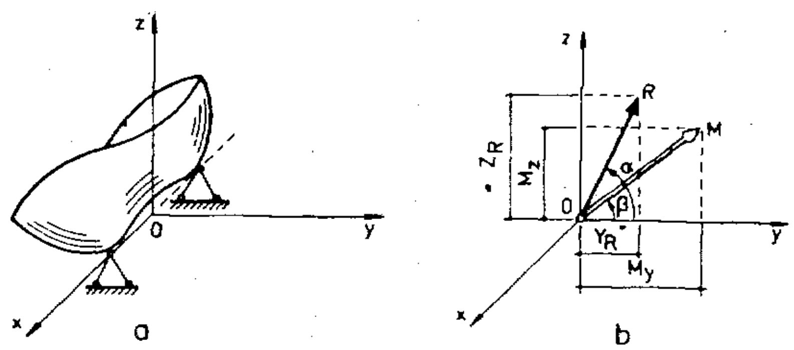


Fig. 3.11.

moment $\bar{M}$ (fig. 3.11, *b*), vectorii $\bar{R}$ şi $\bar{M}$ fiind conţinuţi în planul yOz. În locul acestora se poate considera grupul echivalent de necunoscute R, M, α, β, adică mărimea şi direcţia fiecăruia dintre cei doi vectori $\bar{R}$ şi $\bar{M}$.

— *Reazemul încastrat* sau încastrarea se realizează atunci cînd corpul este complet fixat de reazem şi ca urmare toate deplasările punctului de rezemare sînt blocate ($\bar{\delta} = 0$, $\bar{\theta} = 0$), aşa cum se prezintă situaţia din fig. 3.6, *a*. Reazemul încastrat introduce deci şase legături simple, corespunzătoare celor şase componente ale deplasărilor din expresiile (3.9 a, b). Schematizarea grafică se obişnuieşte să se reprezinte ca în fig. 3.12, *a*, deoarece schematizarea prin şase penduli este mai complicată.

Necunoscutele statice scalare (forţe de legătură simple) sînt date de cele şase componente ale vectorilor reacţiunii $\bar{R}$ şi $\bar{M}$, aceştia avînd o orientare oarecare în spaţiu (fig. 3.12, *b*).

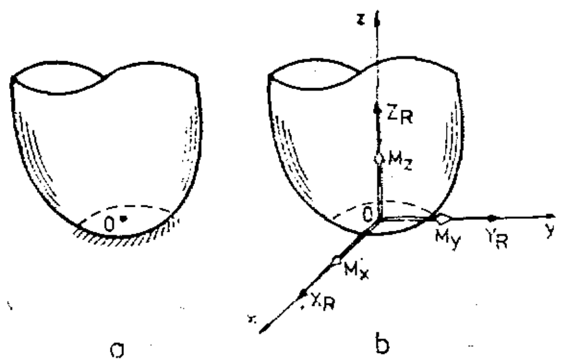


Fig. 3.12.

Probleme plane. Aşa cum s-a arătat, un corp în plan fără legături dispune de trei grade de libertate, poziţia sa fiind complet precizată prin cunoaşterea a trei parametri geometrici. Altfel exprimat, deplasarea unui astfel de corp este caracterizată prin două componente simple de tip translaţie şi o deplasare simplă de tip rotire, corpul rămînînd în permanenţă în acelaşi plan. În această situaţie, reazemele (legăturile) corpului sînt aşa fel alcătuite încît să blocheze una, două sau toate cele trei deplasări simple.

— *Reazemul simplu (reazemul mobil)* sprijină corpul astfel încît sînt permise două deplasări simple: translaţia în lungul tangentei din punctul de contact şi rotirea în jurul acestui punct. Este împiedicată translaţia după

direcţia normalei fiind deci anulat un singur grad de libertate (fig. 3.13, *a*). Materializarea constructivă a reazemului mobil este foarte variată şi depinde, în principal, de mărimea forţei de legătură şi de materialul din care este realizat. În fig. 3.13, *b*, *c* sînt arătate două modalităţi de alcătuire, şi anume cînd se utilizează oţelul, respectiv betonul armat, precizîndu-se prin linii întrerupte deplasările permise de fiecare reazem.

Schematizarea grafică simplificată se face fie printr-un pendul care indică deplasarea simplă blocată, ca în fig. 3.14, *a*, fie ca în fig. 3.14, *b*. Suprimarea legăturii impune introducerea unei reacţiuni forţă, cu suportul precizat de axa pendulului şi cu mărimea necunoscută R_0 (fig. 3.14, *c*) ceea ce înseamnă că reazemul mobil introduce o singură necunoscută statică.

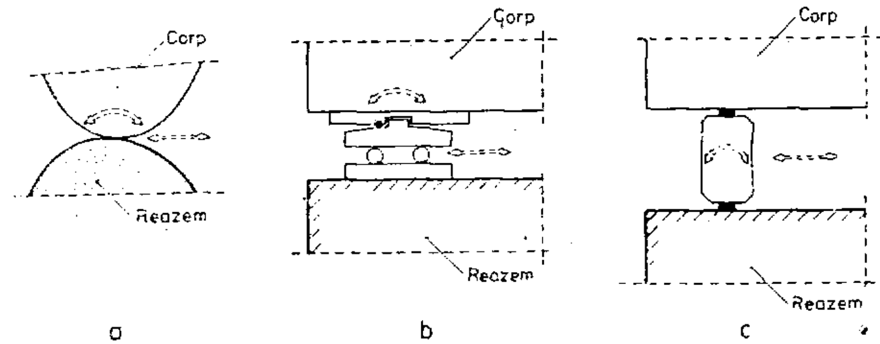


Fig. 3.13.

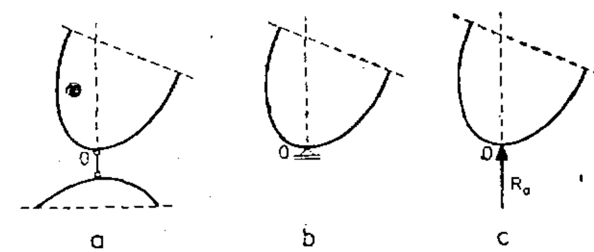


Fig. 3.14.

— *Reazemul articulat (reazemul fix sau articulaţia)* blochează ambele componente ale translaţiei punctului teoretic de reazem, permiţînd deci rotiri ale corpului în jurul acestui punct. Articulaţia anulează două grade de libertate deoarece prezintă două legături simple. Pentru schematizare se pot utiliza doi penduli concurenţi în punctul teoretic de rezemare (fig. 3.15, *a*). Se obişnuieşte însă ca reprezentarea unui reazem articulat să se facă ca în fig. 3.15, *b*.

Reacţiunea constă dintr-o forţă care trece prin punctul teoretic de rezemare şi care are valoarea şi direcţia necunoscute (fig. 3.16, *a*). În locul acestora

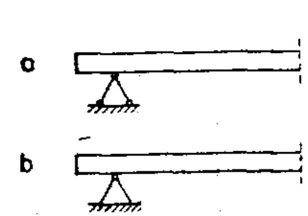


Fig. 3.15.

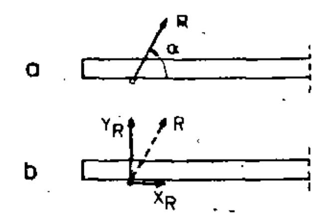


Fig. 3.16.

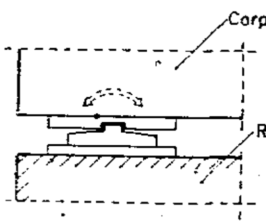


Fig. 3.17.

se pot introduce alte necunoscute, și anume componentele reacțiunii pe două axe, de regulă ortogonale (fig. 3.16, *b*).

Un exemplu de realizare constructivă a unui reazem articulat (fix) este cel din fig. 3.17 în care este pusă în evidență deplasarea simplă permisă de reazem.

— *Articulația cilindrică plană* prezintă două legături simple astfel dispuse încît împiedică o componentă a translației și rotirea. Schematizarea constă din doi penduli paraleli foarte apropiați, dar distincți, dirijați după normala la direcția translației posibile (fig. 3.18, *a*). Cele două necunoscute statice sînt reprezentate de o reacțiune forță R cu direcție comună cu cea a pendulilor și o reacțiune moment M.

— *Încastrarea* suprimă orice posibilitate de deplasare anulînd toate cele trei grade de libertate ale punctului de rezemare și deci ale întregului corp. Încastrarea asigură continuitatea corpului cu reazemul său, așa cum se vede în fig. 3.19, *a*. Schematizarea reazemului se face fie ca în fig. 3.19, *b*, unde sînt puse în evidență cele trei legături simple pe care le conține încastrarea, fie ca în fig. 3.19, *c*, unde se indică blocarea totală a secțiunii de încastrare. Forțele de legătură corespunzătoare celor trei legături create de reazem sînt arătate în fig. 3.19, *d*. Un reazem încastrat introduce deci trei necunoscute statice scalare.

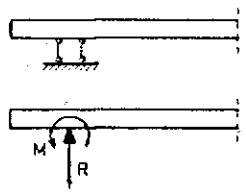


Fig. 3.18.

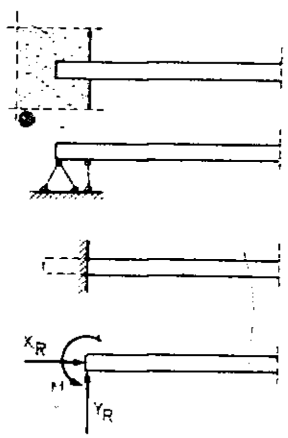
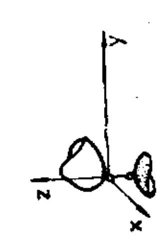
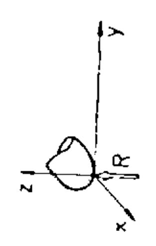
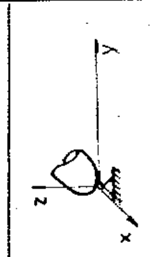
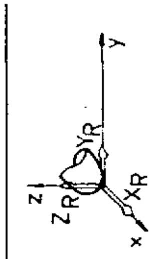
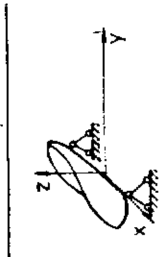
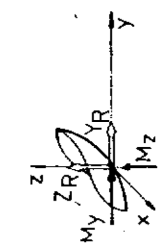
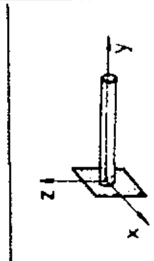
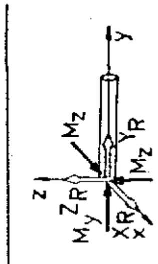


Fig. 3.19.

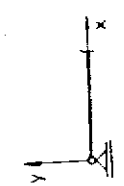
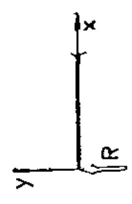
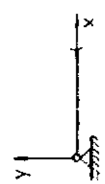
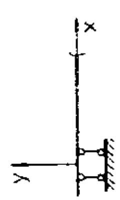
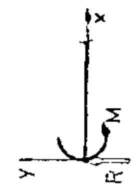
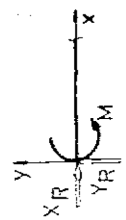
În calculul automat al structurilor condițiile de rezemare se descriu sub o formă codificată. Astfel, avînd în vedere expresiile (3.9 a, b), codul cinematic al unui reazem este compus din șase cifre, zero sau unu, care precizează, în ordine, gradele de libertate corespunzătoare celor șase deplasări simple raportate la un sistem de coordonate cartezian. Cifra zero semnifică existența gradului de libertate după direcția corespunzătoare poziției pe care cifra o ocupă în cadrul codului, iar cifra unu indică prezența unei legături simple și ca atare blocarea gradului de libertate respectiv. Utilizînd această codificare, tabelul 3.3 conține sub formă sistematizată tipurile de reazeme, în spațiu și în plan, precizîndu-se atît caracteristicile lor cinematice cît și numărul și natura forțelor de legătură.

Tabelul 3.3

Tipuri de reazeme

Tipul de reazem	Schematizare	Codul cinematic						Numărul de legături simple l_s	Necunoscute	
		δ_x	δ_y	δ_z	θ_x	θ_y	θ_z		Număr	Tip
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Probleme spațiale										
Reazem simplu		0	0	1	0	0	0	1	1	
Reazem articulat		1	1	1	0	0	0	3	3	
Reazem articulat cilindric		0	1	1	0	1	1	4	4	
Reazem încastrat		1	1	1	1	1	1	6	6	

Tabelul 3.3 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Probleme plane										
Reazem simplu (mobil)		0	1	—	—	—	0	1	1	
Reazem articulat (fix)		1	1	—	—	—	0	2	2	
Reazem articulat cilindric		0	1	—	—	—	1	2	2	
Reazem încastrat		1	1	—	—	—	1	3	3	

3.3.2. FIXAREA CU REAZEME A RIGIDULUI. CARACTERIZAREA STATICĂ

Un rigid este fixat, adică are o poziție invariabilă, independentă de sistemul de forțe aplicat asupra sa, dacă toate gradele sale de libertate sînt complet și efectiv anulate (blocate) cu legături.

Problema fixării prin rezemare a unui rigid prezintă două aspecte, și anume:

— aspectul cantitativ se referă la numărul minim al legăturilor, create prin reazeme, necesar pentru fixare;

— aspectul calitativ are în vedere dispunerea legăturilor astfel încît rigidul să prezinte o poziție efectiv invariabilă.

Din punct de vedere cantitativ, numărul minim al legăturilor simple trebuie să fie egal cu cel al gradelor de libertate pe care le prezintă rigidul liber (v. tabelul 3.1), fiind deci șase pentru probleme spațiale și trei pentru probleme plane. Asigurarea acestui număr se realizează prin combinații ale tipurilor de reazeme prezentate în tabelul 3.3. Se observă că un reazem încastrat este suficient pentru fixarea completă a unui corp, atît în spațiu cît și în plan.

Grupările de reazeme care asigură fixarea unui corp cu un număr minim de legături sînt prezentate în tabelul 3.4.

Tabelul 3.4

Fixarea cu reazeme a unui rigid

Tipul problemei	Cazul de rezemare	Numărul minim al reazemelor				Observații
		Reazem simplu	Reazem articulat	Articulație cilindrică	Încastrare	
Plană	I	3	—	—	—	Analiza calitativă a dispunerii
	II	1	1	—	—	
	III	—	—	1	—	Fără restricție
Spațială	I	6	—	—	—	Analiza calitativă a dispunerii
	II	3	1	—	—	
	III	2	—	1	—	
	IV	—	—	—	1	Fără restricție

Condiția cantitativă, referitoare la numărul minim de legături are un caracter necesar, nu însă și suficient. Pentru ca un corp să aibă asigurată o strictă invariabilitate geometrică se impune o dispunere judicioasă a legăturilor în așa fel încît corpul să fie efectiv fixat. Cunoscîndu-se tipurile de reazeme precum și numărul de legături simple pe care le prezintă fiecare din acestea, se pot analiza condițiile de fixare ale unui corp atît în plan cît și în spațiu.

Examinarea echilibrului unui rigid cu legături se bazează pe axioma legăturilor potrivit căreia orice legătură poate fi suprimată (înlăturată) cu condiția introducerii forței de legătură corespunzătoare. Procedînd în acest fel cu toate

reazemele rigidului, acesta devine liber şi ca atare sînt aplicabile condiţiile de echilibru (3.3). Necunoscutele problemei sînt, în acest caz, forţele de legătură introduse în conformitate cu cele prezentate în tabelul 3.3.

Pentru ca soluţia problemei să fie unică şi finită este necesar ca numărul ecuaţiilor de echilibru să fie egal cu cel al necunoscutelor iar determinantul sistemului să fie diferit de zero. O astfel de situaţie este *static determinată* deoarece ecuaţiile de echilibru static (3.3) sînt suficiente pentru determinarea necunoscutelor problemei. Este evident că, orice legătură introdusă în plus faţă de numărul minim conduce la creşterea numărului de necunoscute, în timp ce numărul ecuaţiilor se menţine acelaşi. În acest caz, forţele de legătură nu pot fi calculate, problema fiind *static nedeterminată.*

Dacă corpul posedă numărul minim de legături necesare invariabilităţii geometrice, dar dispunerea acestora este defectuoasă şi ca atare el nu este efectiv fixat, se spune că rigidul prezintă legături critice, constituind un sistem critic simplu. În general, pentru ca un corp în spaţiu să aibă asigurată o strictă invariabilitate geometrică este necesar ca cele şase legături simple să fie astfel dispuse încît să nu existe nici o axă în raport cu care momentele forţelor de legătură să fie toate nule.

Se va examina, în continuare, problema fixării corpului în plan, analizîndu-se modalităţile de alegere şi de dispunere a reazemelor.

Cazul 1. Fixarea cu trei reazeme simple. Dispunerea judicioasă a celor trei legături simple este aceea în care aceste legături nu sînt nici concurente în acelaşi punct şi nici paralele, evitîndu-se astfel situaţiile critice prezentate în fig. 3.20, *a*, *b*. La sistemele critice, încărcările oarecare conduc la valori infinite ale forţelor de legătură. Astfel, dacă se consideră încărcarea oarecare P, aplicată asupra rigidului din fig. 3.20, *c*, ecuaţia de echilibru $\Sigma M_k = 0$, conduce la valori infinite ale reacţiunilor R_1, R_2, R_3. De asemenea, se obţin din ecuaţia de proiecţie pe direcţia perpendiculară pe direcţia comună a forţelor de legătură valori infinite ale reacţiunilor corpului din fig. 3.20, *d*. În cazul încărcărilor particulare P_k, aplicate ca în fig. 3.20, *c*, *d*, sistemele devin static nedeterminate, iar reacţiunile nu pot fi calculate. Această situaţie se

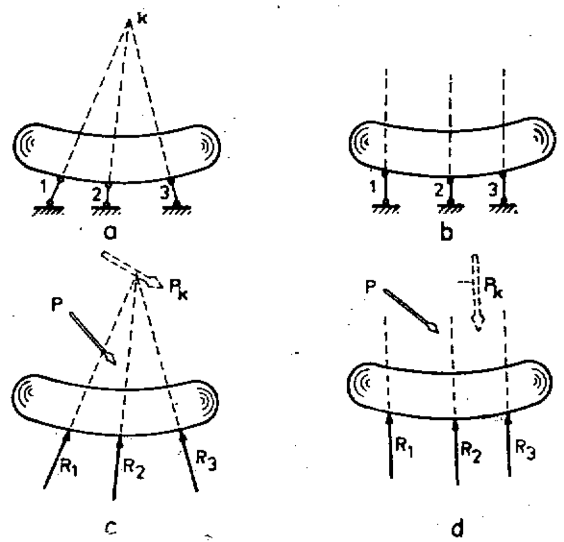


Fig. 3.20.

datoreşte faptului că rigidul este acţionat de forţe concurente (fig. 3.20, *c*) respectiv de forţe paralele (fig. 3.20, *d*), iar ecuaţiile vectoriale de echilibru (3.3) conduc în fiecare caz în parte la numai două condiţii scalare, şi anume de forma 4b, respectiv 3b din tabelul 3.2. Din punct de vedere geometric poziţia corpului nu este strict invariabilă. Astfel, dacă reazemele simple sînt concurente în acelaşi punct (fig. 3.20, *a*), este posibilă rotirea corpului în jurul punctului de concurenţă, k; în cazul cînd reazemele sînt paralele (fig. 3.20, *b*) corpul poate avea o translaţie pe direcţia perpendiculară pe direcţia reazemelor, ambele mişcări fiind compatibile cu legăturile rigidului.

Prin utilizarea schematizării celorlalte reazeme plane prin penduli şi anume, articulaţia (fig. 3.15, *a*), articulaţia cilindrică (fig. 3.18, *a*) şi încastrarea (fig. 3.19, *b*), dispunerea corectă a acestor legături se bazează pe concluziile rezultate din analiza fixării corpului cu trei reazeme simple.

Cazul 2. Fixarea cu un reazem simplu şi unul articulat. Dispunerea corectă a legăturilor este arătată în fig. 3.21, *a*. Sistemul este critic dacă legătura creată de reazemul simplu trece prin reazemul articulat (fig. 3.21, *b*), situaţie în care se regăseşte cazul din fig. 3.20, *a*.

Cazul 3. Fixarea cu un reazem simplu şi o articulaţie cilindrică (fig. 3.22). Cele trei legături simple nu trebuie să fie paralele deoarece această rezemare este similară cu cea din fig. 3.20, *b* şi deci sistemul este critic.

Cazul 4. Fixarea printr-o încastrare. Schematizarea încastrării ca în fig. 3.19, *b* pune în evidenţă faptul că cele trei legături simple nu pot fi nici paralele şi nici concurente, ceea ce conduce la concluzia că un reazem încastrat crează o fixare efectivă a corpului.

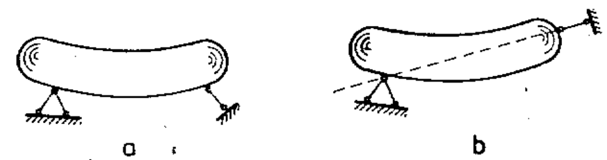


Fig. 3.21.

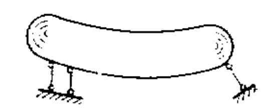


Fig. 3.22.

Fiecare din cele patru modalităţi de fixare a corpului în plan crează o situaţie static determinată. Orice reazem introdus suplimentar face ca rigidul să devină static nedeterminat, numărul de necunoscute statice depăşind deci numărul ecuaţiilor de echilibru.

Se numeşte *grad de nedeterminare* statică al unui sistem mecanic diferenţa dintre numărul necunoscutelor forţe de legătură şi cel al ecuaţiilor de echilibru static.

Se notează:

G_{ns} — gradul de nedeterminare statică;
E — numărul ecuaţiilor de echilibru;
N — numărul necunoscutelor statice.

Rezultă, conform definiţiei

$$G_{ns} = N - E \tag{3.10}$$

În relaţia (3.10), numărul necunoscutelor este egal cu cel al legăturilor simple ($N = l_s$), specificate pentru fiecare tip de reazem, în tabelul 3.3. În ceea ce priveşte numărul ecuaţiilor de echilibru, acesta este dat în tabelul 3.2 în funcţie de particularităţile sistemului de forţe al cărui echilibru se analizează.

Avînd în vedere caracterizarea geometrică sintetizată prin relația (3.2) și caracterizarea statică exprimată prin relația (3.10), rezultă că $G_{ns} = -G_i$.

În concluzie, modelele mecanice de bază (punctul material și corpul rigid), se pot găsi în una din situațiile prezentate în tabelul 3.5.

Tabelul 3.5

Caracterizarea geometrică și statică a unui rigid

G_i	G_{ns}	Aspectul geometric		Aspectul static		Necunoscute
		Semnificație	Caracterizare	Semnificație	Caracterizare	
>0	<0	$G_i^0 < l_s$	Mecanism	$N < E$	Determinat	Forțe de legătură Parametri de poziție
0	0	$G_i^0 = l_s$	Fixat cu număr minim de legături	$N = E$	Determinat	Forțe de legătură
<0	>0	$G_i^0 < l_s$	Fixat cu surplus de legături	$N > E$	Nedeterminat	Forțe de legătură

Se face observația că, în ceea ce privește solidul rigid, tabelul 3.4 se referă numai la relațiile de natură cantitativă, fixarea efectivă a corpului realizîndu-se printr-o dispunere corectă a legăturilor.

3.3.3. *EXPRIMAREA ECHILIBRULUI*

Examinarea echilibrului corpului rigid se bazează pe axioma legăturilor *în conformitate cu care legăturile se pot suprima cu condiția* introducerii efectelor mecanice ale acestora, și anume a forțelor de legături specificate în tabelul 3.3. În această situație, corpul devine liber, iar asupra lui sînt aplicate două categorii de forțe, și anume:

— forțe active, provenind din acțiunile exterioare;

— forțe de legătură (reacțiuni).

Echilibrul corpului se exprimă sub forma condițiilor vectoriale (3.3), în care, pentru a diferenția cele două categorii de forțe, se fac notațiile:

$\bar{R}_a$, $\bar{M}_{0a}$ — elementele torsorului de reducere al forțelor active;

$\bar{R}_l$, $\bar{M}_{0l}$ — elementele torsorului de reducere al forțelor de legătură.

Cu aceste notații, condițiile generale de echilibru devin

$$\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0$$
$$\bar{M}_{0a} + \bar{M}_{0l} = 0. \tag{3.11}$$

Similar cu cele arătate *în legătură cu condițiile (3.3), ecuațiile* vectoriale (3.11) conțin șase ecuații scalare de forma generală (3.4) și (3.5).

Studiul concret al echilibrului corpului cu legături se efectuează în același mod cu cel al *corpului liber*, cu observația că necunoscutele scalare ale problemei sînt alcătuite, în general, din forțele de legătură și parametrii de poziție, așa cum se precizează în tabelul 3.5.

Algoritmul de rezolvare a problemelor privind echilibrul corpului cu legături conține următoarele etape:

1) Precizarea forțelor active aplicate asupra corpului.

2) Identificarea legăturilor (reazemelor), caracterizarea geometrică și statică (tabelul 3.5).

3) Suprimarea legăturilor și introducerea forțelor de legătură corespunzătoare (tabelul 3.3).

4) Stabilirea necunoscutelor problemei.

5) Alegerea axelor de coordonate și exprimarea condițiilor scalare de echilibru care derivă din relațiile vectoriale (3.11).

6) Rezolvarea sistemului de ecuații algebrice, interpretarea rezultatelor.

Deoarece la suprimarea legăturilor componentele reacțiunilor au fost alese cu sensuri arbitrare, sensurile reale ale acestora se stabilesc în funcție de semnul cu care au rezultat necunoscutele scalare în urma rezolvării sistemului de ecuații. Astfel, necunoscutele pozitive au sensul real identic cu cel ales, iar cele negative au sensul real invers celui atribuit inițial. În cazul *legăturilor cu fire, forța de legătură* din orice fir trebuie să fie de întindere; în caz contrar, legătura respectivă nu se poate manifesta și ca atare la examinarea echilibrului ea se elimină fără a se introduce o forță de legătură.

3.3.4. **FRECAREA ÎN REAZEME**

După cum s-a arătat, legăturile *oricărui corp* — utilizat ca element structural — sînt introduse cu scopul de a fixa corpul și/sau de a-i asigura deplasări *dirijate numai după anumite direcții, în așa fel încît acesta să satisfacă atît* cerințele *funcționale*, cît și criteriile de rezistență, stabilitate și deformabilitate. În paragrafele precedente au fost analizate condițiile de echilibru ale unui corp considerînd că legăturile acestuia au o funcționare teoretic ideală, neglijînd deci o serie de aspecte generate de faptul că legăturile au o materializare concretă, fiind realizate din materiale care au proprietăți fizice bine precizate (deformabilitate, capacitate de rezistență limitată etc.). Dintre fenomenele care apar în cazul reazemelor reale, fenomenul de frecare modifică semnificativ condițiile de echilibru și de aceea, în cele mai multe cazuri, acest fenomen nu poate fi neglijat.

Frecarea în reazemul simplu. În conformitate cu modul de definire a acestui reazem, contactul dintre corp și reazem se realizează *într-un* punct, iar singura deplasare simplă împiedicată este translația acestui punct în direcția normalei la planul tangent comun (v. fig. 3.13). Aceasta înseamnă că echilibrul este posibil numai dacă rezultanta forțelor exterioare $\bar{R}_a$ împreună cu forța de legătură $\bar{R}_0$ (v. fig. 3.14, *c*) formează un sistem echivalent cu zero, adică $\bar{R}_a + \bar{R}_0 = 0$ deci și $\bar{R}_a$ este normală pe planul tangent. În practică, se observă că echilibrul se menține și dacă direcția rezultantei $\bar{R}_a$ diferă de cea a normalei cît timp însă unghiul dintre aceste direcții nu depășește o valoare limită. Acest fenomen este explicat prin faptul că, *în realitate*, datorită deformării, contactul dintre corp și reazem se stabilește nu punctiform ci pe o anumită zonă, în fiecare punct al acestei zone dezvoltîndu-se forțe de legătură, așa cum se arată *în fig. 3.6, b*. Prin reducerea acestor forțe în punctul de contact se obțin elementele torsorului forțelor de legătură, și anume $\bar{R}_l$ și $\bar{M}_l$ (v. fig. 3.6, *c*). Notînd cu $\bar{R}_a$ și $\bar{M}_a$ elementele torsorului de reducere

al forțelor exterioare, echilibrul se realizează dacă sînt satisfăcute relațiile (3.11), adică,

$$\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0\,;\quad \bar{M}_a + \bar{M}_l = 0,$$

situație care este arătată în fig. 3.23.

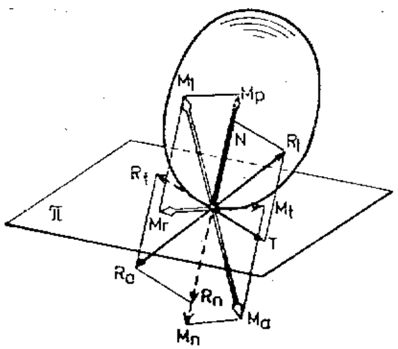


Fig. 3.23.

Pentru a pune în evidență efectele pe care rezemarea reală le are asupra condițiilor de echilibru se descompun vectorii $\bar{R}_a$, $\bar{R}_l$, $\bar{M}_a$, $\bar{M}_l$ în componente normale pe planul tangent și respectiv conținute în acest plan, rezultînd:

$$\bar{R}_a = \bar{R}_n + \bar{R}_t\,;\quad \bar{R}_l = \bar{N} + \bar{T} \qquad (3.12a)$$

$$\bar{M}_a = \bar{M}_n + \bar{M}_t\,;\quad \bar{M}_l = \bar{M}_p + \bar{M}_r. \qquad (3.12b)$$

Proiectarea condițiilor vectoriale de echilibru (3.11) pe două direcții, și anume direcția normală și o direcție din planul tangent, conduce la următoarele ecuații scalare:

$$N - R_n = 0 \qquad (3.13a)$$

$$T - R_t = 0 \qquad (3.13b)$$

$$M_p - M_n = 0 \qquad (3.14a)$$

$$M_r - M_t = 0. \qquad (3.14b)$$

Componentele T, M_p și M_r ale forțelor de legătură se dezvoltă în zona de contact datorită deformărilor locale, și poartă numele de forțe de frecare în reazemul simplu. Mărimea, sensul și suportul fiecărei dintre ele sînt în corelație directă cu mărimea, sensul și suportul componentei corespunzătoare a forțelor active, astfel încît, în situația de echilibru, să fie satisfăcute relațiile (3.13) și (3.14), ceea ce înseamnă că:

— apar numai dacă forțele active conduc la componente după aceste direcții, adică la componentele R_t, M_n, M_t;

— sensurile lor sînt direct opuse tendinței de mișcare imprimate de forțele active;

— valorile lor sînt cuprinse între zero și o valoare limită a cărei evaluare se bazează pe date experimentale.

În continuare se va analiza fiecare dintre relațiile de echilibru (3.13) și (3.14).

Componenta normală a forțelor active, notată cu $\bar{R}_n$, este echilibrată de forța de legătură $\bar{N}$, numită reacțiunea normală. Această reacțiune poate fi oricît de mare deoarece, așa cum s-a arătat, corpul de reazem se consideră cu capacitatea de rezistență nelimitată.

Forța $\bar{R}_t$ tinde să deplaseze corpul în planul tangent. O astfel de mișcare poartă numele de alunecare și ea este împiedicată de către forța de legătură $\bar{T}$, numită forță de frecare de alunecare.

Pe bază experimentală, Coulomb a stabilit legile frecării uscate și anume:

— valoarea maximă a forței de frecare este independentă de mărimea suprafețelor în contact;

— valoarea maximă a forței de frecare depinde de natura și starea suprafețelor în contact;

— forța maximă de frecare este proporțională cu valoarea reacțiunii normale N (coeficientul de proporționalitate stabilindu-se experimental).

Din cele trei legi rezultă

$$T_{max} = \mu N, \qquad (3.15)$$

în care μ este un coeficient adimensional numit coeficient de frecare de alunecare.

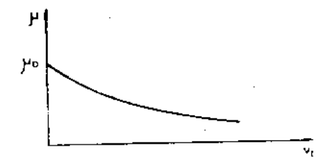


Fig. 3.24.

Dacă forța maximă de frecare este depășită și deci corpul se pune în mișcare, coeficientul de frecare scade pe măsură ce viteza relativă crește (fig. 3.24). Valoarea maximă a coeficientului de frecare, înregistrată în stare de repaus, se mai numește și coeficient de aderență, μ_a. În tabelul 3.6 sînt date cîteva valori ale coeficientului de frecare μ utilizate în probleme tehnice.

Tabelul 3.6

Coeficienți de frecare

Natura corpurilor	Starea suprafețelor	μ
Oțel pe oțel	Uscate	0,15—0,30
	Unse	0,10
Oțel pe fontă sau pe bronz	Uscate	0,19
	Unse	0,10
Oțel pe gheață	—	0,027
Lemn pe piatră	Uscate	0,70
	Unse	0,40
Lemn pe lemn	Uscate	0,40—0,60
	Unse	0,16
Cauciuc pe asfalt	Uscate	0,70
Cărămidă pe cărămidă	Uscate	0,50—0,60

Din cele arătate mai înainte rezultă că, în ceea ce privește tendința de alunecare, echilibrul se menține cît timp este satisfăcută inegalitatea frecării

$$R_t = T \leqslant \mu N. \qquad (3.16)$$

Momentul normal $\bar{M}_n$ are ca efect tendința de rotire a corpului în jurul axei normale și este denumit moment de pivotare. Acestei tendințe i se opune momentul forțelor de frecare la pivotare $\bar{M}_p$ a cărui valoare maximă poate fi exprimată sub forma

$$M_{p,\,max} = \nu N \qquad (3.17)$$

unde ν reprezintă coeficientul de frecare la pivotare iar N are aceeași semnificație ca în relația (3.15). Coeficientul ν depinde atît de coeficientul μ, cît și de forma suprafeței de contact dintre corp și reazem. Din punct de vedere dimensional, acest coeficient este o lungime.

Pentru echilibru este necesar ca M_n să nu depășească $M_{p,\,max}$. Avînd în vedere condiția (3.14a) se obține

$$M_n = M_p \leqslant \nu N. \qquad (3.18)$$

Componenta $\bar{M}_t$ a momentului forțelor exterioare are tendința de a rostogoli corpul prin rotirea lui în jurul unei axe conținute în planul tangent la suprafața de contact. Mișcarea este însă împiedicată de cuplul forțelor de frecare la rostogolire $\bar{M}_r$, numit moment de frecare la rostogolire. Experiența arată că acest moment prezintă, de asemenea, o valoare limită, și anume:

$$M_{r,\,max} = sN \qquad (3.19)$$

în care s poartă denumirea de coeficient de frecare la rostogolire și are dimensiunile unei lungimi.

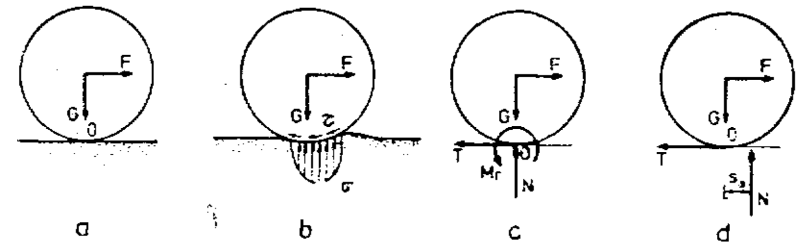


Fig. 3.25.

Cît timp cuplul forțelor exterioare M_t este mai mic sau egal cu momentul maxim de frecare la rostogolire, mișcarea nu este posibilă și corpul este în repaus. Rezultă deci că, din punctul de vedere al rostogolirii, pe baza relației (3.14b), condiția de echilibru are forma

$$M_t = M_r \leqslant sN. \tag{3.20}$$

Semnificația fizică a coeficientului s poate fi pusă în evidență dacă se examinează un caz simplu, și anume fenomenul de rezemare a roții unui vehicul pe o cale (fig. 3.25). Se consideră o roată cu greutatea pe osie G acționată de o forță de tracțiune F. Ca urmare a deformării materialelor, rezemarea efectivă se realizează pe o anumită zonă, excentrică față de punctul teoretic de rezemare și anume deplasată către sensul de mers. Pe suprafața de rezemare se dezvoltă forțe distribuite, și anume forțe unitare normale σ și forțe unitare tangențiale τ. Distribuția τ conduce la o rezultantă T care, cu suficientă aproximație, poate fi considerată că trece chiar prin punctul O și are direcția orizontală. Presiunile σ se reduc la o forță verticală N și un moment M_r care este tocmai momentul de frecare la rostogolire. Se observă însă că ansamblul N, M_r din punctul O este echivalent din punct de vedere mecanic cu o forță verticală N deplasată însă în sensul de mers cu o excentricitate s, în așa fel încît $M_r = s_0N$. La limita echilibrului $M_{r,\,max} = sN$, ceea ce înseamnă că s reprezintă distanța maximă cu care se deplasează reacțiunea normală, în sensul tendinței de rostogolire, în condițiile menținerii echilibrului roții ($M_t \leqslant M_{r,\,max}$). Coeficientul s depinde de *raza roții și de natura materialelor corpurilor* în contact. De exemplu, pentru roțile vehiculelor de cale ferată care rulează pe șine de oțel, coeficientul s este cuprins între 0,05 și 0,5 mm, iar pentru roți cu pneuri de dimensiuni obișnuite $s = 2 \ldots 3$ mm.

Frecarea în articulație. În ingineria de construcții, frecarea în articulație prezintă interes practic în special pentru dispozitivele de ridicat și manevrat care au în compunerea lor sisteme de scripeți. Un exemplu simplu este arătat în fig. 3.26, *a* și constă dintr-un scripete simplu cu care se ridică greutatea Q prin aplicarea forței motoare P. Se consideră situație limită, și anume aceea corespunzătoare valorii maxime a forței P, la care echilibrul încă se menține. Momentul de frecare din articulație se dezvoltă în sens invers tendinței de rotire a scripetelui. Sistemul de forțe din articulație este prezentat detaliat în fig. 3.26, *b*. Avînd în vedere că unghiul α este foarte mic ($\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \approx \mathrm{tg}\,\varphi = \mu$), utilizînd condițiile de echilibru pentru forțele coplanare și inegalitățile (3.16) și (3.20) se obține condiția de echilibru sub forma

$$M_0 \leqslant Fr(\mu + s/r) \tag{3.21}$$

în care r este raza fusului.

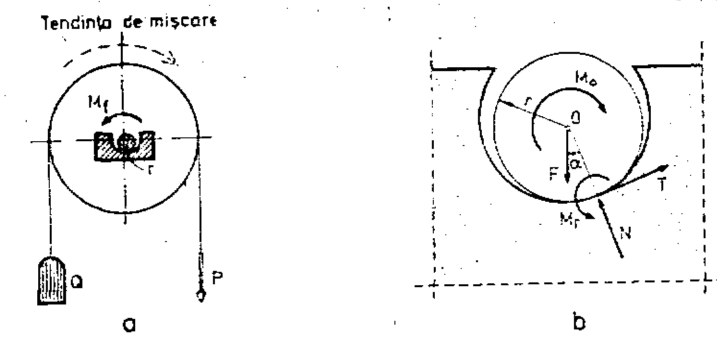


Fig. 3.26.

Notînd, $\mu' = \mu + s/r$, expresia (3.21) devine

$$M_0 \leqslant Fr\mu'. \tag{3.22}$$

Avînd în vedere că momentul $\bar{M}_0$ este egal și direct opus momentului de frecare în articulație $\bar{M}_f$ iar forța $\bar{F}$ este, de asemenea, egală și opusă reacțiunii din articulație, rezultă expresia momentului de frecare sub forma

$$M_f \leqslant \mu' r R_0 \tag{3.23}$$

cu următoarele explicitări

— articulații plane

$$M_f \leqslant \mu' r \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}\,; \tag{3.24a}$$

— articulații spațiale (sferice)

$$M_f \leqslant \mu' r \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2} \tag{3.24b}$$

unde X_R, Y_R, Z_R reprezintă componentele reacțiunii din articulație. În cazul exemplului din fig. 3.26 *a*, momentul de frecare din articulație are expresia

$$M_f \leqslant \mu' r (P + Q) \tag{3.25}$$

iar sensul său este invers tendinței de mișcare.

Frecarea firelor. La construcțiile de poduri, pentru îmbunătățirea comportării grinzilor de beton se utilizează tehnica precomprimării. În principiu, aceasta constă din generarea unor eforturi artificiale în structura de rezistență, așa fel încît să se diminueze eforturile în beton produse de celelalte acțiuni (greutatea proprie, convoaiele mobile). Un exemplu este arătat în fig. 3.27 unde un cablu de oțel este introdus într-un canal creat la turnarea grinzii, cablu care, după un anumit timp, este tras de la unul sau de la ambele capete cu ajutorul unor prese hidraulice. După pretensionare, cablul este blocat și eliberat din prese astfel că efectul de pretensionare se transferă grinzii, care este astfel precomprimată. În timpul pretensionării cablului acesta se alungește, apărînd deci deplasări relative între cablu și peretele canalului. Deoarece cablul ia contact cu peretele canalului pe această suprafață se dezvoltă forțe de frecare, dirijate în lungul cablului și care se opun deplasării relative dintre canal și cablu. Acest lucru face ca forța totală dezvoltată de presele hidraulice să se diminueze treptat, înregistrîndu-se deci în lungul cablului o „pierdere" de tensiune. Verificările de rezistență, deformabilitate și fisurare

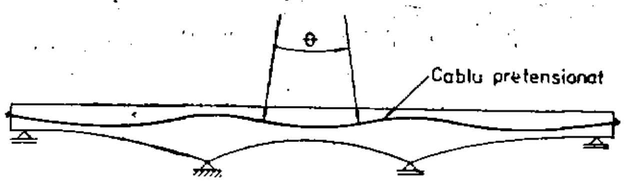


Fig. 3.27.

care se fac asupra grinzii necesită cunoaşterea în fiecare secţiune a cablului a forţei de precomprimare, ceea ce presupune deci evaluarea pierderilor prin frecare. Cablul poate fi considerat ca element unidimensional şi flexibil (fără rigiditate la încovoiere).

Cazuri asemănătoare, privind frecarea firelor, se întîlnesc şi în alte probleme din tehnică. Situaţia se prezintă ca în fig. 3.28, *a* unde un fir, trecut peste o roată fixă, acţionat la cele două extremităţi de forţe diferite, trebuie să rămînă în echilibru în raport cu roata. Echilibrul este posibil cît timp forţele de frecare dezvoltate la contactul dintre fir şi roată nu sînt depăşite. Fenomenul este similar şi dacă firul este fix iar roata, articulată în centrul ei, este acţionată de un cuplu motor.

Problema care se pune constă în a determina relaţia dintre tensiunile de la capetele firului astfel incît deplasarea relativă dintre fir şi roată să nu fie posibilă. Sistemul mecanic este caracterizat prin unghiul la centru θ şi coeficientul de frecare dintre fir şi roată μ.

Se detaşează din fir un arc elementar AB, al cărui unghi la centru este $d\varphi$ (fig. 3.28, *b*). Forţele care îşi fac echilibru sînt : tensiunile în fir (T, $T + dT$), reacţiunea roţii (N), forţa de frecare (F_f). Ecuaţiile scalare de echilibru se obţin prin proiectarea tuturor forţelor pe axele Ox şi Oy, obţinîndu-se

$$\Sigma X_i = -T\cos\frac{d\varphi}{2} - F_f + (T + dT)\cos\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad (3.26a)$$

$$\Sigma Y_i = N - T\sin\frac{d\varphi}{2} - (T + dT)\sin\frac{d\varphi}{2} = 0. \qquad (3.26b)$$

Unghiurile fiind mici, se fac aproximaţiile

$$\cos\frac{d\varphi}{2} = 1\,; \quad \sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}.$$

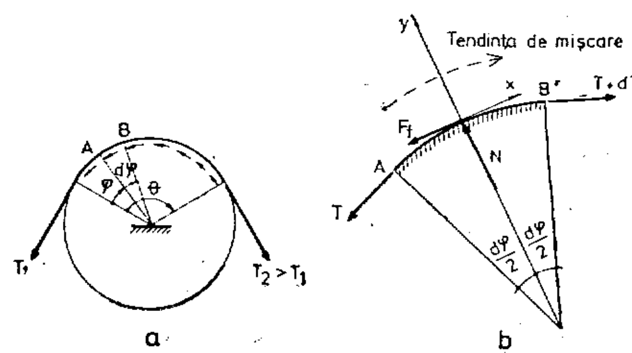


Fig. 3.28.

Deoarece se examinează situaţia limită de echilibru, forţa de frecare are valoarea maximă deci $F_f = \mu N$.

Prin prelucrarea relaţiilor (3.26 a, b) avînd în vedere aproximaţiile admise şi neglijîndu-se termenul $dT\,d\varphi/2$ ca fiind infinit mic de ordin superior, se obţine sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} dT - \mu N &= 0 \\ N - T d\varphi &= 0. \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Din sistemul (3.27) rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{dT}{T} = \mu d\varphi \qquad (3.28)$$

care se integrează sub forma

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \mu\int_0^{\theta} d\varphi \qquad (3.29)$$

obţinîndu-se soluţia pentru echilibrul limită, adică

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} \qquad (3.30)$$

în care $e = 2{,}718281$, iar θ se măsoară în radiani. Relaţia (3.30) reprezintă formula Euler pentru frecarea firelor.

În general, pentru echilibru, este necesară satisfacerea condiţiei

$$T_2 \leqslant T_1 e^{\mu\theta}. \qquad (3.31)$$

Dacă se analizează cealaltă tendinţă de mişcare posibilă atunci cînd $T_1 > T_2$, printr-un raţionament similar rezultă

$$T_1 \leqslant T_2 e^{\mu\theta}. \qquad (3.32)$$

Din relaţiile (3.31) şi (3.32) se obţine condiţia generală de echilibru a unui fir cu frecare sub forma

$$e^{-\mu\theta} \leqslant \frac{T_2}{T_1} \leqslant e^{\mu\theta}. \qquad (3.33)$$

În cazul elementelor de beton armat cu armătura pretensionată, coeficientul de frecare μ depinde de sistemul de realizare a canalului şi are valorile din tabelul 3.7.

Tabelul 3.7

Coeficienţii de frecare la elemente de beton precomprimat

Modul de realizare a canalului	μ
Teacă din tablă	0,35
Teacă din PVC	0,30
Canal format cu ajutorul unor ţevi care se extrag din betonul neintărit	0,45

Deoarece la pretensionare cablul se deplasează faţă de canal, forţele de frecare au valoarea maximă astfel că pierderea de efort înregistrată între două secţiuni definite prin unghiul θ este

$$\Delta T = T_1 - T_2 = T_1(1 - e^{-\mu\theta}). \qquad (3.34)$$

Se observă că pierderea de tensiune este cu atît mai mică cu cît coeficientul de frecare este mai mic şi unghiul de abatere este mai redus.

3.3.5. EXPRIMAREA ECHILIBRULUI RIGIDULUI ÎN CAZUL REAZEMELOR CU FRECARE

Ca și în cazul corpului cu legături ideale, pentru examinarea echilibrului corpului care prezintă reazeme cu frecare se eliberează corpul de legături prin suprimarea acestora și introducerea forțelor de legătură. Deoarece forțele și momentele de frecare apar și se dezvoltă numai în măsura în care se manifestă tendința de mișcare după anumite direcții, soluțiile problemelor de echilibru nu se prezintă sub forma unor valori unice ale necunoscutelor. Așa cum s-a arătat, forțele și momentele de frecare pot avea valori cuprinse între zero și o valoare limită. De aceea, în general, și necunoscutele problemei vor rezulta sub forma unui interval de valori posibile, astfel că valorile extreme ale soluției corespund valorilor extreme ale forțelor și momentelor de frecare. Pentru a stabili sensul corect al foțelor și momentelor de frecare, este necesar să se identifice și să se analizeze tendințele de mișcare posibile ale corpului. Analiza echilibrului limită, corespunzător fiecărei tendințe de mișcare, permite determinarea marginilor intervalului de soluții ale problemei.

Prin suprimarea legăturilor se aduce corpul în situația unui corp liber asupra căruia sînt aplicate următoarele tipuri de forțe:

— forțele active, efectiv aplicate, produse de acțiunile exterioare;
— forțele de legătură (reacțiuni);
— forțele de frecare.

Toate aceste forțe sînt considerate în condițiile de echilibru (3.3). Deoarece forțele de frecare apar ca necunoscute suplimentare, la ecuațiile scalare care derivă din condițiile vectoriale (3.3) se adaugă inegalitățile frecării care au, după caz, formele date de relațiile (3.16), (3.18), (3.20), (3.23) sau/și (3.33). Rezolvarea acestui sistem de ecuații și inegalități conduce la identificarea soluției problemei.

3.4. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL

Condițiile de echilibru al unui punct material rezultă ca un caz particular al condițiilor generale de echilibru (3.3), (3.11), și anume avînd în vedere că forțele aplicate asupra punctului material sînt concurente și deci condiția vectorială $\bar{M}_0 = 0$ este identic satisfăcută.

3.4.1. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL LIBER

Pentru ca un punct material să fie în echilibru este necesar și suficient ca rezultanta sistemului de forțe concurente să fie nulă, adică

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i = 0. \tag{3.35a}$$

Această condiție vectorială conduce la trei ecuații scalare de forma (3.8). În cazul forțelor coplanare, numărul ecuațiilor de echilibru se reduce; astfel, dacă se alege sistemul de axe așa fel ca forțele să fie cuprinse în planul xOy, rezultă numai două condiții de echilibru, și anume:

$$\Sigma X_i = 0; \quad \Sigma Y_i = 0. \tag{3.35b}$$

Problemele privind echilibrul punctului material liber se prezintă sub două aspecte:

a) se cunosc forțele aplicate asupra punctului și se cere poziția de echilibru a acestuia. În acest caz, necunoscutele problemei sînt coordonatele punctului material, în număr de trei la problemele spațiale și de două în plan;

b) poziția de echilibru este precizată și se cer forțele care, aplicate asupra punctului, îl mențin în echilibru. Necunoscutele sînt alcătuite din mărimile și/sau direcțiile forțelor. Dacă nu se impun forțelor și alte condiții, soluția este nedeterminată deoarece există o infinitate de sisteme de forțe concurente care sînt echivalente din punct de vedere mecanic.

3.4.2. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL CU LEGATURI IDEALE

Un punct material este supus la legături dacă el este obligat să rămînă pe o suprafață, pe o curbă sau să aibă o poziție fixă în spațiu. Așa cum s-a arătat, în aceste cazuri, gradele de libertate scad cu cîte o unitate pentru fiecare restricție exprimată printr-o relație matematică.

Punct material rezemat pe o suprafață. Fie punctul material P, rezemat pe o suprafață a cărei ecuație este $f(x, y, z) = 0$. Se presupune că rezultanta forțelor exterioare este $\bar{R}_a$. Pentru ca punctul să fie în echilibru este necesar ca forța de legătură $\bar{R}_l$ împreună cu rezultanta $\bar{R}_a$ a forțelor active să formeze un sistem echivalent cu zero, adică $\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0$. Aceasta înseamnă că cele două forțe trebuie să fie egale și direct opuse (fig. 3.29). Fie Π planul tangent la suprafață în punctul de rezemare. În scopul de a analiza anumite aspecte ale condițiilor de echilibru se descompun vectorii $\bar{R}_a$ și $\bar{R}_l$ în componente conținute în planul tangent, respectiv după normala la plan, adică

$$\bar{R}_a = \bar{R}_n + \bar{R}_t; \quad \bar{R}_l = \bar{N} + \bar{T}. \tag{3.36}$$

Deoarece rezemarea se consideră ideală (fără frecare) forța de legătură $\bar{T}$ nu poate exista din punct de vedere fizic. În aceste condiții, satisfacerea relațiilor de echilibru (3.36) este posibilă numai dacă $R_t = 0$, ceea ce înseamnă că poziția de echilibru a punctului material este astfel încît normala la suprafață să coincidă cu suportul rezultantei forțelor active. Forța de legătură (reacțiunea) este deci dirijată după direcția normalei și are valoarea necunoscută N.

Ecuația vectorială de echilibru este

$$\bar{R}_a + \bar{N} = 0 \tag{3.37}$$

astfel că ecuațiile scalare au forma

$$\Sigma X_i + N_x = 0; \quad \Sigma Y_i + N_y = 0;$$

$$\Sigma Z_i + N_z = 0 \tag{3.38}$$

unde N_x, N_y și N_z reprezintă proiecțiile reacțiunii $\bar{N}$ pe axele de

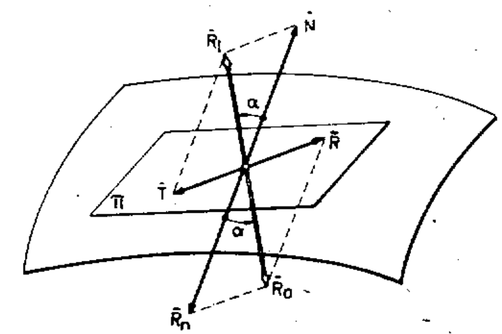


Fig. 3.29.

coordonate. Avînd în vedere că reacţiunea $\bar{N}$ este normală la suprafaţa dată prin ecuaţia $f(x, y, z) = 0$, ecuaţia (3.37) se poate scrie

$$\bar{R}_a + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}\right) = 0 \tag{3.39}$$

rezultînd deci condiţiile scalare

$$\Sigma X_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \Sigma Y_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

$$\Sigma Z_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{3.40}$$

unde λ este un parametru scalar care precizează mărimea reacţiunii.

Dacă toate forţele active sînt complet definite, de exemplu, prin proiecţiile X_i, Y_i, $Z_i (i = 1, n)$, necunoscutele problemei sînt alcătuite din:

— mărimea reacţiunii N;

— poziţia punctului material (coordonatele curbilinii u, v pe suprafaţă).

Punct material rezemat pe o curbă. Se consideră punctul material P obligat să rămînă pe curba Γ (fig. 3.30). Deoarece rezemarea este fără frecare, echilibrul se realizează în acea poziţie a punctului material pentru care rezultanta forţelor exterioare este conţinută în planul normal la curbă. Una dintre necunoscutele scalare ale problemei este deci coordonata curbilinie s. Pentru a pune în evidenţă celelalte necunoscute, se utilizează ca sistem de referinţă triedrul lui Frenet. Deoarece reacţiunea N este, de asemenea, conţinută în planul normal Π, ea este determinată prin componentele sale după axa normală N_ν şi respectiv după binormală N_β, aceste mărimi reprezentînd celelalte necunoscute.

Ecuaţia vectorială de echilibru are forma (3.37). Dacă curba este definită analitic prin ecuaţiile $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, atunci relaţia (3.37) devine

$$\bar{R}_a + \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\bar{k}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\bar{k}\right) = 0,$$

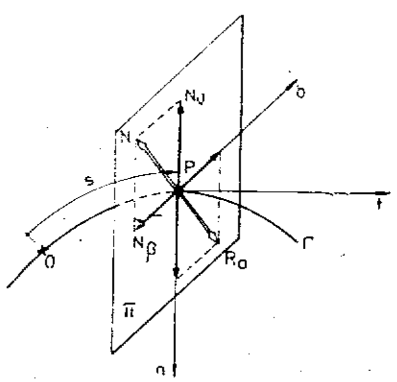


Fig. 3.30.

şi este echivalentă cu următoarele ecuaţii scalare.

$$\Sigma X_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$\Sigma Y_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \tag{3.41}$$

$$\Sigma Z_i + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

unde scalarii λ_1 şi λ_2 precizează mărimea reacţiunii.

Punct fix. În acest caz poziţia punctului este cunoscută. Condiţia vectorială de echilibru este

$$\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0 \tag{3.42}$$

sau

$$\Sigma X_i + X_l = 0; \quad \Sigma Y_i + Y_l = 0; \quad \Sigma Z_i + Z_l = 0 \tag{3.43}$$

necunoscutele problemei fiind deci X_l, Y_l, Z_l, adică proiecţiile reacţiunii pe trei direcţii în spaţiu.

Aspectele problemei privind echilibrul punctului material supus la legături fără frecare sînt prezentate sintetic în tabelul 3.8.

Tabelul 3.8

Echilibrul punctului material cu legături ideale

Tipul legăturii	Necunoscute scalare		Condiţii de echilibru
	Geometrice	Statice	
Rezemare pe o suprafaţă	Coordonatele curbilinii u, v	N	$\Sigma X_i + N_x = 0$ $\Sigma Y_i + N_y = 0$ $\Sigma Z_i + N_z = 0$
Rezemare pe o curbă în spaţiu	Coordonata curbilinie s	N_ν N_β	
Rezemare pe o curbă plană	Coordonata curbilinie, s	N	$\Sigma X_i + N_x = 0$ $\Sigma Y_i + N_y = 0$
Punct complet fixat	—	N_x N_y N_z	$\Sigma X_i + N_x = 0$ $\Sigma Y_i + N_y = 0$ $\Sigma Z_i + N_z = 0$

În cazul particular al rezemării pe o curbă plană s-a ales sistemul de axe astfel încît curba şi forţele să fie conţinute în planul xOy.

3.4.3. ECHILIBRUL PUNCTULUI MATERIAL REZEMAT CU FRECARE

Fenomenul frecării în cazul punctului material este guvernat de legile frecării uscate prezentate în paragraful 3.3.4. Analiza echilibrului are în vedere prezenţa forţei de frecare determinată pe baza legilor lui Coulomb.

La examinarea echilibrului se utilizează axioma legăturilor. Pe lîngă necunoscutele geometrice şi statice ale problemelor fără frecare, în aceste cazuri apare ca necunoscută suplimentară forţa de frecare. Relaţia suplimentară necesară pentru rezolvarea problemei este furnizată de inegalitatea frecării.

Rezemarea pe o suprafaţă. Se consideră situaţia din fig. 3.29. Echilibrul este posibil dacă mărimea componentei R_t este egală sau mai mică decît forţa maximă de frecare, condiţie care se exprimă sub forma (3.16). Avînd în vedere că $T = R_l \sin\alpha$ şi $N = R_l \cos\alpha$, condiţia (3.16) devine

$$\sin\alpha \leqslant \mu\cos\alpha$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi \tag{3.44}$$

unde s-a notat

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi. \tag{3.45}$$

Unghiul φ, astfel definit, poartă denumirea de unghi de frecare. Condiția (3.44) permite o interpretare geometrică și anume: echilibrul unui punct material rezemat cu frecare pe o suprafață este posibil dacă rezultanta forțelor active R_a, este în interiorul său pe suprafața laterală a conului a cărui generatoare face unghiul φ cu normala la suprafață în punctul considerat (fig. 3.31). Acest con este denumit con de frecare. Din examinarea fig. 3.31 se observă că dacă rezultanta R_a este în interiorul său la limita conului de frecare, atunci $\alpha \leqslant \varphi$ și deci sînt îndeplinite condițiile (3.44) și (3.16).

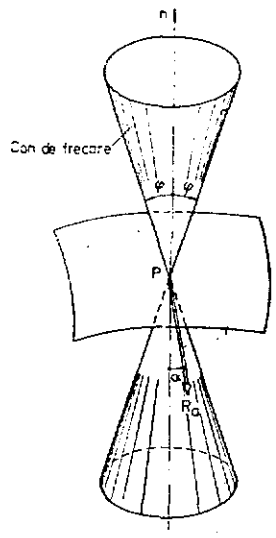


Fig. 3.31.

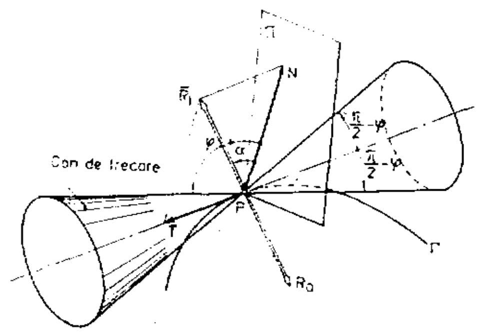


Fig. 3.32.

Rezemarea pe o curbă în spațiu. Fie punctul P rezemat pe o curbă (fig. 3.32). Condiția de echilibru este $\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0$, semnificațiile termenilor fiind cele din relația (3.11). Datorită prezenței forței de frecare T, punctul material rămîne în echilibru cît timp relația (3.16) este verificată. Fie Π planul normal la curbă în punctul de rezemare și α unghiul rezultantei $\bar{R}_a$ cu acest plan. Se observă că $T = R_l \sin \alpha$ și $N = R_l \cos \alpha$ și deci, pentru echilibru, este necesar ca $\alpha \leqslant \varphi$, unde unghiul φ are interpretarea din relația (3.45). Punctul este deci în echilibru dacă forța de legătură $\bar{R}_l$, deci implicit și rezultanta forțelor active $\bar{R}_a$, fac cu planul normal un unghi $\alpha \leqslant \varphi$. Imaginînd o suprafață conică definită de generatoarele care fac unghiurile $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ cu tangenta la curbă, aceasta constituie tocmai locul geometric al pozițiilor limită ale rezultantei forțelor active pentru care punctul este în echilibru și poartă denumirea de con de frecare.

În concluzie, un punct material rezemat cu frecare pe o curbă este în echilibru dacă rezultanta forțelor active se găsește în afara sau pe suprafața conului de frecare din acel punct.

Concluziile privind echilibrul punctului material rezemat cu frecare sînt prezentate în tabelul 3.9.

Se face observația că, în general, se obține o infinitate de soluții de echilibru, delimitînd, atît pe suprafețe cît și pe curbe, zone în care echilibrul este posibil.

Tabelul 3.9

Echilibrul punctului material supus la legătură cu frecare

Tipul legăturii	Necunoscute scalare		Condiții de echilibru
	Geometrice	Statice	
Rezemarea pe o suprafață	Coordonatele curbilinii u, v	N, T_u, T_v	$\Sigma X_i + N_x = 0$; $\Sigma Y_i + N_y = 0$; $\Sigma Z_i + N_z = 0$; $T \leqslant \mu N$; $T^2 = T_u^2 + T_v^2$
Rezemarea pe o curbă în spațiu	Coordonata curbilinie s	N_ν, N_β, T	$N^2 = N_\nu^2 + N_\beta^2$
Rezemarea pe o curbă în plan	Coordonata curbilinie s	N, T	$\Sigma X_i + N_x = 0$; $\Sigma Y_i + N_y = 0$; $T \leqslant \mu N$

3.5. ECHILIBRUL SISTEMELOR MECANICE

Ansamblul alcătuit din mai multe corpuri rigide și/sau puncte materiale între care se exercită interacțiuni mecanice, semnificative într-o anumită problemă, poartă denumirea de *sistem mecanic*. Cîteva exemple sînt arătate în fig. 3.33.

Interacțiunile mecanice se manifestă, în general, datorită legăturilor directe existente între componentele sistemului. Sistemul mecanic este legat (rezemat) *prin intermediul reazemelor* la o bază de sprijinire.

Rezultă deci că, la un sistem mecanic, se disting:

— *legături exterioare* (reazeme), cărora le corespund forțe de legătură exterioare sau reacțiuni;

— *legături interioare* care, prin suprimare, conduc la forțe de legătură interioare.

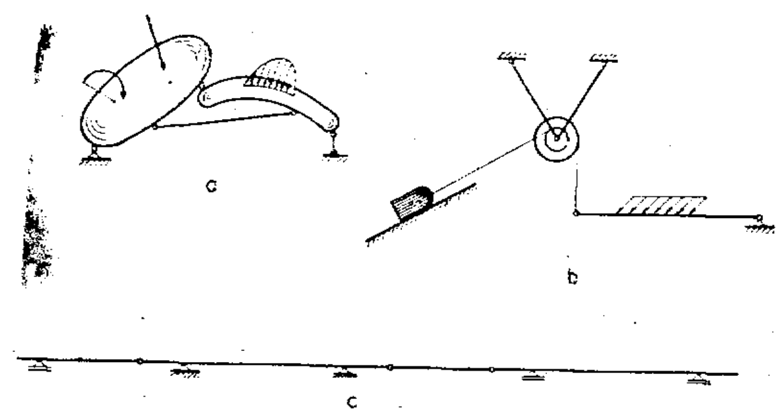


Fig. 3.33.

Studiul unui sistem mecanic se referă la următoarele aspecte:
— caracterizarea statică și geometrică a sistemului în scopul precizării numărului și naturii necunoscutelor problemei;
— analiza aspectelor calitative privind dispunerea legăturilor astfel ca sistemul să fie efectiv fixat, adică să prezinte o configurație invariabilă în raport cu baza de rezemare;
— determinarea necunoscutelor geometrice și statice.

Forțele care acționează asupra unui sistem mecanic se clasifică în:
a) forțe efectiv aplicate, provenite din acțiuni exterioare sistemului, acestea numindu-se forțe exterioare sau active;
b) forțe care se exercită între componentele sistemului ca urmare a existenței legăturilor interioare și ca urmare se numesc forțe interioare.

Se face observația că noțiunea de forță este utilizată în sens generalizat, înțelegîndu-se atît forțe propriu-zise (concentrate, distribuite) cît și momente (concentrate, distribuite).

Legăturile dintre corpuri sînt de tipul celor prezentate în tabelul 3.3, cu excepția încastrărilor care, considerate ca legături interioare, capătă un caracter convențional. Deplasările simple permise de fiecare tip de legătură reprezintă, în cazul sistemelor mecanice, deplasări relative, adică deplasări între diversele componente ale sistemului. Numărul și natura forțelor de legătură interioare simple sînt prezentate, de asemenea, în tabelul 3.3.

Dacă toate forțele aplicate asupra unui sistem mecanic sînt în același plan iar legăturile interioare și reazemele sînt de asemenea plane și coplanare cu forțele, sistemul se numește plan; în acest caz, toate forțele de legătură sînt conținute în planul comun. Foarte multe probleme inginerești pot fi modelate ca sisteme plane și tratate ca atare, fapt ce simplifică substanțial analiza echilibrului.

3.5.1. CARACTERIZAREA GEOMETRICĂ ȘI STATICĂ

Așa cum s-a arătat, legăturile interioare pe care le prezintă un sistem mecanic au ca efect împiedicarea unui număr de componente ale deplasărilor relative, în timp ce legăturile exterioare împiedică deplasările în raport cu baza de rezemare.

Pentru a caracteriza din punct de vedere geometric un sistem mecanic, se evaluează numărul gradelor sale de libertate. În acest scop se notează:

l_s — numărul total al legăturilor simple (interioare și exterioare);
G_l — numărul gradelor de libertate ale sistemului;
C — numărul corpurilor din sistem;
N_p — numărul punctelor materiale.

Avînd în vedere că o legătură simplă anulează un grad de libertate rezultă

$$G_l = \alpha C + \beta N_p - l_s \tag{3.46}$$

unde α și β reprezintă numărul gradelor de libertate ale unui corp liber, respectiv ale unui punct material liber și au valorile din tabelul 3.1, adică:
— pentru probleme spațiale $\alpha = 6,\ \beta = 3$;
— pentru probleme plane $\alpha = 3,\ \beta = 2$.

Numărul total al legăturilor simple se stabilește pe baza tabelului 3.3, avînd în vedere numărul și tipul legăturilor interioare și exterioare pe care le prezintă sistemul mecanic.

În cazul sistemelor spațiale relația (3.46) devine

$$G_l = 6C + 3N_p - (6i - 4a_c + 3a_s + r_s) \tag{3.47a}$$

iar pentru sisteme plane se obține

$$G_l = 3C + 2N_p - (3i + 2a_c + 2a_s + r_s) \tag{3.47b}$$

în care: i este numărul total al reazemelor încastrate; a_c — numărul articulațiilor cilindrice; a_s — numărul articulațiilor simple (dintre două corpuri); r_s — numărul reazemelor simple.

În funcție de valorile caracteristicii, de natură cantitativă, G_l, sistemul mecanic se găsește, din punct de vedere geometric, într-una din următoarele situații:

a) $G_l > 0$, ceea ce înseamnă că legăturile existente nu anulează decît o parte din totalitatea gradelor de libertate ale corpurilor și punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și ca atare sistemul este un mecanism;
b) $G_l = 0$ reprezintă cazul sistemului mecanic care are numărul de legături strict necesar (minim) pentru fixare;
c) $G_l < 0$ situație în care sistemul îndeplinește condiția cantitativă de fixare, existînd un surplus de legături.

Se face observația că o articulație în care se întîlnesc n corpuri împiedică translațiile relative dintre un corp (ales ca reper) și celelalte $(n - 1)$ corpuri și ca atare ea reprezintă $(n - 1)$ articulații simple.

Așa cum s-a semnalat și în cazul fixării cu reazeme a unui singur corp, evaluarea numărului gradelor de libertate pe baza relației (3.46) permite o caracterizare de ordin cantitativ, în sensul că $G_l \leqslant 0$ reprezintă o condiție necesară, dar nu suficientă, pentru ca sistemul să fie fixat. Analiza calitativă, referitoare la dispunerea legăturilor, permite să se stabilească dacă sistemul este efectiv fixat și nu constituie deci un sistem critic.

Dacă sistemul mecanic este complet fixat ($G_l \leqslant 0$) atunci ca necunoscute ale problemei sînt forțele de legătură (interioare și exterioare); în cazul unui mecanism ($G_l > 0$), pe lîngă forțele de legătură sînt, de asemenea, necunoscute, un număr egal cu G_l de parametri de poziție (unghiuri și/sau distanțe).

Caracterizarea statică se referă la numărul necunoscutelor forțe de legătură ale problemei în raport cu numărul condițiilor scalare de echilibru și se bazează pe relația (3.10), astfel că rezultă:

— pentru probleme spațiale

$$N = 6i + 4a_c + 3a_s + r_s \tag{3.48 a}$$

$$E = 6C; \tag{3.48 b}$$

— pentru probleme plane

$$N = 3i + 2a_c + 2a_s + r_s \tag{3.49 a}$$

$$E = 3C \tag{3.49 b}$$

în care notațiile au aceeași semnificație ca în relațiile (3.46), (3.47 a) (3.47 b). Potrivit caracterizării statice, sistemele mecanice pot fi static determinate ($G_{ns} \leqslant 0$) sau static nedeterminate ($G_{ns} > 0$) noțiunile fiind definite în paragraful 3.3.2.

Concluziile analizei geometrice și statice ale unui sistem de corpuri sînt similare cu cele referitoare la fixarea cu reazeme a unui corp și sînt sintetizate în tabelul 3.5.

3.5.2. STUDIUL ECHILIBRULUI

Examinarea echilibrului unui sistem de corpuri în vederea determinării necunoscutelor (forțe de legătură și parametri de poziție) se bazează pe axioma *legăturilor și pe constatarea* că un sistem mecanic este în echilibru dacă, și numai dacă, fiecare parte componentă a sa se află în echilibru.

Așa cum se va arăta în continuare, condițiile de echilibru se pot exprima atît pentru fiecare parte componentă (corp rigid sau punct material) considerată în mod izolat cît și pentru o parte (subsistem) a sistemului mecanic.

Metoda izolării corpurilor (punctelor materiale). Se consideră sistemul de corpuri din fig. 3.33, *a* căruia i se înlătură toate legăturile, efectul mecanic al acestora fiind introdus prin forțele de legătură (fig. 3.34). Conform principiului acțiunii și reacțiunii, forțele de legătură interioare sînt două cîte două egale și direct opuse, adică

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji} \quad (i \neq j) \tag{3.50}$$

și deci

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0. \tag{3.51}$$

Deoarece forțele $\bar{F}_{ij}$ și $\bar{F}_{ji}$ au același suport, momentul lor în raport cu un punct arbitrar este nul

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = 0. \tag{3.52}$$

În relația (3.52) $\bar{r}_i$ și $\bar{r}_j$ reprezintă vectorii de poziție ai unor puncte de pe *suportul comun al forțelor interioare* $\bar{F}_{ij}$ și $\bar{F}_{ji}$.

Prin desfacerea legăturilor sistemul mecanic s-a transformat într-un ansamblu de corpuri *izolate*, libere, cărora li se exprimă echilibru pe baza condițiilor vectoriale (3.3). Atașînd corpului k un sistem de axe, cu notațiile:

X_a, Y_a, Z_a — proiecțiile forțelor active;
X_l, Y_l, Z_l — proiecțiile forțelor de legătură interioare;
X_r, Y_r, Z_r — proiecțiile reacțiunilor și, în mod similar,
$M_{xa}, M_{ya}, M_{za}, M_{xl}, M_{yl}, M_{zl}, M_{xr}, M_{yr}, M_{zr}$ — momentele în raport cu axele, ale forțelor active, forțelor de legătură interioare și respectiv ale reacțiunilor.

Condițiile vectoriale (3.3) conduc la *forma de bază* a ecuațiilor scalare de echilibru ale corpului k examinat, sub forma

$$\begin{aligned}
&\sum_k X_a + \sum_k X_l + \sum_k X_r = 0; \quad &&\sum_k M_{xa} + \sum_k M_{xl} + \sum_k M_{xr} = 0\\
&\sum_k Y_a + \sum_k Y_l + \sum_k Y_r = 0; \quad &&\sum_k M_{ya} + \sum_k M_{yl} + \sum_k M_{yr} = 0\\
&\sum_k Z_a + \sum_k Z_l + \sum_k Z_r = 0; \quad &&\sum_k M_{za} + \sum_k M_{zl} + \sum_k M_{zr} = 0.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

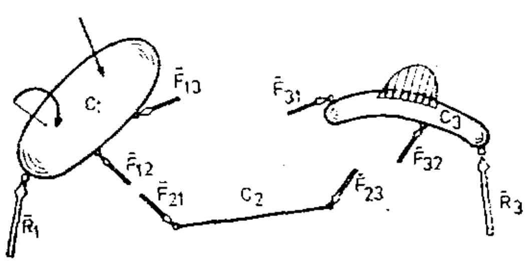


Fig. 3.34.

Ecuații similare se scriu pentru toate corpurile ($k = 1, 2, \ldots, C$) obținîndu-se, în final, un sistem de ecuații algebrice din a cărui rezolvare se determină necunoscutele problemei. Metoda devine incomodă pentru calcul practic la sistemele de corpuri cu alcătuire complexă, la care partiționarea sistemului de ecuații în subsisteme nu este posibilă.

Se face precizarea că forma de bază a ecuațiilor (3.52) poate fi înlocuită prin variante de exprimare a echilibrului, așa cum s-a arătat în legătură cu relațiile (3.4) și (3.5).

Metoda solidificării. *Această metodă permite, în unele cazuri, determinarea directă a reacțiunilor.*

Se consideră un sistem alcătuit din C corpuri asupra căruia se aplică forțele active $\bar{F}_a$. Prin izolarea corpurilor se introduc forțele de legătură interioare $\bar{F}_{ij}$ și reacțiunile $\bar{F}_r$.

Pentru corpul k, condiția de echilibru $\bar{R}_a + \bar{R}_l = 0$ devine

$$\sum_k \bar{F}_a + \sum_k \bar{F}_{ij} + \sum_k \bar{F}_r = 0. \tag{3.54}$$

Condițiile de echilibru de forma (3.54) se scriu pentru fiecare corp din sistem *și apoi se însumează* pe ansamblu sistemului, obținîndu-se

$$\sum_s \bar{F}_a + \sum_s (\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji}) + \sum_s \bar{F}_r = 0. \tag{3.55}$$

Avînd în vedere relația (3.51) condiția (3.55) se reduce la

$$\sum_s \bar{F}_a + \sum_s \bar{F}_r = 0. \tag{3.56}$$

În mod similar se demonstrează că pe ansamblul sistemului

$$\sum_s \bar{M}_{0a} + \sum_s \bar{M}_{0r} = 0 \tag{3.57}$$

unde: $\Sigma\bar{M}_{0a}$ este suma momentelor în raport cu un punct ale tuturor forțelor active, aplicate pe sistem; ΣM_{0r} — *suma momentelor reacțiunilor sistemului.*

Relațiile (3.56) și (3.57) au aspectul condițiilor de echilibru ale unui singur corp, obținut prin blocarea completă a tuturor legăturilor interioare, deci prin „solidificarea" acestora, constatare care conduce la teorema solidificării al cărui enunț este următorul: *la un sistem mecanic în echilibru, forțele active și cu reacțiunile formează un sistem de forțe echivalent cu zero.*

Este evident că teorema solidificării furnizează doar o condiție necesară pentru echilibrul sistemului mecanic, nu însă și suficientă.

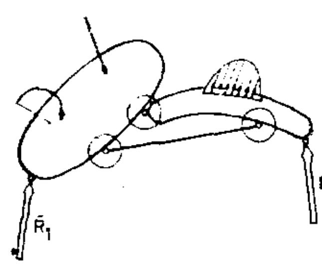


Fig. 3.35.

Teorema solidificării are o interpretare mecanică în sensul că un sistem de corpuri și puncte materiale, aflat în echilibru, căruia i se creează legături suplimentare, își menține în continuare situația de echilibru. Aceste legături suplimentare se introduc pînă la blocarea totală a legăturilor dintre corpuri, obținîndu-se, în final, un singur corp (fig. 3.35) care, din punctul de vedere al reacțiunilor, poate fi examinat ca atare.

Teorema echilibrului părților. Pe baza interpretării date teoremei solidificării, la un sistem material se pot introduce legături suplimentare, pînă la blocarea totală a acestora numai la un număr din legăturile sale interioare, restul de legături interioare împreună cu reazemele urmînd să fie suprimate și înlocuite cu forțe de legătură corespunzătoare. Aceasta revine a considera că sistemul inițial s-a transformat într-un sistem nou, alcătuit dintr-un număr mai redus de componente, al cărui echilibru se studiază prin metoda izolării componentelor sale. Un exemplu este arătat în fig. 3.36, *a*.

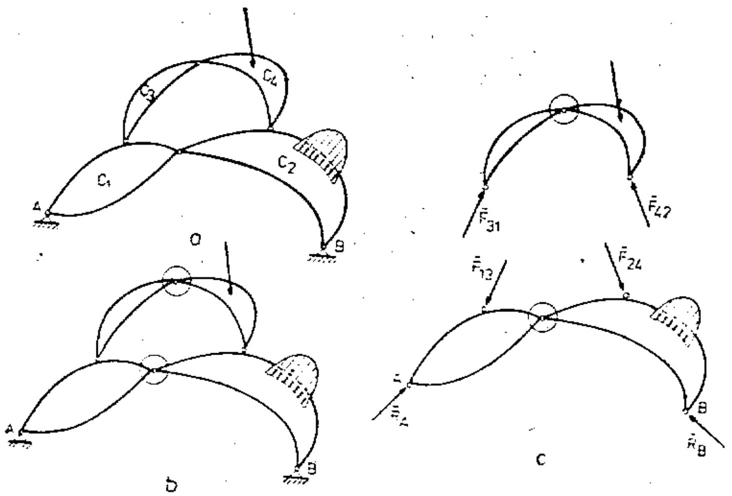


Fig. 3.36.

Astfel, solidificîndu-se legăturile dintre corpurile $C_1 - C_2$ şi $C_3 - C_4$ (fig. 3.36, *b*) se obţin şi se izolează componentele $C_1 + C_2$ şi $C_3 + C_4$ cu forţele de legătură ca în fig. 3.36, *c*.

Cele prezentate mai înainte permit formularea teoremei echilibrului părţilor astfel : dacă un sistem mecanic se află în echilibru, atunci orice parte a acestuia este, de asemenea, în echilibru sub reacţiunea forţelor active care sînt aplicate asupra acestei părţi şi a forţelor de legătură ale acestor părţi cu restul sistemului şi cu baza de rezemare.

Aplicaţia 3.1. O platformă cu greutatea şi grosimea neglijabile este rezemată prin intermediul a şase bare dispuse ca în fig. 3.37, *a*. Asupra platformei sînt aplicate două forţe concentrate. Se cere determinarea reacţiunilor platformei.

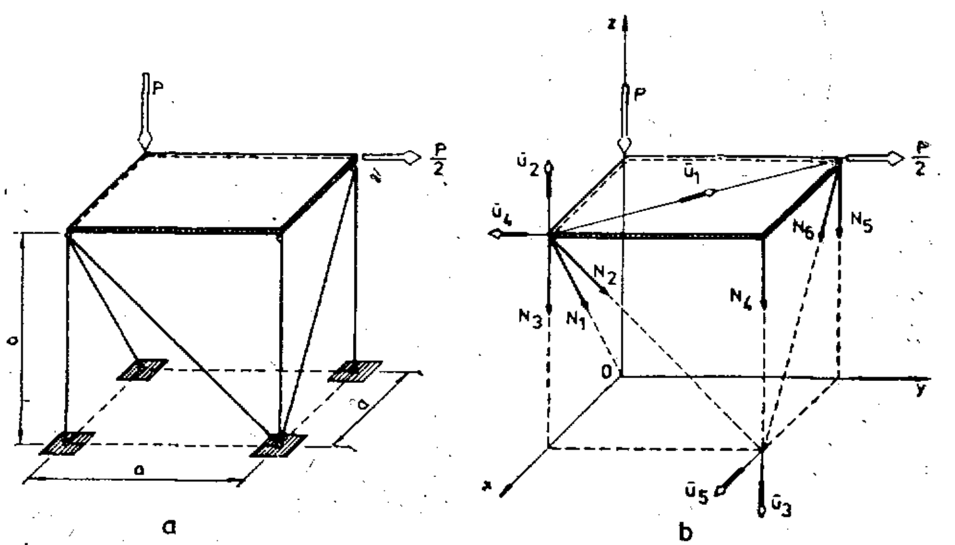


Fig. 3.37.

Fiecare bară constituie o legătură simplă astfel că, prin suprimare, impune introducerea unei forţe de legătură care are ca suport bara înlăturată, mărimea fiind necunoscută (fig. 3.37, *b*). În acest fel se pot aplica condiţiile vectoriale de echilibru (3.11) care conduc la şase ecuaţii scalare. Se urmăreşte exprimarea echilibrului prin ecuaţii cît mai simple.

În fig. 3.37, *b* sînt indicate, prin versorii lor, axele faţă de care se scriu ecuaţiile de momente, obţinîndu-se

$$\Sigma M_1 = N_4 \frac{a}{\sqrt{2}} - P\frac{a}{\sqrt{2}} = 0\,;\quad N_4 = P$$

$$\Sigma M_2 = -N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{P}{2} a = 0\,;\quad N_6 = -P\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma M_3 = N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{P}{2} a = 0\,;\quad N_1 = -P\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Sigma M_4 = -N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} a - N_5 a - Pa = 0\,;\quad N_5 = -P - N_6\frac{\sqrt{2}}{2} = -P/2$$

$$\Sigma M_5 = N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} a + N_3 a + Pa - \frac{P}{2} = 0\,;\quad N_3 = \frac{P}{2} - P - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Sigma M_z = N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} a - N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0\,;\quad N_2 = N_6 = -P\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pentru verificare, se utilizează ecuaţiile de proiecţie a forţelor pe axele triedrului *Oxyz*, rezultînd

$$\Sigma X_i = -N_1\frac{\sqrt{2}}{2} + N_6\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,;$$

$$\Sigma Y_i = N_2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{P}{2} = 0\,;$$

$$\Sigma Z_i = -N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} - N_3 - N_4 - N_5 - N_6\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0.$$

Aplicaţia 3.2. Se cere determinarea intensităţii *p* a încărcării distribuite, astfel încît sistemul de corpuri a cărui configuraţie este arătată în fig. 3.38, *a* să fie în echilibru. Să se calculeze apoi forţele de legătură.

Pentru caracterizarea sistemului se aplică relaţia (3.47 b) în care: $C = 4$; $N_p = 1$; $i = 0$; $a_c = 0$; $a_s = 5$; $r_s = = 3$ (fiecare legătură printr-un fir reprezintă o legătură simplă).

Rezultă $G_l = 1$.

Sistemul de corpuri formează un mecanism. Deoarece configuraţia de echilibru este precizată, necunoscutele problemei sînt forţele de legătură şi caracteristica *p* a încărcării distribuite. Din punct de vedere static sistemul este determinat.

Pentru studiul echilibrului se aplică procedeul izolării corpurilor şi procedeul echilibrului părţilor (fig. 3.38, *b*, *c*).

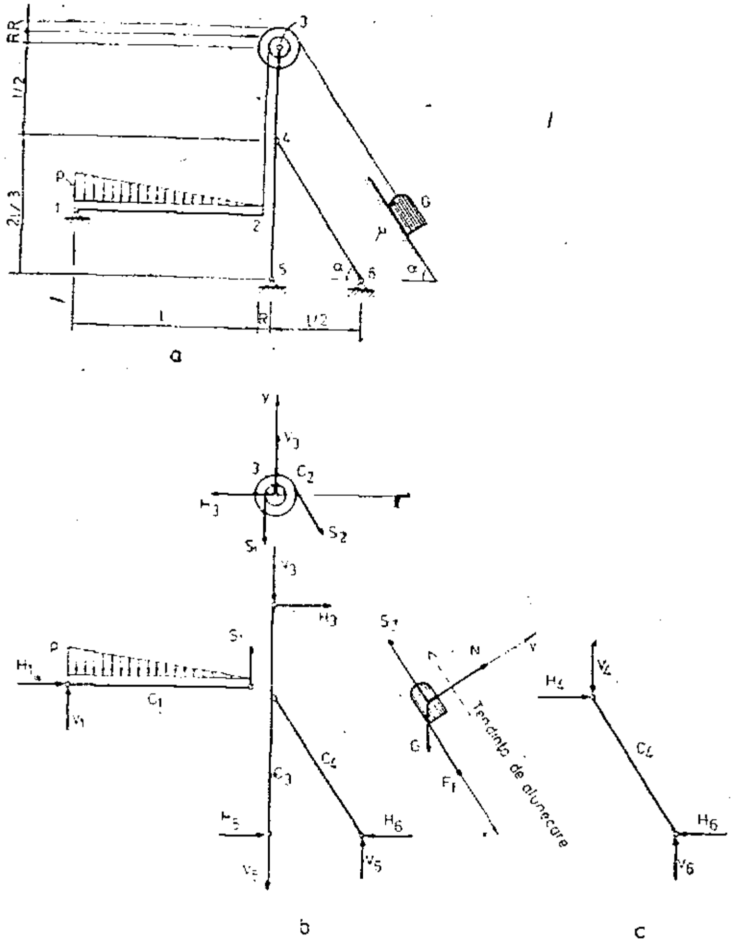


Fig. 3.38.

Corpul 1:

$$\Sigma M_1 = 0; \quad -\left(\frac{1}{2}pl\right)\left(\frac{1}{3}l\right) + S_1 l = 0; \quad S_1 = \frac{1}{6}pl$$

$$\Sigma M_2 = 0; \quad \left(\frac{1}{2}pl\right)\left(\frac{1}{3}l\right) - V_1 l = 0; \quad V_1 = \frac{1}{3}pl$$

$$\Sigma X_i = 0; \quad H_1 = 0.$$

Corpul 2:

$$\Sigma M_3 = 0; \; S_1 R - S_2 2R = 0; \; S_2 = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{12}pl.$$

Punctul material:

Se analizează tendința de alunecare în sus.

$$\Sigma X_i = 0; \; -S_2 + F_f + G\sin\alpha = 0 \text{ sau } F_f = \frac{1}{12}pl - G\sin\alpha$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N - G\cos\alpha = 0;$$

$$F_f \leqslant N.$$

Din relațiile anterioare se obține

$$\frac{1}{12}pl - G\sin\alpha \leqslant \mu G\cos\alpha$$

de unde

$$p \leqslant \frac{12G}{l}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Pentru tendința de alunecare în jos, sensul forței de frecare F_f se schimbă față de cel din fig. 3.38, *b* și prin urmare rezultă

$$\Sigma X_i = 0; \quad -S_2 - F_f + G\sin\alpha = 0; \quad F_f = G\sin\alpha - \frac{pl}{12}$$

și deci

$$G\sin\alpha - \frac{pl}{12} \leqslant \mu G\cos\alpha$$

de unde

$$p \geqslant \frac{12G}{l}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Pentru ca în situația de echilibru sistemul să aibă configurația din fig. 3.38, *a* este deci necesară satisfacerea condiției

$$\frac{12G}{l}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \leqslant p \leqslant \frac{12G}{l}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Se face observația că dacă $\sin\alpha - \mu\cos\alpha \leqslant 0$, adică $\mathrm{tg}\,\alpha \leqslant \mu$, nu se manifestă tendința de alunecare în jos, punctul material fiind autofixat pe planul înclinat.

Pentru determinarea, în continuare, a forțelor de legătură, se utilizează celelalte condiții de echilibru, și anume:

Corpul 2:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -H_3 + S_2\cos\alpha = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad V_3 - S_2\sin\alpha - S_1 = 0.$$

Pentru $\sin\alpha = 0{,}8$ și $\cos\alpha = 0{,}6$ se obțin valorile

$$H_3 = \frac{1}{20}pl; \quad V_3 = \frac{7}{30}pl.$$

În continuare, pentru determinarea reacțiilor H_5, V_5 și H_6, V_6 se solidifică articulația *4* și se exprimă echilibrul părții alcătuite din corpurile C_3 și C_4 astfel:

$$\Sigma M_5 = 0; \; V_6\frac{1}{2}l - H_3\left(\frac{1}{2}l + \frac{2}{3}l\right) = 0 \text{ deci } V_6 = \frac{7}{60}pl$$

$$\Sigma M_6 = 0; -V_5\frac{1}{2}l - H_3\left(\frac{1}{2}l + \frac{2}{3}l\right) + V_3\frac{1}{2}l = 0; \; V_5 = \frac{7}{60}pl.$$

Verificare $\sum Y_i = V_5 + V_6 - V_3 = \frac{7}{60} pl + \frac{7}{60} pl - \frac{7}{30} pl = 0.$

$$\sum M_{4,\,dr} = 0;\ V_6 \frac{l}{2} - H_6 \frac{2}{3} l = 0;\ H_6 = \frac{7}{80} pl$$

$$\sum M_{3,\,st} = 0;\ H_5 \frac{2}{3} l - H_3 \frac{l}{2} = 0;\ H_5 = \frac{3}{80} pl.$$

Verificare $\sum X_i = H_3 + H_5 - H_6 = \frac{1}{20} pl + \frac{3}{80} pl - \frac{7}{80} pl = 0.$

Pentru determinarea forțelor de legătură V_4 și H_4 se izolează corpul 4 (fig. 3.38, c) și se exprimă echilibrul prin ecuațiile

$$\sum X_i = -H_6 + H_4 = 0;\ H_4 = \frac{7}{80} pl$$

$$\sum Y_i = V_6 - V_4 = 0;\ V_6 = \frac{7}{60} pl.$$

Aplicația 3.3. Se cere determinarea reacțiunilor sistemului de corpuri din fig. 3.39, *a*.

Sistemul este static determinat iar necunoscutele problemei sînt forțele de legătură. Pentru determinarea reacțiunilor se izolează grinda *DE* (fig. 3.39, *b*) și se exprimă condițiile scalare de echilibru sub forma

$$\sum X_i = 0;\quad H_D = 0,$$

$$\sum M_E = 0;\ -V_D \cdot 7{,}50 + \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 9{,}00\right) \cdot 4{,}50 - 100 = 0$$

$$V_D = 67{,}67 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0;\quad V_E \cdot 7{,}50 - \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 9{,}00\right) \cdot 3{,}00 - 100 = 0$$

$$V_E = 67{,}33 \text{ kN}.$$

Pentru verificare se utilizează ecuația

$$\sum Y_i = V_D + V_E - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 9{,}00 = 67{,}67 + 67{,}33 - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 9{,}00 = 0.$$

Se examinează, în continuare, echilibrul cadrului cu trei articulații *ABC*, utilizînd procedeul echilibrului părților, solidificîndu-se legătura din articulația *C*.

$$\sum M_B = -16 V_A + 100 \cdot 0{,}866 \cdot 18 - 100 \cdot 0{,}5 \cdot 6 + 20 \cdot 12 \cdot 10 +$$
$$+ 20 \cdot 7 \cdot 0{,}5 + 67{,}67 \cdot 3 = 0$$

$$V_A = 220{,}36 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 16 V_B + 100 \cdot 0{,}866 \cdot 2 - 100 \cdot 0{,}5 \cdot 2 - 20 \cdot 12 \cdot 6 -$$
$$- 20 \cdot 7 \cdot 15{,}5 - 67{,}67 \cdot 19 = 0$$

$$V_B = 313{,}91 \text{ kN}.$$

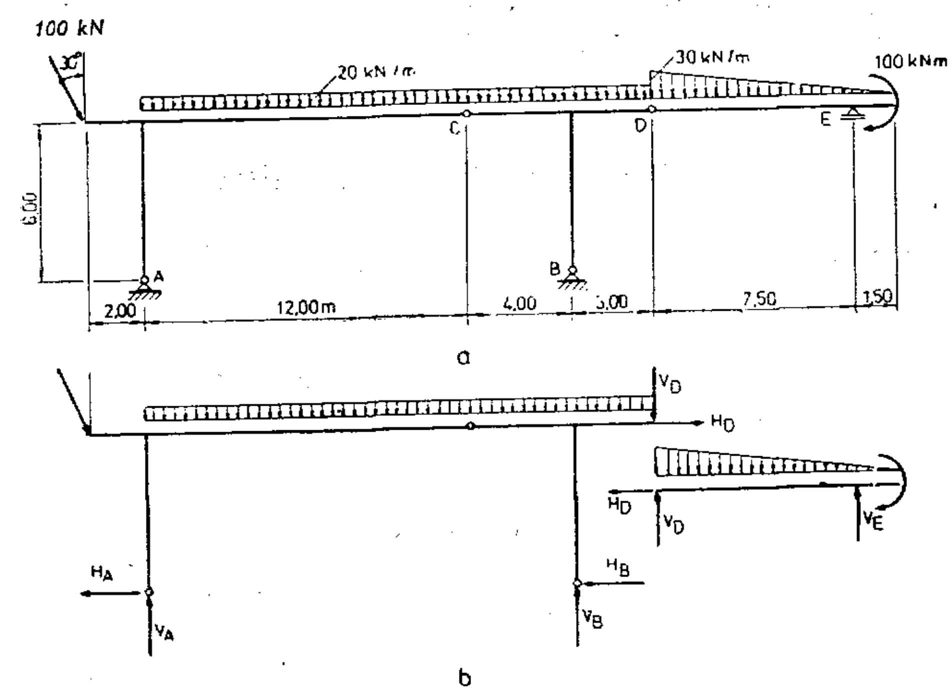


Fig. 3.39.

Verificare:

$$\sum Y_i = V_A + V_B - 100 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot 19 - 67{,}67 = 0.$$

$$\sum M_{c,st} = 0;\ 6H_A + 12V_A - 100 \cdot 0{,}866 \cdot 14 - 20 \cdot 12 \cdot 6 = 0$$

$$H_A = 1{,}34 \text{ kN}.$$

$$\sum M_{c,\,dr} = 0;\ -6H_B + 4V_A + 67{,}67 \cdot 4 + 20 \cdot 7 \cdot 3{,}5 = 0$$

$$H_B = 48{,}66 \text{ kN}.$$

Verificare:

$$\sum X_i = -H_A + H_B + 100 \cdot 0{,}5 = -1{,}34 + 48{,}65 - 50 = 0.$$

4. Elemente de cinematică

Mişcarea unui sistem mecanic este cunoscută, dacă este posibil să se determine, la orice moment de timp t, poziţia în raport cu un sistem de referinţă a oricărui punct al sistemului. Mişcarea se raportează deci la un reper. Dacă punctul material sau corpul îşi schimbă poziţia faţă de reper înseamnă că el este în mişcare în raport cu reperul considerat ; în situaţia că poziţia sistemului mecanic rămîne invariabilă, punctul material sau corpul este în repaus.

Mişcarea raportată la un reper considerat fix se numeşte mişcare absolută. Un sistem de referinţă care se mişcă faţă de reperul presupus fix constituie un reper mobil iar mişcarea unui sistem material în raport cu el este denumită mişcare relativă.

4.1. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

4.1.1. TRAIECTORIE, VITEZĂ, ACCELERAŢIE

Elementele cinematice ale mişcării unui punct material sînt : traiectoria viteza şi acceleraţia.

Traiectoria este locul geometric al poziţiilor succesive ale punctului material în mişcare. Poziţia punctului material, în raport cu reperul O, este precizată prin vectorul de poziţie $\bar{r} = \overline{OM}$, (fig. 4.1). Deoarece poziţia punctului se schimbă în timp, proiecţiile vectorului $\bar{r}$ pe axele Ox, Oy şi Oz sînt funcţii de timp, adică

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \tag{4.1}$$

Funcţiile

$$x = x(t),\ y = j(t),\ z = z(t) \tag{4.2}$$

reprezintă ecuaţiile parametrice ale traiectoriei punctului material şi se numesc ecuaţiile de mişcare ale acestuia. Ele trebuie să fie continue şi cel puţin de două ori derivabile.

Pentru descrierea mişcării punctului material se pot utiliza şi alte sisteme de referinţă. Astfel, în sistemul de coordonate cilindrice (v. fig. 3.1, b) ecuaţiile de mişcare au forma $\theta = \theta(t)$, $\rho = \rho(t)$, $z = z(t)$ iar în coordonate sferice (v. fig. 3.1, c) ele devin $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\rho = \rho(t)$.

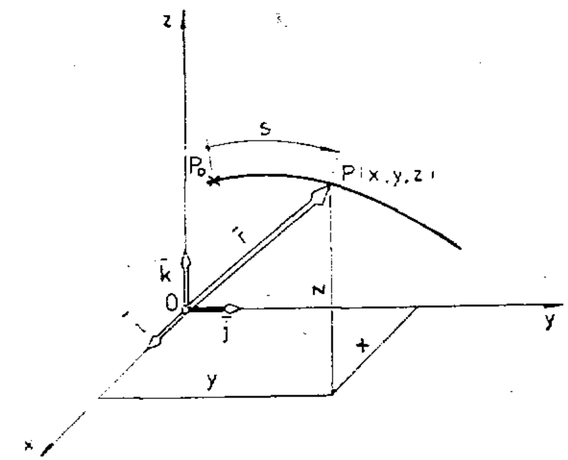


Fig. 4.1

Forma traiectoriei se stabileşte prin eliminarea parametrului t din relaţiile (4.2), ceea ce conduce la ecuaţiile

$$f_1(x, y, z) = 0\ ;\ f_2(x, y, z) = 0 \tag{4.3}$$

reprezentînd o curbă în spaţiu.

Dacă traiectoria punctului este dată sub forma implicită (4.3), pentru cunoaşterea completă a mişcării este necesară precizarea poziţiei punctului pe această curbă. Pentru aceasta, se alege pe curbă un reper P_0 în raport cu care poziţia punctului este dată de coordonata curbilinie $s = s(t)$, această funcţie reprezentînd ecuaţia intrinsecă de mişcare sau legea orară a mişcării. Graficul funcţiei $s = s(t)$ este numit graficul mişcării şi are utilizări practice în cazul mişcării unui punct material pe o traiectorie cunoscută. În acest caz, viteza şi acceleraţia punctului se stabilesc în coordonate naturale (triedrul Frenet).

În cazul particular cînd punctul material este obligat să rămînă tot timpul mişcării într-un plan fix, numărul gradelor sale de libertate se reduce cu o unitate. În consecinţă, mişcarea sa va fi descrisă prin două ecuaţii independente. O formă simplă a acestor ecuaţii se obţine dacă se alege planul xOy al sistemului de referinţă chiar planul în care se mişcă punctul. În această situaţie, ecuaţiile parametrice ale mişcării sînt

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t) \tag{4.4}$$

iar în coordonate naturale mişcarea este definită prin ecuaţiile

$$f(x, y) = 0\ ;\ s = s(t). \tag{4.5}$$

Mişcarea plană a unui punct material poate fi descrisă şi în coordonate polare (fig. 4.2) sub forma

$$\theta = \theta(t),\ \rho = \rho(t). \tag{4.6}$$

Pentru a caracteriza mişcarea unui punct material nu este suficientă numai cunoaşterea traiectoriei. Într-adevăr, două puncte materiale care parcurg aceeaşi traiectorie pot avea mişcări diferite determinate, de exemplu, de timpul necesar pentru parcurgerea unei aceleiaşi zone a traiectoriei.

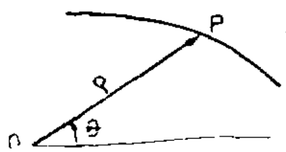


Fig. 4.2

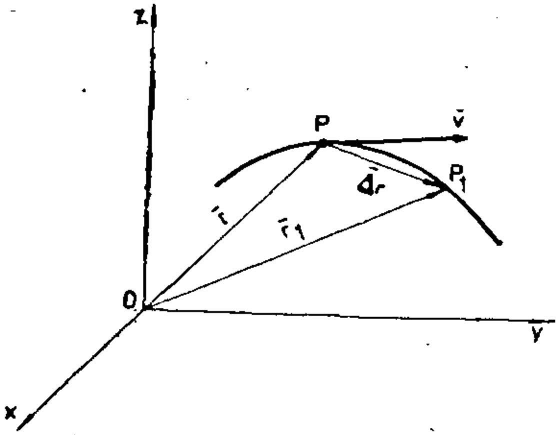


Fig. 4.3

Se consideră două poziții ale punctului material, și anume P și P_1, corespunzătoare momentelor de timp t, respectiv $t + \Delta t$. Prima poziție este precizată prin vectorul $\bar{r} = \overline{OP}$ iar cea de a doua prin vectorul $\bar{r}_1 = \overline{OP}_1$ (fig. 4.3). Deplasarea punctului în intervalul de timp Δt este $\Delta \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{PP}_1$. Prin definiție, se numește *viteză medie a punctului material în intervalul de timp* $(t, t + \Delta t)$ variația vectorului de poziție în unitatea de timp, adică

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}. \tag{4.7}$$

Din relația (4.7) se observă că, în general, viteza medie depinde de intervalul de timp considerat. O caracteristică a mișcării, independentă de intervalul de timp dintre două poziții vecine este viteza instantanee, definită ca limită a raportului $\Delta \bar{r}/\Delta t$ cînd intervalul de timp tinde către zero

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \tag{4.8}$$

Conform relației (4.8), viteza unui punct material la un moment dat este derivata în raport cu timpul a vectorului de poziție, deci

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}^* \tag{4.9}$$

ceea ce, în coordonate carteziene, conduce la

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\,\bar{i} + \frac{dy}{dt}\,\bar{j} + \frac{dz}{dt}\,\bar{k} \tag{4.10}$$

sau

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$$

unde

$$v_x = \dot{x};\quad v_y = \dot{y},\quad v_z = \dot{z}$$

reprezintă proiecțiile vitezei pe axele de coordonate carteziene.

Din fig. 4.3 se observă că dacă $\Delta t \to 0$, $P_1 \to P$ și deci vectorul $\bar{v}$ este tangent la traiectorie, în punctul corespunzător momentului t.

* Derivata în raport cu timpul a unei funcții scalare sau vectoriale se obișnuiește să se noteze cu un punct plasat deasupra mărimii respective.

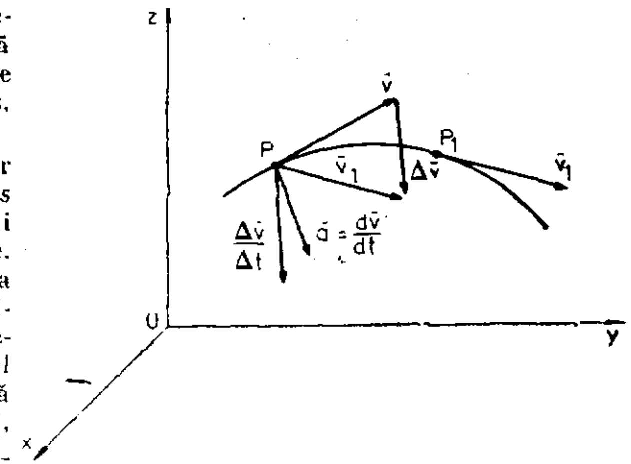


Fig. 4.4

Din definiția (4.8) rezultă ecuația dimensională și unitățile de măsură ale modulului vitezei (m/s, cm/s, km/h).

În studiul fenomenelor mecanice prezintă interes nu numai viteza punctului ci și modul ei de variație. Astfel, principiul al II-lea al mecanicii clasice stabilește legătura dintre accelerația unui punct material și forța care este aplicată asupra sa [v. relația (1.3)], accelerația caracterizînd variația vitezei punctului respectiv. Fie P poziția punctului material la momentul t și o altă poziție P_1 la momentul $t + \Delta t$, vitezele punctului fiind $\bar{v}$ și respectiv $\bar{v}_1$ (fig. 4.4). Variația vitezei în intervalul Δt este $\Delta \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$. Se numește *accelerație medie* în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ cantitatea $\Delta \bar{v}/\Delta t$. Vectorul

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \ddot{\bar{r}} \tag{4.11}$$

reprezintă accelerația punctului material la momentul t. Avînd în vedere expresia vectorului $\bar{r}$ în coordonate carteziene (4.1), rezultă

$$\bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\bar{k} \tag{4.12}$$

sau

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

unde

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x};\quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y};\quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

constituie proiecțiile accelerației într-un *sistem de referință cartezian*.

În sistemul internațional (SI) modulul accelerației se măsoară în m/s².

Unele constatări utile în problemele tehnice se obțin dacă se raportează viteza și accelerația la triedrul lui Frenet. În orice moment de timp acest triedru are originea în punctul studiat, fiind deci un triedru mobil, definit după cum urmează.

Fie o curbă spațială, reprezentînd traiectoria unui punct material. Ea poate fi aproximată printr-o succesiune de arce de cerc, situate în planuri diferite. Se consideră un astfel de segment M_1MM_2, care aproximează curba în vecinătatea punctului M (fig. 4.5). Punctele M_1MM_2 determină întotdeauna un cerc al cărui centru este punctul O și care are raza R. Cu cît arcul M_1MM_2 este mai mic, cu atît aproximarea curbei este mai bună, astfel că, la limită, adică atunci cînd $M_1 \to M$ și $M_2 \to M$ raza R a arcului tinde către o valoare ρ numită raza de curbură în punctul M iar centrul cercului O tinde către un punct C numit centrul de curbură. Planul determinat de punctele M_1,

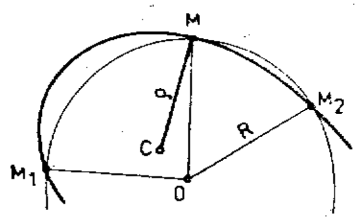


Fig. 4.5

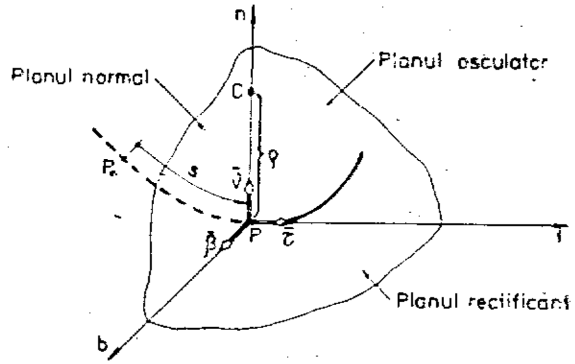


Fig. 4.6

M, M_2 devine, la limită, un plan caracteristic al curbei în punctul M, numit plan osculator. Este evident că centrul de curbură C este conținut în acest plan. De asemenea, la limită, coarda M_1M devine tangentă la curbă. Planul care este perpendicular pe tangenta la curbă este numit plan normal. Al treilea plan, perpendicular atît pe planul normal cît și pe planul osculator constituie planul rectificant (fig. 4.6). Intersecțiile celor trei plane determină triedrul lui Frenet care are ca axe:

— tangenta la curbă t, caracterizată prin versorul $\bar{\tau}$ al cărui sens este dat de sensul coordonatei curbilinii s;

— normala principală n, perpendiculară pe planul rectificant, avînd versorul $\bar{\nu}$ orientat pozitiv spre centrul de curbură;

— binormala b, cu versorul $\bar{\beta}$ al cărui sens este determinat de relația vectorială $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$.

În general, triedrul lui Frenet se folosește atunci cînd traiectoria punctului material este dată sub forma (4.3) iar mișcarea este descrisă prin legea orară $s = s(t)$.

Conform definiției vitezei, rezultă

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \tag{4.13}$$

Din geometria diferențială se cunoaște relația

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau} \tag{4.14}$$

astfel că relația (4.13) devine

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau} \tag{4.15a}$$

ceea ce înseamnă că

$$v_\tau = \dot{s}\ ;\ v_\nu = 0\ ;\ v_\beta = 0 \tag{4.15b}$$

și deci

$$v = \sqrt{v_\tau^2 + v_\nu^2 + v_\beta^2} = \dot{s}.$$

Accelerația se obține pe baza relației (4.11), și anume

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}. \tag{4.16}$$

Dar

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\bar{\nu}}{\rho}\right)\dot{s} = \frac{\dot{s}}{\rho}\bar{\nu}. \tag{4.17}$$

Prin substituirea relației (4.17) în expresia (4.16) rezultă

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{\nu} = \dot{v}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{\nu}. \tag{4.18}$$

Expresia (4.18) pune în evidență componentele accelerației pe axele naturale, și anume:

$$a_\tau = \dot{v}\ ;\ a_\nu = v^2/\rho\ ;\ a_\beta = 0. \tag{4.19}$$

Componenta a_τ a accelerației se numește accelerație tangențială iar componenta a_ν este numită accelerație normală.

Exprimarea accelerației prin componentele sale naturale, sub forma expresiei (4.18), conduce la următoarele observații:

1) Deoarece $a_\beta = 0$, vectorul accelerației este conținut în planul osculator al traiectoriei.

2) Accelerația normală a_ν este o mărime pozitivă sau nulă ($a_\nu \geqslant 0$), deoarece cantitățile v^2 și ρ nu pot fi decît pozitive. Accelerația a_ν este nulă dacă $v = 0$, situație care nu prezintă interes deoarece nu există mișcare, sau dacă $\rho = \infty$, adică traiectoria punctului material este o dreaptă. Accelerația normală este, deci, întotdeauna îndreptată spre centrul de curbură al traiectoriei.

3) Accelerația tangențială a_τ poate fi pozitivă, negativă sau nulă. Dacă $a_\tau = 0$, înseamnă că scalarul vitezei este constant și deci punctul material are o mișcare uniformă.

4.1.2. MIȘCĂRI PARTICULARE ALE PUNCTULUI MATERIAL

Din punct de vedere practic prezintă interes clasificarea mișcărilor punctului material în funcție de forma traiectoriei și de legea orară a mișcării.

După forma traiectoriei, mișcarea poate fi rectilinie sau curbilinie. Legea orară a mișcării clasifică mișcările în mișcări uniforme ($a_\tau = 0$; $v =$ const) și mișcări variate ($a_\tau \neq 0$).

Dintre mișcările particulare, cele mai întîlnite sînt mișcarea rectilinie și mișcarea circulară.

Mișcarea rectilinie. Pentru studiul mișcării se alege traiectoria drept axă Ox astfel că ecuația de mișcare este $x = x(t)$ ceea ce conduce la

$$v = \dot{x}\ ;\ a = \dot{v} = \ddot{x} \tag{4.20}$$

de unde rezultă că viteza și accelerația au aceeași direcție și anume direcția traiectoriei.

Un caz particular îl constituie mișcarea punctului material cu accelerație constantă ($a = a_0$). Pentru a determina expresia vitezei se utilizează relația (4.20), din care rezultă $dv = a_0 dt$, iar prin integrare, se obține

$$v = v_0 + a_0 t \tag{4.21}$$

unde v_0 reprezintă viteza inițială (la $t = 0$). Relația (4.21) servește pentru determinarea, în continuare, a legii de mișcare, astfel:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t \, ; \quad dx = (v_0 + a_0 t)\, dt \tag{4.22}$$

și deci

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + a_0 t)\, dt$$

de unde

$$x = \frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t + x_0. \tag{4.23}$$

Dacă în relația (4.23) se consideră $a_0 = 0$ se obține legea mișcării rectilinii și uniforme.

Mișcarea circulară. Mișcarea unui punct material pe o traiectorie circulară este mai comod de studiat în coordonate naturale.

Fie punctul P a cărui traiectorie este un arc cu rază R și centrul O (fig. 4.7). Legea orară de mișcare este $s = \text{arc}(P_0P) = R\theta$, rezultînd că poziția punctului poate fi, de asemenea, precizată prin unghiul $\theta = \theta(t)$.

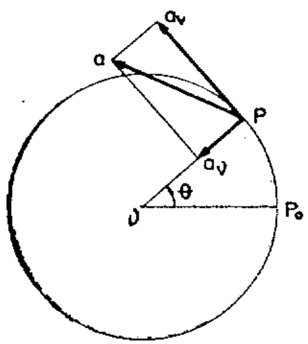


Fig. 4.7

Conform relației (4.15 b), viteza este

$$v = \dot{s} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\dot{\theta} = R\omega. \tag{4.24}$$

Mărimea $\omega = \dot{\theta}$ se numește viteză unghiulară și se măsoară în rad/s (s^{-1}).

Accelerația se determină prin componentele sale a_τ și a_ν pe baza relațiilor (4.19), rezultînd

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R\dot{\omega} = R\ddot{\theta} = R\varepsilon \tag{4.25}$$

$$a_\nu = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \tag{4.26}$$

S-a notat $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, această mărime este numită accelerație unghiulară și se măsoară în rad/s² (s^{-2}).

Mărimea accelerației a se obține prin compunerea geometrică a celor două componente, deci

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{4.27}$$

Se studiază, în continuare, mișcarea circulară uniform variată ($\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$). Stabilirea expresiei vitezei unghiulare și a legii de mișcare urmează o cale similară cu cea de la mișcarea rectilinie uniform variată [relațiile (4.20) — (4.23)], în final rezultînd

$$\omega = \varepsilon_0 t + \omega_0 \tag{4.28 a}$$

$$\theta = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0. \tag{4.28 b}$$

Prin particularizare, relațiile (4.28 a) și (4.28 b) servesc și pentru studiul mișcării circulare uniforme ($\varepsilon_0 = 0$).

4.2. CINEMATICA CORPULUI RIGID

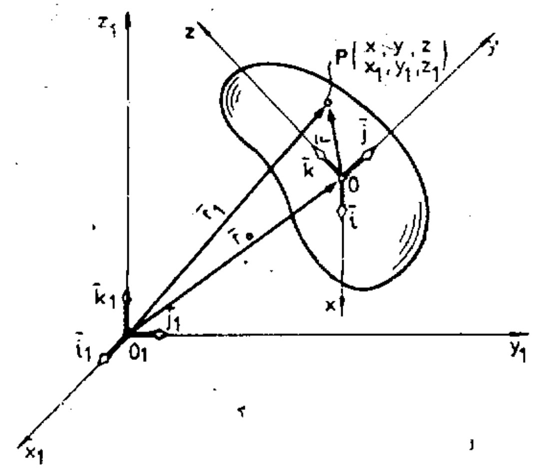


Fig. 4.8

Corpul rigid reprezintă modelul matematic al unui mediu material la care distanța dintre oricare două puncte arbitrare ale sale rămîne invariabilă în timp, indiferent de forțele aplicate asupra sa.

A studia mișcarea unui corp rigid înseamnă a determina, la orice moment de timp, poziția, viteza și accelerația oricărui punct al corpului.

Totalitatea vectorilor viteză, aparținînd punctelor solidului rigid, formează cîmpul vectorial al vitezelor sau distribuția vitezelor. În mod similar, ansamblul vectorilor accelerației constituie cîmpul vectorial al accelerațiilor.

Cunoașterea mișcării unui corp rigid înseamnă, așadar, determinarea pozițiilor tuturor punctelor sale, a cîmpului de viteze și a cîmpului de accelerații, constituind obiectul problemei de bază a cinematicii corpului rigid.

Pentru studiul mișcării sînt utilizate, în general, două sisteme de referință, și anume (fig. 4.8).

— un sistem de referință $Oxyz$, solidar cu corpul, în raport cu care un punct oarecare P al rigidului are coordonatele x, y, z, care rămîn constante în timpul mișcării;

— un sistem fix $O_1x_1y_1z_1$, față de care punctul P are coordonatele x_1, y_1, z_1, variabile în timpul mișcării.

Poziția sistemului mobil este precizată prin vectorul de poziție al originii $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ și prin orientarea versorilor $\bar{i} = \bar{i}(t)$, $\bar{j} = \bar{j}(t)$, $\bar{k} = \bar{k}(t)$. Dacă se cunosc aceste patru mărimi vectoriale, se poate determina poziția punctului P prin vectorul său de poziție $\bar{r}_1$, a cărui expresie este

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{4.29}$$

Fiecare din cei patru vectori este caracterizat prin trei mărimi scalare, și anume proiecțiile pe axele triedrului fix, astfel că, pentru a cunoaște poziția corpului și deci, implicit, a oricărui punct al său, sînt necesare 12 mărimi scalare. Între aceste necunoscute scalare există însă șase relații, rezultate din următoarele condiții:

$$\bar{i}\bar{i} = 1\, ; \ \bar{j}\bar{j} = 1\, ; \ \bar{k}\bar{k} = 1$$

$$\bar{i}\bar{j} = 0\, ; \ \bar{i}\bar{k} = 0\, ; \ \bar{k}\bar{i} = 0 \tag{4.30}$$

ceea ce face ca, efectiv, poziția corpului să fie determinată prin șase parametri independenți.

4.2.1. DISTRIBUȚIA VITEZELOR ȘI A ACCELERAȚIILOR. CLASIFICAREA MIȘCĂRILOR RIGIDULUI

Modelul mecanic de corp rigid impune cîmpului de viteze satisfacerea anumitor condiții deoarece vitezele nu sînt total independente. Fie P_1, P_2 două puncte ale unui astfel de corp și $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ vectorii lor de poziție (fig. 4.9). Conform ipotezei, distanța P_1P_2 dintre cele două puncte rămîne invariabilă în timpul mișcării, deci modulul vectorului $\overline{P_1P_2}$ este constant. Dar vectorul $\overline{P_1P_2}$ poate fi exprimat în funcție de vectorii de poziție ai celor două puncte astfel $\overline{P_1P_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ și deci

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)^2 = c \tag{4.31}$$

unde c este o constantă. Se derivează relația (4.31) în raport cu timpul și se obține

$$2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1) = 0 \tag{4.32}$$

sau, după transformări

$$(\overline{P_1P_2})\,\bar{v}_2 = (\overline{P_1P_2})\bar{v}_1. \tag{4.33}$$

Relația (4.33) conduce la evidențierea unei proprietăți importante a cîmpului vitezelor. În acest scop, se exprimă vectorul $\overline{P_1P_2}$ în funcție de versorul $\bar{u}$ al său, adică $\overline{P_1P_2} = \bar{u}\,|\overline{P_1P_2}|$ și se substituie în relația (4.33) care, după simplificare, devine

$$\bar{u}\bar{v}_2 = \bar{u}\bar{v}_1. \tag{4.34}$$

Cei doi termeni ai egalității (4.34) reprezintă proiecțiile vectorilor $\bar{v}_2$ și $\bar{v}_1$ pe direcția determinată de punctele P_1 și P_2 ceea ce conduce la următoarea proprietate a cîmpului vitezelor:

Pentru oricare două puncte ale unui corp rigid proiecțiile vitezelor acestor puncte pe dreapta determinată de punctele respective sînt egale și au același sens (fig. 4.10).

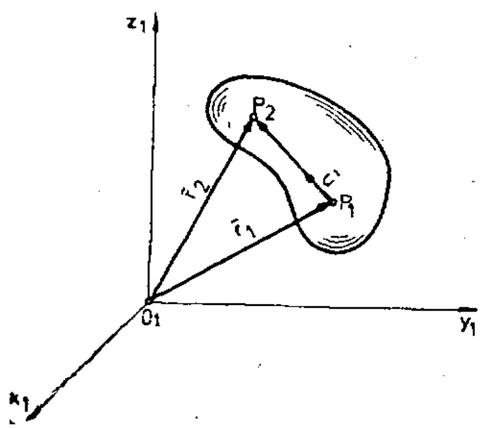


Fig. 4.9

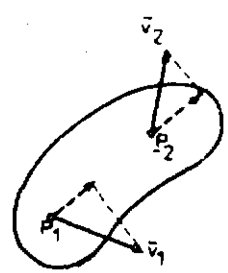


Fig. 4.10

Proprietatea exprimată prin relația (4.33) servește la determinarea cîmpului vitezelor, și anume ea se aplică la punctele O și P (fig. 4.8) sub forma echivalentă

$$\overline{OP}(\bar{v}_p - \bar{v}_0) = 0. \tag{4.35}$$

În afara cazului că $\overline{OP}$ este nul, situație care nu prezintă interes practic, relația (4.35) este verificată dacă $\bar{v}_p - \bar{v}_0 = 0$ sau dacă vectorul $\overline{OP}$ este perpendicular pe vectorul $(\bar{v}_p - \bar{v}_0)$ ambele cazuri regăsindu-se într-o relație de forma

$$(\bar{v}_p - \bar{v}_0) = \bar{\omega} \times \overline{OP} \tag{4.36}$$

în care $\bar{\omega}$ este un vector numit viteză unghiulară.

Din relația (4.36) rezultă expresia generală a vitezei unui punct curent P al corpului

$$\bar{v}_p = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP}. \tag{4.37}$$

În concluzie, pentru determinarea cîmpului de viteze este necesară cunoașterea a doi vectori, și anume:

$\bar{v}_0$ — viteza unui punct al corpului;

$\bar{\omega}$ — viteza unghiulară, acest vector fiind un vector liber, care caracterizează mișcarea întregului rigid.

O altă proprietate a cîmpului vitezelor rezultă dacă ambii membri ai relației (4.37) se înmulțesc scalar cu vectorul $\bar{\omega}$, obținîndu-se

$$\bar{v}_p\bar{\omega} = \bar{v}_0\bar{\omega}. \tag{4.38}$$

Relația (4.38) arată că produsul $\bar{v}\bar{\omega}$ reprezintă un invariant al mișcării avînd deci aceeași valoare pentru toate punctele corpului.

Între relația (4.37) și relația (2.17), referitoare la variația momentului unui sistem de forțe la schimbarea punctului de reducere, există o analogie formală. În mod analog cu operația de reducere a unui sistem de forțe, mișcarea unui solid rigid prezintă două mărimi invariante atunci cînd se trece de la viteza unui punct P la viteza altui punct P', și anume invariantul vectorial $\bar{\omega}_0$ și invariantul scalar $\bar{\omega}\bar{v}$. O clasificare a mișcărilor solidului rigid se poate face în funcție de invarianții mișcării și este prezentată în tabelul 4.1 punîndu-se în evidență mișcările particulare (simple).

Cîmpul accelerațiilor se obține pe baza relației (4.37), avînd în vedere definiția exprimată prin relația (4.11), astfel

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP}) \tag{4.39}$$

care, după efectuarea derivării, devine

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{OP} + \bar{\omega} \times \dot{\overline{OP}}. \tag{4.40}$$

Pentru a calcula derivata în raport cu timpul a vectorului $\overline{OP}$ se are în vedere relația (4.36) al cărui membru stîng are forma

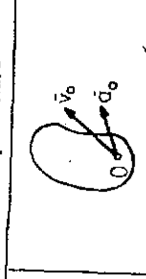
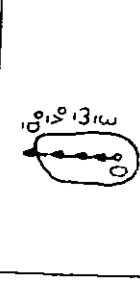
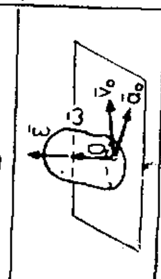
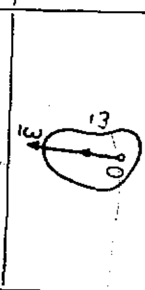
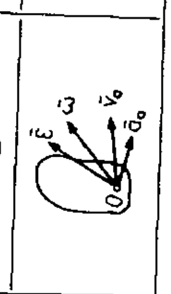
$$\bar{v}_p - \bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}_p - \dot{\bar{r}}_0 = \frac{d}{dt}(\bar{r}_p - \bar{r}_0) = \frac{d}{dt}(\overline{OP}) = \dot{\overline{OP}} \tag{4.41}$$

și deci

$$\dot{\overline{OP}} = \bar{\omega} \times \overline{OP} \tag{4.42}$$

Tabelul 4.1

Clasificarea mişcărilor solidului rigid

Caracteristicile mişcării $\bar{\omega}$	$\bar{v}_0$	$\bar{\omega}\bar{v}_0$	Reprezentare	Numărul gradelor de libertate	Denumirea mişcării	Observaţii
$\omega = 0$	$v_0 \neq 0$	0		3	Mişcare de translaţie	
$\omega \neq 0$	$v_0 = 0$	0		1	Mişcare de rotaţie cu axă fixă	$\bar{\omega}$ şi $\bar{\varepsilon}$ sînt coliniari cu o axă fixă definită prin versorul $\bar{u}$ $\bar{\omega} = \omega\bar{u}$; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{u}$
$\omega \neq 0$	$v_0 = 0$	0		3	Mişcare sferică (Rigid in punct fix)	$\bar{\omega}$ are direcţie oarecare, variabilă în timp
$\omega \neq 0$	$v_0 \neq 0$	0		3	Mişcare plan paralelă	$\bar{v}_0$ şi $\bar{a}_0$ sînt conţinute tot timpul mişcării într-un plan fix
$\omega \neq 0$	$\bar{v}_0 \neq 0$	$\bar{\omega}\bar{v}_0 \neq 0$		2	Mişcare elicoidală	$\bar{v}_0$ şi $\bar{\omega}$ sînt coliniari cu o axă fixă, definită prin versorul $\bar{u}$ $\bar{v}_0 = v_0\bar{u}$; $\bar{\omega} = \omega\bar{u}$
$\omega \neq 0$	$v_0 \neq 0$	$\bar{\omega}\bar{v}_0 \neq 0$		6	Mişcare generală	$\bar{\omega}$, $\bar{v}_0$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{a}_0$ au direcţii oarecare, variabile în timp

care, înlocuită în relaţia (4.40) şi avînd în vedere că $\dot{\bar{\omega}} = \bar{\varepsilon}$, conduce la expresia cîmpului acceleraţiilor

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \overline{OP} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OP}). \tag{4.43}$$

Rezultă deci că distribuţia acceleraţiilor este determinată dacă se cunoaşte acceleraţia unui punct al corpului şi viteza unghiulară $\bar{\omega}$.

În cazul mişcărilor simple ale rigidului, arătate în tabelul 4.1, expresiile (4.37) şi (4.43) ale cîmpului vitezelor, respectiv al acceleraţiilor, devin mai simple, în concordanţă cu particularităţile mişcării.

4.2.2. MIŞCĂRI PARTICULARE ALE SOLIDULUI RIGID

Cunoaşterea cîtorva mişcări particulare ale rigidului prezintă interes în ingineria de construcţii în legătură cu unele operaţii de montaj, în care apare necesitatea lansării, ripării, ridicării etc. unor elemente de construcţie, subansambluri sau construcţii în totalitatea lor.

Mişcarea de translaţie. Un rigid este în mişcare de translaţie dacă orice segment de dreaptă aparţinînd corpului rămîne paralel cu el însuşi pe tot timpul mişcării. Conform clasificării din tabelul 4.1 rigidul în mişcarea de translaţie prezintă $\omega = 0$ şi $v_0 \neq 0$.

Distribuţia vitezelor este dată de expresia (4.37) în care $\omega = 0$ deci $\bar{v}_p = \bar{v}_0$, ceea ce înseamnă că, la un moment dat, toate punctele corpului au acelaşi vector al vitezei (fig. 4.11). Din expresia (4.43) rezultă că acceleraţia tuturor punctelor este la un moment dat, de asemenea, aceeaşi. Se face observaţia că, atît viteza cît şi acceleraţia variază în timp, dar nu variază de la un punct la altul al corpului în mişcare.

Fie A şi B două puncte ale rigidului. Deoarece $\bar{v}_A = \bar{v}_B$, adică $\dot{\bar{r}}_A = \dot{\bar{r}}_B$, se obţine, prin integrare, următoarea relaţie între vectorii de poziţie ai punctelor respective

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{c}. \tag{4.44}$$

Constanta vectorială $\bar{c}$ se determină prin particularizarea expresiei (4.44) pentru momentul de timp $t = t_0$, astfel că rezultă $\bar{c} = \overline{AB}$ şi deci

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \tag{4.45}$$

ceea ce înseamnă că, dacă se cunoaşte traiectoria unui punct al corpului, se poate determina traiectoria oricărui alt punct printr-o translaţie geometrică. Studiul mişcării se reduce, aşadar, la studiul mişcării unui singur punct al

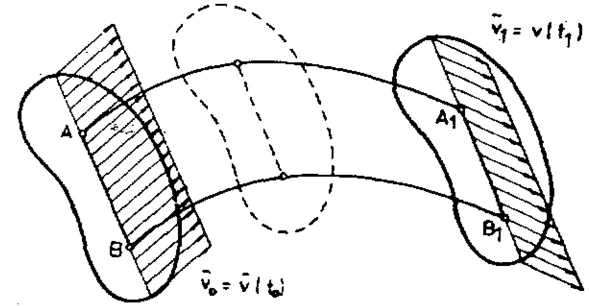


Fig. 4.11

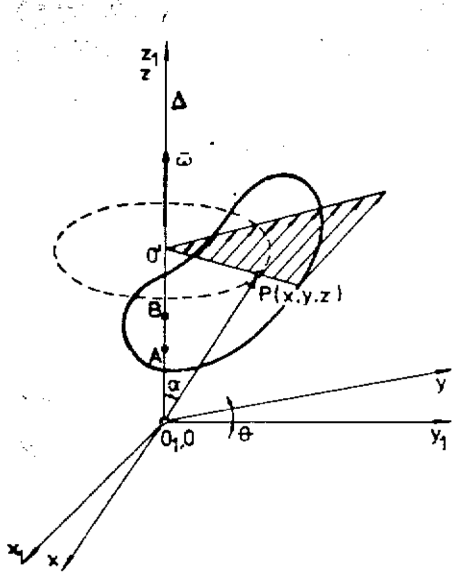


Fig. 4.12

corpului deoarece, aşa cum s-a arătat, toate punctele au aceeaşi viteză şi aceeaşi accelerație cu cele ale punctului studiat, iar traiectoriile sînt curbe identice, obținute prin translații geometrice. În funcție de forma traiectoriei unui punct al corpului translațiile se clasifică în rectilinii şi curbilinii iar după legea orară de mişcare pot fi uniforme sau variate.

Mişcarea de rotație cu axă fixă. În mişcarea de rotație cu axă fixă două puncte solidare cu corpul sau aparținînd corpului rămîn (convențional) fixe tot timpul mişcării. Fie A şi B punctele cu viteza nulă (fig. 4.12) şi un alt punct C situat pe dreapta AB. Relația (4.37) are forma $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$ şi deoarece $\bar{v}_B = \bar{v}_A = 0$ iar $\bar{\omega} \neq 0$ şi $A \neq B$ rezultă $\bar{\omega} \parallel \overline{AB}$. Viteza punctului C este $\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AC}$. Dar $\overline{AC}$ este coliniar cu $\overline{AB}$ şi deci $\overline{AC} \parallel \bar{\omega}$ fapt ce conduce la $v_C = 0$ şi deci la concluzia că toate punctele corpului situate pe dreapta AB au viteza nulă. În timpul mişcării, corpul prezintă o axă Δ care rămîne fixă, numită axă de rotație, această axă fiind definită de punctele cu viteză nulă. Pentru studiul mişcării se aleg cele două triedruri astfel încît atît axa O_1z_1 cît şi Oz să coincidă cu axa fixă Δ. În acest caz, viteza unghiulară are expresia $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$ iar $\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ astfel că distribuția vitezelor dată de expresia (4.37) este

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{OP} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \tag{4.46}$$

care, după dezvoltarea determinantului, devine

$$\bar{v} = (-\omega y)\bar{i} + (\omega x)\bar{j} \tag{4.47a}$$

de unde rezultă

$$v_x = -\omega y\,;\ v_y = \omega x\,;\ v_z = 0 \tag{4.47b}$$

şi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega\sqrt{y^2 + x^2} = \omega \cdot \overline{O'P}. \tag{4.48}$$

Din relațiile (4.47) şi (4.48) rezultă următoarele proprietăți ale cîmpului de viteze:

— componentele v_z sînt toate nule, ceea ce înseamnă că viteza unui punct oarecare este conținută în planul normal pe axa de rotație, plan căruia îi aparține şi punctul respectiv;

— modulul vitezei este proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație;

— viteza nu depinde de coordonata z a punctului astfel că, pentru studiul mişcării, se poate proiecta corpul pe planul $x_1O_1y_1$ şi studia mişcarea proiecțiilor punctelor corpului în acest plan.

Pentru a determina traiectoria unui punct oarecare P se face observația că, în timpul mişcării, unghiul α dintre vectorul de poziție $\overline{O_1P}$ şi axa de rotație Δ se menține constant. Deoarece nici modulul $\overline{O_1P}$ nu variază, rezultă că punctul descrie o traiectorie circulară, cu raza $O'P = O_1P \sin\alpha$ situată într-un plan normal pe axa de rotație. Această constatare conduce la concluzia că accelerația punctului P se poate stabili ca la mişcarea circulară şi prezintă următoarele caracteristici:

— este coplanară cu viteza punctului;

— în coordonate naturale, ataşate traiectoriei punctului P, prezintă două componente, acestea fiind accelerația tangențială $a_\tau = (O'P)\varepsilon$ şi accelerația normală $a_\nu = (O'P)\omega$ şi deci $a = (O'P)\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$, unde $\varepsilon = \dot{\omega}$.

Mişcarea plan-paralelă. Un rigid efectuează o mişcare plan-paralelă dacă tot timpul mişcării un plan Π, solidar cu corpul, alunecă pe un plan fix Π_0, numit planul mişcării (fig. 4.13).

Oricare punct al corpului are o mişcare plană iar punctele situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul Π_0 au mişcări identice dar cu traiectoriile situate în plane paralele. Astfel, punctele P şi P_1 efectuează aceeaşi mişcare ($\bar{v} = \bar{v}_1$, $\bar{a} = \bar{a}_1$) şi au traiectoriile identice situate însă în planele Π şi respectiv Π_1. Toate punctele corpului aparținînd dreptei determinate de punctele P şi P_1 au aceeaşi mişcare cu a acestora. Rezultă deci că, pentru cunoaşterea mişcării corpului, este suficient să se studieze mişcarea punctelor dintr-un singur plan şi anume din oricare plan paralel cu planul fix. Pentru aceasta, se consideră triedrul fix $O_1x_1y_1z_1$ cu axele O_1x_1, O_1y_1 în planul fix Π_0 şi un triedru mobil $Oxyz$, ataşat corpului, ale cărui axe Ox şi Oy sînt, de asemenea, conținute în planul Π_0 (fig. 4.14). Poziția triedrului mobil în raport cu triedrul fix este precizată prin trei mărimi scalare, acestea fiind funcții de timp, şi anume coordonatele x_{10}, y_{10} ale originii sistemului mobil şi unghiul θ dintre axele Ox şi O_1x_1, adică

$$x_{10} = x_{10}(t)\,;\ y_{10} = y_{10}(t)\,;\ \theta = \theta(t). \tag{4.50}$$

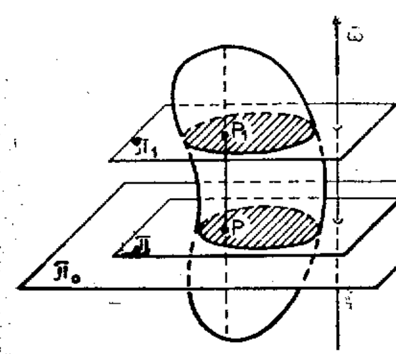


Fig. 4.13

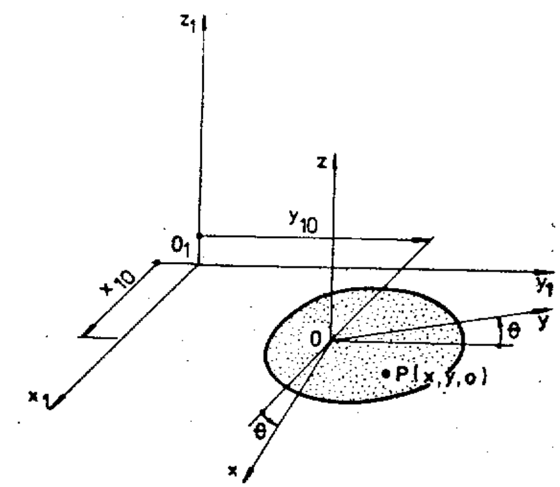


Fig. 4.14

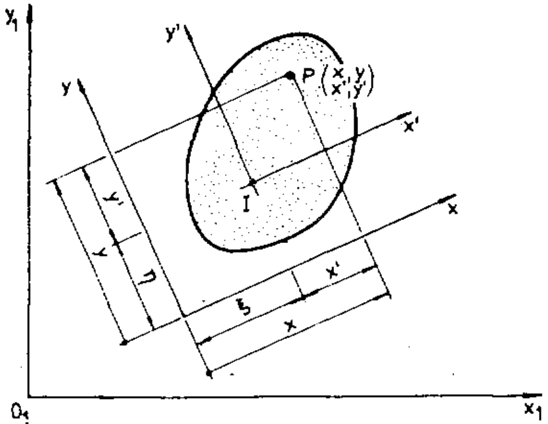


Fig. 4.15

Din modul de alegere a triedrului mobil rezultă că viteza unghiulară are numai componentă pe axa Oz, deci $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$ şi, în consecinţă, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon\bar{k}$, în care $\omega = \dot{\theta}$ şi $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Deoarece originea triedrului mobil se mişcă, de asemenea, în planul Oxy, viteza sa este conţinută în acest plan şi deci, exprimată vectorial, are forma

$$\bar{v}_0 = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} \tag{4.51}$$

astfel că, în conformitate cu expresia (4.37), cîmpul de viteze devine

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP} = v_{0x}\bar{i} + v_{0y}\bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix}. \tag{4.52}$$

Dezvoltarea calculelor din relaţia (4.52) conduce la determinarea expresiilor proiecţiilor pe axe ale vitezei, astfel

$$v_x = v_{0x} - y\omega \; ; \; v_y = v_{0y} + x\omega \tag{4.53}$$

în care v_{0x}, v_{0y} şi ω sînt funcţii de timp.

Din comparaţia relaţiilor (4.53) cu (4.47 b) se face observaţia că distribuţia de viteze rezultă prin suprapunerea a două mişcări instantanee şi anume o translaţie caracterizată prin viteza $\bar{v}_0$ şi o mişcare de rotaţie, cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, în jurul unei axe Oz. Datorită acestei suprapuneri va exista deci în planul xOy un punct care, la un moment dat, are viteza nulă. Fie I acest punct şi ξ, η coordonatele sale. Determinarea lor se face utilizînd expresiile (4.53), care devin

$$0 = v_{0x} - \eta\omega \; ; \; 0 = v_{0y} + \xi\omega$$

şi conduc la

$$\xi = -\frac{v_{0y}}{\omega} \; ; \; \eta = \frac{v_{0x}}{\omega}. \tag{4.54}$$

Pentru a da o interpretare cinematică acestui punct particular, se face o translaţie a triedrului mobil în aşa fel încît originea lui să fie în punctul I, obţinîndu-se un nou triedru mobil $Ix'y'$ (fig. 4.15). Din translaţia axelor rezultă următoarele relaţii între coordonatele unui punct P în cele două sisteme de coordonate

$$x = \xi + x' \; ; \; y = \eta + y' \tag{4.55}$$

sau

$$x = -\frac{v_{0y}}{\omega} + x' \; ; \; y = \frac{v_{0x}}{\omega} + y'. \tag{4.56}$$

Aceste expresii ale coordonatelor x şi y se înlocuiesc în relaţiile (4.53) rezultînd

$$v_x = -y'\omega \; ; \; v_y = x'\omega \tag{4.57}$$

expresii care sînt similare cu cele obţinute la mişcarea de rotaţie cu axă fixă (4.47 b). Prin urmare, distribuţia de viteze în mişcarea plan-paralelă este identică cu cea a unei mişcări în care rigidul s-ar roti cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe care trece prin punctul I şi este normală pe planul fix Π_0. Această axă este numită axă instantanee de rotaţie iar punctul I se numeşte centru instantaneu de rotaţie (CIR). Axa instantanee de rotaţie este, aşadar, locul geometric al punctelor cu viteza nulă. Ecuaţiile parametrice ale acestei drepte sînt expresiile (4.54). Se face menţiunea că poziţia axei instantanee de rotaţie şi, în consecinţă, cea a centrului instantaneu de rotaţie variază în timp, deoarece $\xi = \xi(t)$ şi $\eta = \eta(t)$.

În concluzie, pentru determinarea cîmpului de viteze este necesar să se cunoască :

— centrul instantaneu de rotaţie (CIR) ;
— viteza unghiulară ω, ca valoare şi sens.

Faţă de CIR distribuţia de viteze este dată de expresiile (4.57) astfel că

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{x'^2 + y'^2} = \omega \cdot IP \tag{4.58}$$

iar direcţia vitezei este normală pe segmentul IP, numit rază instantanee de rotaţie (fig. 4.16).

Pentru determinarea CIR se utilizează metode grafo-analitice fiind frecvent întîlnite următoarele situaţii :

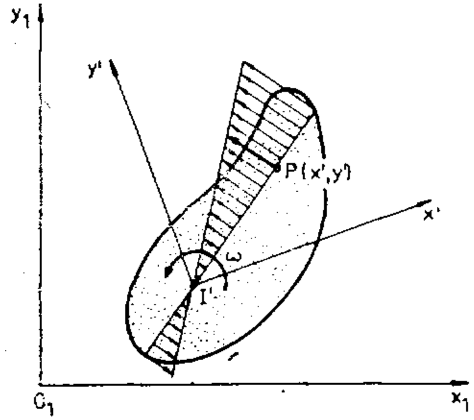


Fig. 4.16

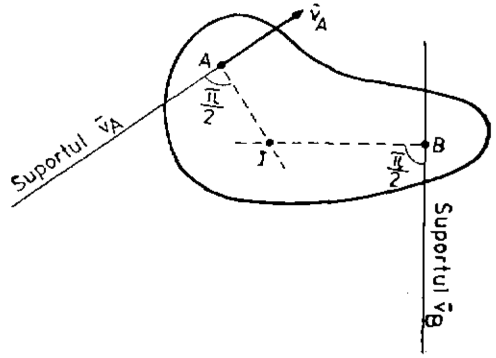


Fig. 4.17

Cazul I. Se cunosc direcţiile vitezelor a două puncte (A, B) ale corpului. Avînd în vedere că $\bar{v}_A \perp \overline{IA}$ şi $\bar{v}_B \perp \overline{IB}$, centrul instantaneu se va găsi la intersecţia perpendicularelor ridicate din punctele A şi B pe suporturile vitezelor respective (fig. 4.17). Pentru cunoaşterea completă a mişcării, în vederea determinării cîmpului vitezelor, este necesară fie precizarea vitezei unghiulare ω, fie cunoaşterea, în plus, a mărimii şi sensului vitezei unuia din cele două puncte ale corpului. De exemplu, dacă este dată viteza punctului A ($\bar{v}_A$), atunci $\omega = v_A/IA$ iar sensul vitezei unghiulare trebuie să fie în concordanţă cu sensul vitezei $\bar{v}_A$.

În aplicarea acestei metode sînt posibile unele situații particulare, și anume:

— cele două viteze au aceeași direcție, ceea ce înseamnă că suporturile lor sînt paralele și deci perpendicularele duse pe aceste suporturi sînt, de asemenea, paralele (fig. 4.18, *a*). În acest caz, CIR se găsește la infinit, pe direcția comună a perpendicularelor ($IA = \infty$) și, în consecință, $\omega = 0$. Corpul are o mișcare de translație și deci toate punctele au aceeași viteză;

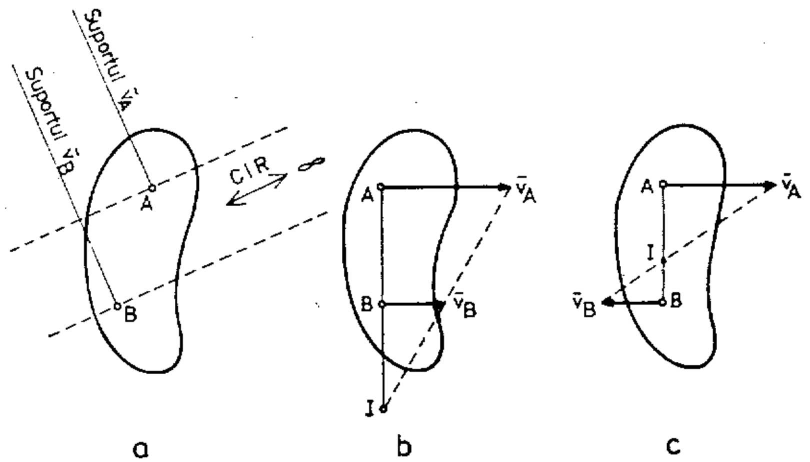


Fig. 4.18

— cele două puncte au vitezele paralele și, în plus față de cazul precedent, segmentul AB este perpendicular pe direcția vitezelor, fapt care face ca perpendicularele din A și B să se confunde, iar centrul I să fie nedeterminat. Pentru a fi posibilă determinarea CIR devine necesară cunoașterea vitezelor ambelor puncte, așa cum se arată în fig. 4.18, *b*, *c*. Justificarea construcției grafice cu ajutorul căreia se stabilește CIR este dată de următoarele relații:

$$v_A = \omega \cdot IA\,; \quad v_B = \omega \cdot IB$$

și deci

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{IA}{IB}. \tag{4.59}$$

Cazul II. Sînt cunoscute viteza unui punct al corpului, $\bar{v}_A$, și viteza unghiulară ω. Din punctul A, a cărui viteză este cunoscută, se duce perpendiculara pe direcția vitezei $\bar{v}_A$ (fig. 4.19). Pe această semidreaptă se măsoară segmentul $AI = v_A/\omega$ de acea parte a suportului vitezei $\bar{v}_A$, în așa fel încît sensul vitezei unghiulare și sensul vitezei punctului A să fie concordante.

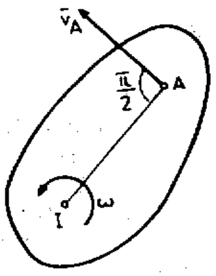


Fig. 4.19

Pentru determinarea cîmpului accelerațiilor se utilizează expresia generală (4.43), avîndu-se în vedere că orice punct efectuează o mișcare plană și prin urmare accelerația are componente numai în planul xOy. Ca și la distribuția de viteze, se poate arăta că, la orice moment de timp, există un punct H, numit centrul accelerațiilor,

a cărui accelerație este nulă. În sistemul de axe xOy, coordonatele acestui punct au expresiile

$$\xi_H = \frac{a_{0x}\omega^2 - a_{0y}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \eta_H = \frac{a_{0y}\omega^2 + a_{0x}\varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{4.60}$$

În raport cu acest punct, distribuția de accelerații este ca și cînd solidul rigid s-ar roti în jurul unei axe Δ, care trece prin centrul accelerațiilor și care este perpendiculară pe planul fix Π_0. Aceasta înseamnă că accelerația unui punct oarecare P al corpului poate fi descompusă în două componente, și anume:

— accelerația tangențială

$$a_\tau = HP \cdot \varepsilon\,; \tag{4.60a}$$

— accelerația normală

$$a_\nu = HP \cdot \omega^2 \tag{4.60b}$$

și deci

$$a = HP\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

4.2.3. MIȘCAREA GENERALĂ A CORPULUI RIGID

Cîmpul vitezelor este dat de relația generală (4.37). În conformitate cu această expresie, distribuția instantanee a vitezelor într-o mișcare oarecare poate fi interpretată ca o sumă vectorială a două cîmpuri de viteze, și anume:

— un cîmp constant de viteze $\bar{v}_0$, produs de o translație instantanee împreună cu punctul O al corpului;

— un cîmp de viteze corespunzător unei mișcări de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe care trece prin punctul O și care este coliniară cu vectorul $\bar{\omega}$.

Se face observația că vectorul $\bar{\omega}$ este un vector liber și ca atare el rămîne neschimbat dacă, în locul punctului O, se ia un alt punct de referință O'.

4.3. CINEMATICA SISTEMELOR MECANICE

4.3.1. CARACTERIZAREA DINAMICĂ A UNUI SISTEM MECANIC. GRADE DE LIBERTATE DINAMICĂ

Caracterizarea sistemelor mecanice alcătuite din puncte materiale și/sau corpuri rigide a fost prezentată în paragraful 3.5.1.

Există fenomene mecanice care nu pot fi studiate însă pe baza modelului de corp rigid, ca atare este necesar să se aibă în vedere deformabilitatea corpurilor reale. Din categoria acestor fenomene fac parte și acelea în care se dezvoltă forțe elastice, definite conform relației (1.7). Un exemplu îl reprezintă mișcările pe care le au structurile pentru construcții cînd sînt supuse la acțiuni dinamice, adică la forțe și perturbații care variază rapid în timp (mișcări seismice, convoaie rutiere și de cale ferată, mașini și utilaje în mișcare etc.). În aceste cazuri, caracterizarea statică și geometrică, bazată pe modelul mecanic de corp rigid, devine incompletă și de aceea este necesară extinderea

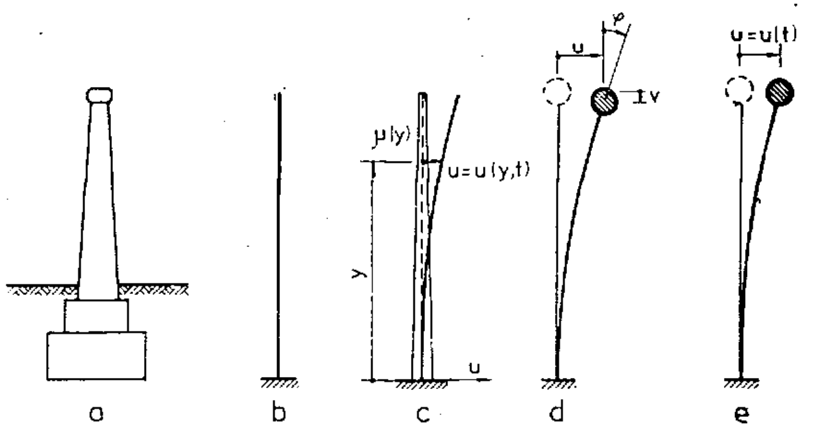


Fig. 4.20

noțiunii de grad de libertate la structurile elastice (deformabile). Comportarea unui sistem elastic la acțiuni dinamice este determinată, printre alți factori, de numărul și distribuția maselor. Din punctul de vedere al calculului la acțiuni dinamice, prezintă interes parametrii independenți necesari pentru a preciza poziția tuturor maselor în orice moment t al mișcării. Numărul acestor parametri constituie numărul gradelor de libertate dinamică ale unui sistem mecanic. Avînd în vedere că acest număr este egal cu cel al deplasărilor independente pe care le pot avea masele, o altă definiție a numărului gradelor de libertate se referă la numărul minim de legături simple necesare pentru a fixa toate masele sistemului, adică pentru blocarea (anularea) tuturor deplasărilor distincte. Modelarea exactă a corpurilor reale conduce la sisteme dinamice cu un număr infinit de grade de libertate și aceasta deoarece masa corpurilor este distribuită în tot volumul lor. Totuși, în foarte multe cazuri, pentru scopuri practice, se poate studia mișcarea considerînd un număr finit de grade de libertate. Astfel, pila de pod din fig. 4.20,*a*, modelată ca solid rigid, se prezintă ca în fig. 4.20,*b* și este deci invariabilă din punct de vedere geometric ($G_l = 0$). Considerată însă ca un element elastic, cu masă distribuită pe înălțime după legea $\mu = \mu(y)$, are un număr infinit de grade de libertate, și anume deplasările tuturor secțiunilor sale (fig. 4.20,*c*). Pentru scopuri practice, dacă înălțimea pilei nu este prea mare, se poate concentra masa la capătul superior, situație în care poziția masei este determinată numai de trei parametri, și anume translațiile u, v și rotirea măsurată prin unghiul φ. Se constată însă că deplasarea verticală v, cauzată de deformarea axială a barei, este mult mai mică în raport cu deplasarea orizontală u, generată de deformarea prin încovoiere a pilei și ca atare translația v este neglijabilă. De asemenea, admițînd că masa este concentrată, deci prezintă caracteristicile unui punct material, rotirea φ nu mai reprezintă un parametru geometric al poziției masei. În consecință, este considerat drept grad de libertate semnificativ numai translația pe orizontală u, acesta reprezentînd gradul de libertate dinamică. Pe baza acestor constatări sînt puse în evidență în fig. 4.21, *a—d*, spre exemplificare, gradele de libertate dinamică ale unor sisteme elastice, indicîndu-se prin legături simple numărul și natura acestor grade de libertate.

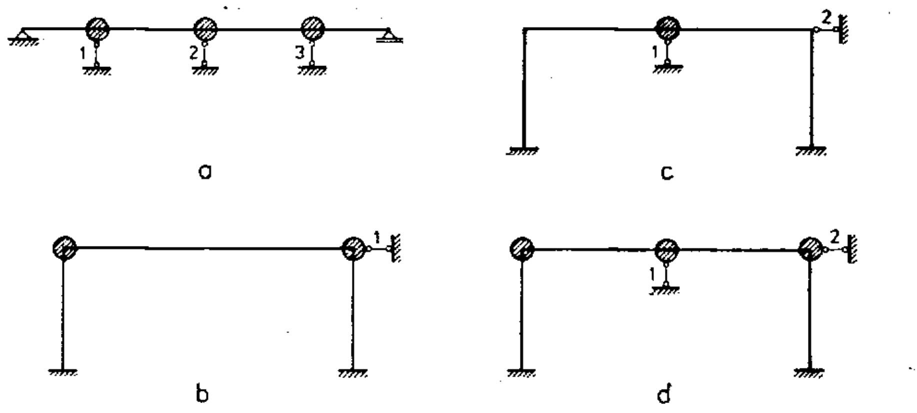


Fig. 4.21

În concluzie, caracterizarea geometrică a sistemelor elastice, în vederea studiului comportării lor la acțiuni dinamice, este mai complexă decît a sistemelor de corpuri rigide și are un caracter aproximativ. În timp ce la sisteme de corpuri rigide relațiile (3.47, a, b) evaluează în mod riguros numărul gradelor de libertate, în cazul sistemelor elastic-deformabile numărul și natura gradelor de libertate dinamică depind de o serie de factori, și anume: complexitatea și importanța sistemului examinat, posibilitatea utilizării calculului automat, gradul de aproximare a soluției obținute în raport cu soluția exactă etc. Din aceste motive, modelarea judicioasă a sistemelor reale și caracterizarea lor geometrică, în vederea analizei la acțiuni dinamice, prezintă o mai mare importanță decît în cazul acțiunilor statice.

4.3.2. CARACTERIZAREA CINEMATICA A UNUI SISTEM MECANIC. PARAMETRI CINEMATICI

Așa cum s-a arătat în paragraful 3.5.1, configurația unui mecanism este determinată printr-un ansamblu de parametri geometrici, al cărui număr este egal cu numărul gradelor de libertate al sistemului. Parametrii geometrici sînt alcătuiți din distanțe și unghiuri, astfel că poziția mecanismului, la un moment dat, este stabilită în raport cu o configurație inițială. Pe lîngă parametrii geometrici, un mecanism este caracterizat prin parametrii săi cinematici, aceștia servind pentru stabilirea distribuției instantanee a vitezelor.

În general, parametrii cinematici sînt dați de derivatele în raport cu timpul ale parametrilor geometrici. De aceea, numărul lor este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului. Un exemplu este arătat în fig. 4.22 și se referă la parametrii cinematici ai unui corp care are o mișcare plană. Dacă se aleg ca parametri geometrici, coordonatele x_A, y_A și unghiul θ, parametrii

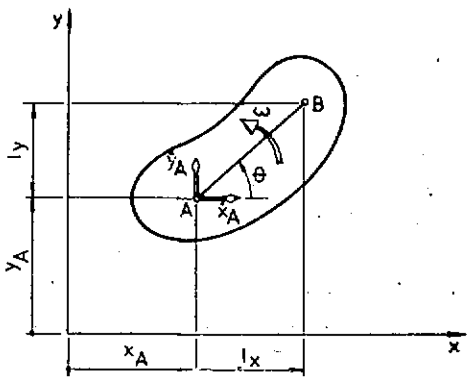


Fig. 4.22

cinematici pot fi vitezele $\dot{x}_A$, $\dot{y}_A$ şi viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$. În acest fel viteza oricărui alt punct al corpului se exprimă în funcţie de aceşti parametri. Într-adevăr, avînd în vedere că $\dot{x}_A$ şi $\dot{y}_A$ reprezintă proiecţiile vitezei punctului A, rezultă că vectorul $\bar{v}_A$ este determinat, iar pe baza relaţiei (4.37) se obţine

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB},$$

sau, prin componentele sale

$$\dot{x}_B = \dot{x}_A - \omega l_y ; \quad \dot{y}_B = \dot{y}_A + \omega l_x.$$

În particular, cîmpul de viteze al unui mecanism cu un grad de libertate este definit printr-un singur parametru cinematic, acesta fiind fie scalarul vitezei unui punct, fie viteza unghiulară a unui corp din sistem.

4.3.3. MECANISME PLANE CU UN GRAD DE LIBERTATE

În numeroase aplicaţii din Mecanica construcţiilor apare necesitatea studiului mecanismelor plane cu un grad de libertate, în scopul determinării configuraţiei sistemului ca urmare a impunerii unei deplasări elementare (infinit mică) sau a unei deplasări finite asimilată cu o astfel de mărime, aceasta putînd fi reală sau virtuală.

Aşa cum s-a arătat în paragraful 4.2.2, mişcarea plană a unui corp este complet precizată prin cunoaşterea poziţiei centrului instantaneu de rotaţie (CIR) şi a vitezei unghiulare ω. Pentru studiul mişcării unui sistem de corpuri trebuie deci să se determine centrele instantanee de rotaţie şi vitezele unghiulare ale tuturor corpurilor, după care fiecare corp poate fi examinat individual.

Distribuţia instantanee a vitezelor unui corp care intră în alcătuirea unui mecanism plan rezultă ca şi cînd corpul s-ar roti în jurul centrului său instantaneu de rotaţie. La sistemele de corpuri, mişcarea oricărui corp component poate fi raportată atît la un reper convenţional fix, acelaşi pentru întreg sistemul, situaţie în care mişcarea este absolută iar centrul instantaneu corespunzător se numeşte centru absolut de rotaţie, cît şi la un reper mobil, solidar cu un alt corp din sistem, caz în care mişcarea se numeşte relativă iar centrul instantaneu respectiv se cheamă centru relativ de rotaţie al celor două corpuri. Prin urmare, fiecare corp dintr-un mecanism plan prezintă un centru instantaneu absolut de rotaţie şi cîte un centru instantaneu relativ de rotaţie în raport cu fiecare dintre celelalte corpuri componente ale sistemului.

Dacă două corpuri sînt legate direct printr-o articulaţie, atunci aceasta este chiar centrul lor relativ şi reprezintă deci centrul instantaneu de rotaţie al unuia din cele două corpuri considerînd celălalt corp drept reper. În continuare se va nota cu $(0,1)$, $(0,2)$, ..., $(0,n)$ centrele absolute de rotaţie ale corpurilor I, II, ..., N şi cu $(1,2)$, $(1,3)$, ..., $(1,n)$, $(2,3)$, $(2,4)$, ..., $(2,n)$ etc., centrele relative de rotaţie ale corpurilor I-II, I-III, ..., I-N, II-III, II-IV, ..., II-N etc. Poziţiile centrelor instantanee de rotaţie (absolute şi relative) constituie o caracteristică a configuraţiei sistemului de corpuri şi se bucură de anumite proprietăţi geometrice. Pentru a stabili aceste proprietăţi se examinează două corpuri (I şi II) dintr-un mecanism plan. Se presupun cunoscute centrul lor relativ $(1,2)$ şi centrul absolut al unuia din

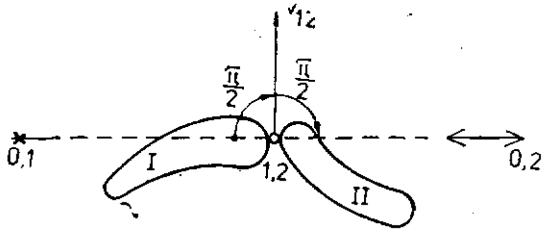


Fig. 4.23

cele două corpuri, de exemplu centrul $(0,1)$ (fig. 4.23). Deoarece punctul $(1,2)$ aparţine corpului I, viteza sa este perpendiculară pe dreapta determinată de punctele $(1,2)$ şi $(0,1)$. În acelaşi timp însă punctul $(1,2)$ aparţine şi corpului II, fapt care face ca raza $(1,2)-(0,2)$ să fie perpendiculară pe direcţia vitezei $\bar{v}_{12}$. Rezultă deci că centrul absolut $(0,2)$ se găseşte pe perpendiculara ridicată din punctul $(1,2)$ pe direcţia vitezei $\bar{v}_{12}$. Se observă că, în punctul $(1,2)$ s-au dus două semidrepte, ambele perpendiculare pe aceeaşi direcţie, şi anume direcţia vitezei $\bar{v}_{12}$, ceea ce înseamnă că cele două semidrepte sînt în prelungire. Această constatare pune în evidenţă următoarea proprietate geometrică care constituie teorema de coliniaritate a centrelor instantanee de rotaţie: *două corpuri dintr-un mecanism plan au centrele instantanee de rotaţie absolută şi centrul lor relativ coliniare.*

Proprietatea geometrică enunţată mai înainte se exprimă simbolic sub forma $(0,1)-(1,2)-(0,2)$.

O variantă a teoremei de coliniaritate a centrelor instantanee rezultă dacă se examinează trei corpuri dintr-un mecanism plan, de exemplu corpurile I, II şi III (fig. 4.24). Se presupun cunoscute două din centrele lor relative, în cazul prezentat în fig. 4.24 acestea fiind centrele $(1,2)$ şi $(2,3)$.

Într-o primă fază se analizează mişcarea corpurilor II şi III în raport cu un reper solidar cu corpul I. Dacă corpul I este considerat convenţional fix, mişcările corpurilor II şi III apar ca mişcări absolute şi ca atare centrele lor absolute şi cu centrul lor relativ sînt coliniare $(0,2)-(2,3)-(0,3)$. Revenind la reperul iniţial, corpul I este el însuşi în mişcare faţă de acest reper şi, în această circumstanţă, centrele $(0,2)-(0,3)$ sînt de fapt centrele relative $(1,2)$ şi $(1,3)$ astfel că relaţia de coliniaritate devine $(1,2)-(2,3)-(1,3)$. Prin interpretarea acestei ultime condiţii rezultă următoarea proprietate: *pentru trei corpuri ale unui sistem plan, centrele lor relative de rotaţie, considerate două cîte două, sînt coliniare.*

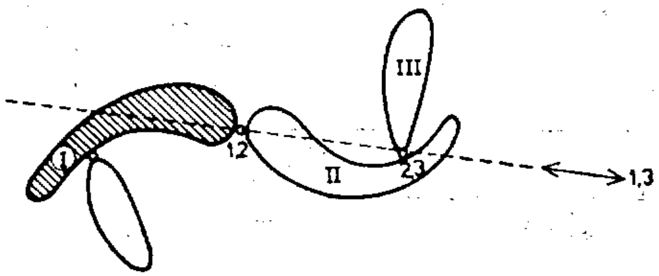


Fig. 4.24

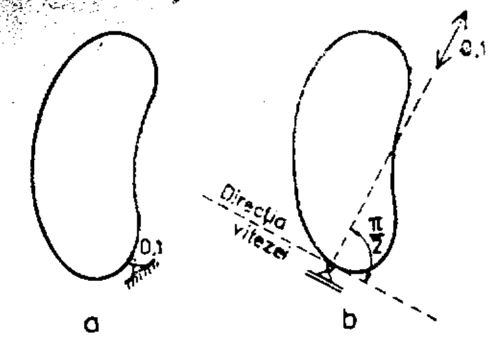


Fig. 4.25

Cele două formulări ale teoremei de coliniaritate, împreună cu alte observații privind poziția centrelor instantanee, servesc pentru determinarea tuturor centrelor de rotație ale unui mecanism plan. Se face precizarea că pentru un număr de C corpuri care intră în compunerea mecanismului, numărul total al centrelor relative este $C(C-1)/2$, la acestea adăugîndu-se centrele absolute (în raport cu baza de sprijinire), numărul acestora fiind egal cu numărul corpurilor. De regulă, pentru studiul mișcării nu este necesară determinarea tuturor centrelor relative, deoarece, așa cum s-a arătat, cunoașterea centrelor absolute și a vitezelor unghiulare este suficientă pentru determinarea distribuției vitezelor. În legătură cu determinarea centrelor de rotație, în afara celor prezentate, sînt necesare următoarele observații:

— un corp articulat cu baza sa de rezemare are centrul absolut în articulație (fig. 4.25, *a*);

— centrul absolut al unui corp care prezintă un reazem simplu se află pe suportul normalei la reazemul respectiv (fig. 4.25,*b*).

În aplicarea practică a teoremei coliniarității se identifică, într-o primă etapă, centrele instantanee care rezultă în mod evident, după care se determină celelalte centre instantanee. Pentru exemplificare se studiază mișcarea instantanee a mecanismului din fig. 4.26, cunoscîndu-se viteza unghiulară a corpului I și anume $\omega_1 = \omega$. Inițial rezultă, în mod evident, două din centrele absolute, reprezentate de reazemele articulate ale corpurilor I și III, și patru centre relative, respectiv $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$. Centrul absolut $(0,2)$ se

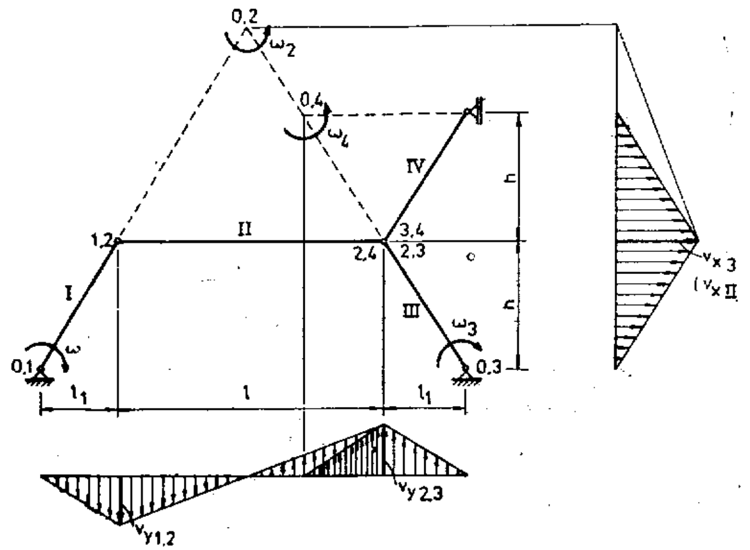


Fig. 4.26

obține avînd în vedere coliniaritatea acestuia atît cu centrele $(0,1)-(1,2)$ cît și cu centrele $(0,3)-(2,3)$. Sub formă simbolică aceste condiții geometrice se exprimă astfel:

$$(0,2)\begin{cases}(0,1)-(1,2)-(0,2)\\(0,3)-(2,3)-(0,2).\end{cases}$$

În mod similar se determină centrul absolut $(0,4)$ după cum urmează

$$(0,4)\begin{cases}(0,3)-(3,4)-(0,4)\\\text{perpendiculară pe reazemul simplu al corpului } IV.\end{cases}$$

Pentru stabilirea vitezelor unghiulare ale tuturor corpurilor se face uz de corelațiile cinematice dintre aceste mărimi. Astfel, corpul I, a cărui viteză unghiulară este cunoscută, prezintă o distribuție de viteze în conformitate cu relațiile (4.57), astfel că pentru punctul $(1,2)$ se obține

$$v_{y1,2} = l_1\omega.$$

Avînd în vedere însă că acest punct aparține și corpului II, rezultă

$$v_{y1,2} = l\omega_2/2$$

și deci $\omega_2 = 2l_1\omega/l$. În continuare, pe baza unui raționament similar, se obține relația dintre vitezele unghiulare ale corpurilor II și III, obținîndu-se $l_1\omega_3 = l\omega_2/2$ de unde $\omega_3 = \omega$. Din diagrama proiecțiilor v_x se calculează apoi viteza unghiulară a corpului IV, rezultînd $\omega_4 = \omega$. Sensurile vitezelor unghiulare sînt precizate în fig. 4.26. Cunoscînd componentele v_x și v_y ale tuturor punctelor sistemului de corpuri se poate determina viteza totală a oricărui punct prin compunerea geometrică a celor două proiecții.

În unele probleme din Mecanica construcțiilor interesează deplasările instantanee ale unui mecanism plan, adică deplasările acestuia într-un interval elementar de timp dt. Fie un corp în mișcare plană, al cărui centru instantaneu este I și care are viteza unghiulară ω (fig. 4.27). Se studiază mișcarea instan-

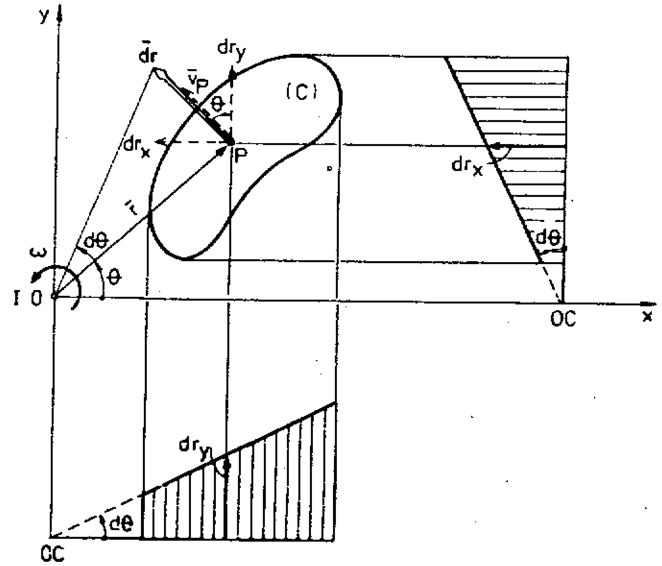


Fig. 4.27

tanee a acestui corp în intervalul de timp dt. Pentru aceasta se consideră un punct oarecare P şi se alege drept reper chiar centrul instantaneu I. În conformitate cu definiţia vitezei există relaţia

$$\overline{dr} = \bar{v}\, dt \tag{4.61}$$

ceea ce înseamnă că, dat fiind faptul că mărimea dt este un scalar, variaţia vectorului de poziţie este coliniară cu viteza punctului. În mişcarea plană $\bar{v}_P \perp IP$ şi în consecinţă $\overline{dr} \perp IP$. Deoarece, conform relaţiei (4.58), $v_P = \omega \cdot IP$, rezultă mărimea deplasării elementare sub forma

$$dr = (\omega \cdot IP)\, dt = IP(\omega\, dt). \tag{4.62}$$

Cantitatea ($\omega\, dt$) reprezintă variaţia coordonatei polare θ şi este tocmai rotirea instantanee a corpului în jurul centrului său I, şi deci

$$dr = (IP)\, d\theta. \tag{4.63}$$

Fie x şi y coordonatele punctului P într-un sistem de referinţă care are originea în punctul I. Proiecţiile deplasării elementare dr pe axele O_x şi O_y sînt

$$dr_x = dr \sin\theta\, ;\ dr_y = dr \cos\theta \tag{4.64}$$

care, avînd în vedere expresia (4.63), devin

$$dr_x = -(IP \sin\theta)\, d\theta\, ;\ \ dr_y = (IP \cos\theta)\, d\theta \tag{4.65}$$

sau

$$dr_x = -y\, d\theta\, ;\ dr_y = x\, d\theta \tag{4.66}$$

relaţii care se puteau obţine şi direct, pe baza expresiilor (4.57), prin multiplicarea acestora cu scalarul dt.

Din expresiile (4.66) rezultă următoarele concluzii:

— proiecţiile deplasărilor elementare pe axele de coordonate au variaţie liniară, fiind proporţionale cu distanţele pînă la centrul instantaneu absolut de rotaţie şi cu unghiul de rotire elementar $d\theta$;

— centrul instantaneu absolut are deplasarea nulă (punctul OC pe cele două diagrame);

— diagrama proiecţiilor deplasărilor are aceeaşi configuraţie cu cea a diagramei vitezelor, ordonatele acestor două diagrame fiind proporţionale, factorul de proporţionalitate fiind scalarul dt;

— deplasarea totală a unui punct se obţine din valorile componentelor sale şi este

$$dr = \sqrt{dr_x^2 + dr_y^2}. \tag{4.67}$$

Se face observaţia că deplasarea dr poate fi o deplasare instantanee efectivă sau poate fi o deplasare finită, dar foarte mică în comparaţie cu dimensiunile generale ale sistemului de corpuri şi prin urmare asimilabilă cu un infinit mic în raport cu acestea.

5. Elemente de dinamică şi de mecanică analitică

Dinamica studiază mişcările efective ale sistemelor mecanice (puncte şi/sau corpuri) sub acţiunea forţelor aplicate asupra acestora.

Din punctul de vedere al aspectului lor, problemele de dinamică se clasifică în două tipuri fundamentale şi anume:

1) Sînt precizate forţele aplicate asupra sistemului, proprietăţile inerţiale, configuraţia şi starea iniţiale ale acestuia, urmărindu-se determinarea mişcării mecanice pe care o va avea sistemul.

2) Se cunoaşte mişcarea sistemului şi se cer forţele care generează această mişcare.

Dinamica îşi bazează metodele şi procedeele de studiu pe principiile mecanicii newtoniene şi pe o serie de *noţiuni fundamentale* şi *teoreme generale*.

5.1. NOŢIUNI FUNDAMENTALE ŞI TEOREME GENERALE

Mişcarea mecanică a unui sistem este determinată atît de forţele aplicate cît şi de mărimea şi distribuţia maselor sistemului. De aceea, în continuare, vor fi definite mărimile care caracterizează din punct de vedere inerţial sistemele mecanice, intervenind în studiul mişcării acestora.

5.1.1. MOMENTE DE INERŢIE

Definiţii. Proprietăţi. Fie un sistem de n puncte materiale $P_i (i = 1, n)$, ale căror mase sint m_i $(i = 1, n)$, avînd poziţiile determinate în raport cu un sistem de axe $Oxyz$ prin coordonatele x_i, y_i, z_i $(i = 1, n)$ (fig. 5.1, *a*).

Pentru a caracteriza distribuţia maselor acestui sistem se definesc următoarele mărimi:

— *Momentul de inerţie în raport cu un plan*, al unui punct material de masă m_i, este produsul dintre masa punctului şi pătratul distanţei pînă la acest plan. Momentul de inerţie al unui sistem de puncte materiale este suma momentelor de inerţie ale tuturor componentelor sistemului. Conform definiţiei rezultă:

— momentul de inerţie în raport cu planul xOy

$$J_{xOy} = m_i z_i^2\, ; \tag{5.1 a}$$

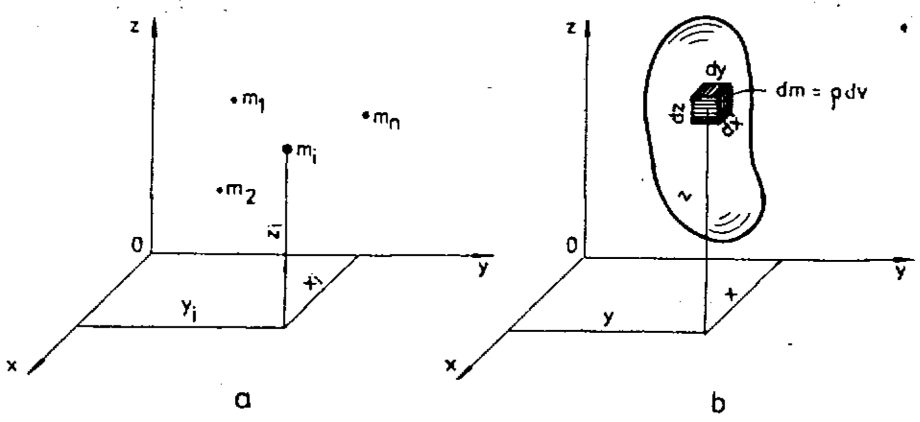


Fig. 5.1

— momentul de inerţie în raport cu planul yOz

$$J_{yOz} = m_i x_i^2 ; \tag{5.1b}$$

— momentul de inerţie în raport cu planul zOx

$$J_{zOx} = m_i y_i^2 . \tag{5.1c}$$

În cazul unui corp rigid, expresiile momentelor de inerţie se obţin considerînd un volum elementar de masă $dm = \rho\, dV$, astfel că expresiile (5.1 a, b, c), ajung la forma

$$J_{xOy} = \int_V z^2\, dm = \int_V z^2 \rho\, dV \tag{5.2a}$$

$$J_{yOz} = \int_V x^2\, dm = \int_V x^2 \rho\, dV \tag{5.2b}$$

$$J_{zOx} = \int_V y^2\, dm = \int_V y^2 \rho\, dV \tag{5.2c}$$

unde s-a notat cu ρ densitatea materialului din care este alcătuit corpul.

— *Momentul de inerţie în raport cu o axă* reprezintă produsul dintre masa punctului material şi pătratul distanţei pînă la axă. Conform acestei definiţii, momentele de inerţie axiale ale unui sistem de puncte materiale au următoarele expresii:

$$\begin{aligned} J_x &= \Sigma\, m_i(y_i^2 + z_i^2) \\ J_y &= \Sigma\, m_i(z_i^2 + x_i^2) \\ J_z &= \Sigma\, m_i(x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pentru un corp rigid, expresiile (5.3) devin

$$\begin{aligned} J_x &= \int_V (y^2 + z^2)\, dm = \int_V (y^2 + z^2)\rho\, dV \\ J_y &= \int_V (z^2 + x^2)\, dm = \int_V (z^2 + x^2)\rho\, dV \\ J_z &= \int_V (x^2 + y^2)\, dm = \int_V (x^2 + y^2)\rho\, dV. \end{aligned} \tag{5.4}$$

— *Momentul de inerţie în raport cu un pol (polar)* este produsul dintre masa punctului material şi pătratul distanţei pînă la pol. Dacă polul

coincide cu originea sistemului de referinţă, atunci momentul de inerţie polar al sistemului de puncte materiale este:

$$J_0 = \Sigma\, m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \tag{5.5}$$

iar al corpului

$$J_0 = \int_V (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\, dm = \int_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho\, dV. \tag{5.6}$$

— *Momentele de inerţie centrifugale* au următoarele expresii:

— sistem de puncte materiale

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \Sigma\, m_i x_i y_i \\ J_{yz} &= \Sigma\, m_i y_i z_i \\ J_{zx} &= \Sigma\, m_i z_i x_i ; \end{aligned} \tag{5.7}$$

— corp continuu

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_V xy\, dm = \int_V xy\rho\, dV ; \\ J_{yz} &= \int_V yz\, dm = \int_V yz\rho\, dV ; \\ J_{zx} &= \int_V zx\, dm = \int_V zx\rho\, dV. \end{aligned} \tag{5.8}$$

În legătură cu definiţiile momentelor de inerţie se fac următoarele observaţii:

— momentele de inerţie planare şi cele axiale sînt mărimi scalare pozitive, fiind nule numai în unele situaţii particulare privind configuraţia sistemului mecanic (de exemplu, un sistem de puncte materiale situate în acelaşi plan are nul momentul de inerţie în raport cu planul comun al punctelor);

— momentul de inerţie polar este o cantitate strict pozitivă;

— momentele de inerţie centrifugale pot fi negative, nule sau pozitive. Dacă una din axele în raport cu care se defineşte momentul de inerţie este axă de simetrie, atunci momentul centrifugal este nul;

— între momentele de inerţie se stabilesc următoarele relaţii:

$$J_0 = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{zOx} = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_{zOx} + J_{xOy} \\ J_y &= J_{xOy} + J_{yOz} \\ J_z &= J_{yOz} + J_{zOx} ; \end{aligned} \tag{5.10}$$

— din punct de vedere dimensional momentul de inerţie mecanic este

$$[J] = ML^2 \tag{5.11}$$

ceea ce face ca în sistemul internaţional unitatea de măsură să fie $kg \cdot m^2$;

— avînd în vedere ecuaţia dimensională (5.11), momentele de inerţie planare, axiale şi polare se pot exprima sub forma

$$J = Mi^2 \tag{5.12}$$

unde M reprezintă masa întregului sistem mecanic şi are expresiile: pentru sistem de puncte materiale $M = \Sigma\, m_i$; pentru corp continuu $M = \int_V dm$;

— la corpuri uni- și bidimensionale, definițiile și expresiile momentelor de inerție se simplifică dacă triedrul de referință se alege astfel încît să se aibă în vedere particularitățile sistemului mecanic, așa cum s-a procedat în cazul centrelor de greutate.

Relația (5.12) pune în evidență cantitatea

$$i = \sqrt{\frac{J}{M}} \tag{5.13}$$

numită rază de girație și care se interpretează ca fiind distanța față de un plan, o axă sau un pol, la care ar trebui concentrată întreaga masă a sistemului astfel încît momentul de inerție respectiv al acestui punct imaginar să rămînă același cu cel al sistemului real.

Pentru exemplificare, se calculează caracteristicile inerțiale ale unei bare drepte, omogene, cu secțiune constantă și de lungime l (fig. 5.2, *a*). Bara are densitatea liniară ρ_l constantă. Se alege sistemul de axe astfel încît axa Ox să coincidă cu axa barei. În raport cu acest triedru, toate momentele de inerție sînt nule cu excepția momentelor de inerție J_{yOz} și J_0 care au expresiile

$$J_0 = J_{yOz} = \int x^2 \, dm.$$

Deoarece $dm = \rho_l \, dx$ rezultă

$$J_0 = \rho_l \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = \rho_l \cdot \frac{l^3}{3}.$$

Observînd că masa barei este $M = \rho_l l$ se obține

$$J_0 = \frac{Ml^2}{3}. \tag{5.14}$$

Conform definiției (5.13) raza de girație în raport cu punctul O este

$$i_0 = \sqrt{\frac{l^2}{3}}.$$

În mod similar se procedează pentru corpurile bidimensionale; un exemplu îl constituie o placă omogenă și cu grosime constantă, avînd forma unui disc circular cu raza R (fig. 5.2, *b*).

Se consideră sistemul de referință cu originea în centrul discului, astfel încît planul xOy coincide cu planul discului. În aceste circumstanțe se observă

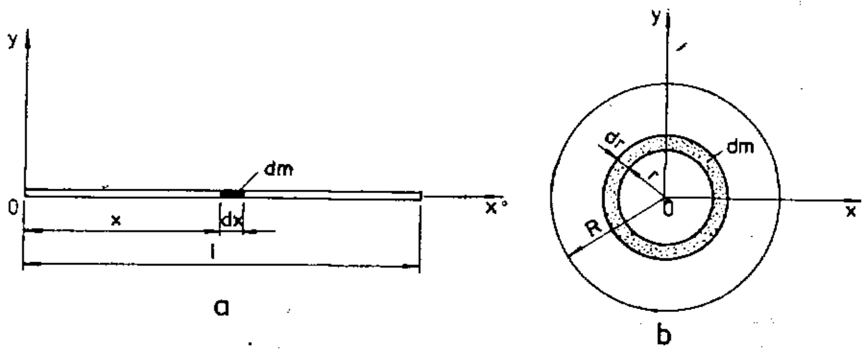


Fig. 5.2

că $J_{xOy} = 0$ și $J_{yz} = J_{zx} = 0$. Deoarece axele Ox și Oy sînt axe de simetrie, momentele axiale Jx și Jy sînt egale iar momentul centrifugal J_{xy} este nul.

Pentru calculul momentului de inerție polar elementul de placă se alege sub forma unei coroane circulare cu lățimea dr astfel că masa elementară este $dm = \rho_s \, dA$, unde ρ_s este densitatea superficială, adică masa unei plăci cu aria egală cu unitatea.

Deoarece $dA = 2\pi r \, dr$ și $x^2 + y^2 = r^2$, momentul de inerție polar are expresia

$$J_0 = \int_0^R (r^2)(2\pi r \rho_s \, dr) = 2\pi\rho_s \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\pi\rho_s R^4}{2}$$

sau

$$J_0 = \frac{MR^2}{2} \tag{5.15}$$

unde $M = \pi R^2 \rho_s$ reprezintă masa discului.

Raza de girație corespunzătoare momentului polar în raport cu centrul discului este $i_0 = R/\sqrt{2}$.

Avînd în vedere relația (5.9) și faptul că $J_x = J_y$ se pot determina aceste momente de inerție pe baza expresiei (5.15) obținîndu-se $J_x = J_y = MR^2/4$.

Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele. Pentru calculul practic al momentelor de inerție ale unui corp cu formă complicată apare necesitatea de a determina momentul de inerție în raport cu o axă Δ_1, cunoscîndu-se momentul de inerție în raport cu o altă axă Δ, paralelă cu axa dată. O astfel de situație este prezentată în fig. 5.3 unde se presupune că se cunoaște momentul de inerție al corpului C în raport cu axa Δ, notat cu J_Δ. Fie deci axa Δ_1, paralelă cu axa Δ, situată la distanță d față de aceasta. Se urmărește determinarea momentului de inerție axial cînd se trece de la axa Δ la axa Δ_1. Pentru aceasta se duce un plan Π, perpendicular pe direcția comună a celor două axe și se consideră elementul de masă dm situat în acest plan. Dacă A și A_1 sînt punctele de intersecție ale dreptelor Δ și Δ_1 cu planul Π, atunci mărimile vectorilor $\bar{r}$ și $\bar{r}_1$ reprezintă tocmai distanțele de la elementul dm la axele Δ și respectiv Δ_1.

Conform definiției momentelor de inerție axiale rezultă

$$J_\Delta = \int_c r^2 \, dm \, ; \; J_{\Delta_1} = \int_c r_1^2 \, dm.$$

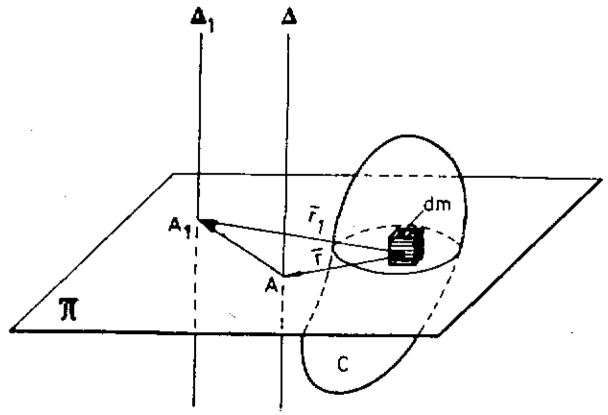


Fig. 5.3

Se observă că $\bar{r}_1 = \bar{r} + \overline{AA_1}$, astfel că

$$J_{\Delta_1} = \int_c (\bar{r} + \overline{AA_1})^2 \, dm = \int_c \bar{r}^2 \, dm + 2\int_c \bar{r}(\overline{AA_1}) \, dm + \int_c \overline{AA_1}^2 \, dm. \quad (5.16a)$$

Deoarece $(\bar{r})^2 = r^2$ și $(\overline{AA_1})^2 = (AA_1)^2 = d^2$, relația (5.16a) devine

$$J_{\Delta_1} = \int_c r^2 \, dm + d^2 \int_c dm + 2\overline{AA_1} \int_c \bar{r} \, dm. \quad (5.16b)$$

Avînd în vedere relația (2.47 b), există egalitatea

$$\int_c \bar{r} \, dm = M\bar{r}_c$$

unde M este masa corpului, iar $\bar{r}_c$ este vectorul de poziție al centrului maselor în raport cu axa Δ astfel că relația (5.16 b) devine

$$J_{\Delta_1} = J_\Delta + d^2 M + 2(\overline{AA_1})M\bar{r}_c. \quad (5.17)$$

Dacă se consideră o axă Δ_0, paralelă cu axa Δ și care trece prin centrul maselor, atunci $\bar{r}_c = 0$ și relația (5.17) capătă forma

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta_0} + d^2 M \quad (5.18)$$

ceea ce înseamnă că *momentul de inerție în raport cu o axă este egal cu momentul de inerție față de axa paralelă cu axa respectivă și care trece prin centrul maselor, la care se adaugă produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre cele două axe.* Această proprietate, referitoare la variația momentului de inerție axial în raport cu translația axelor, constituie teorema lui Steiner.

Din această teoremă rezultă că, pentru un fascicul de drepte care au aceeași direcție, momentul axial este minim față de axa care trece prin centrul de greutate. Pe baza acestei observații, se poate calcula momentul de inerție față de axa care trece prin centrul de greutate, dacă se cunoaște momentul de inerție față de o altă axă paralelă, cu expresia

$$J_{\Delta_0} = J_{\Delta_1} - d^2 M. \quad (5.19)$$

Astfel, la bara din fig. 5.2, *a*, momentul de inerție în raport cu axa care trece prin centrul maselor și este paralelă cu Oy are expresia

$$J_{yc} = \frac{Ml^2}{3} - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12}. \quad (5.20)$$

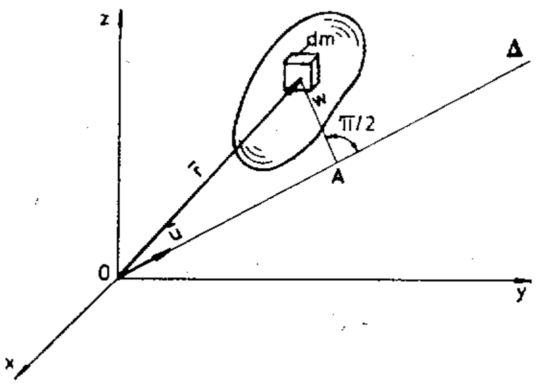


Fig. 5.4

Printr-un raționament similar se pot stabili relațiile privind variația la translația axelor a celorlalte momente de inerție și anume a momentelor de inerție planare, polare și centrifugale.

Variația momentelor de inerție la rotirea axelor. Se consideră corpul (sistemul de puncte materiale) din fig. 5.4 raportat la triedrul $Oxyz$. Se presupun cunoscute momentele de inerție axiale J_x, J_y, J_z și cele centrifugale J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}. Fiind dată axa Δ, definită prin versorul $\bar{u}$, se urmărește determinarea momentului de inerție în raport cu această axă pe baza momentelor de inerție cunoscute.

Conform definiției, momentul de inerție J_Δ are expresia

$$J_\Delta = \int_c w^2 \, dm \quad (5.21)$$

în care w este distanța de la elementul de masă dm la axa Δ, astfel că există relația

$$w^2 = r^2 - (OA)^2. \quad (5.22)$$

Dacă x, y, z sînt coordonatele masei elementare dm, vectorul său de poziție $\bar{r}$ are forma

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (5.23a)$$

și deci

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (5.23b)$$

Avînd în vedere că direcția axei Δ este precizată prin cosinușii săi directori, versorul $\bar{u}$ are expresia

$$\bar{u} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma. \quad (5.24)$$

În fig. 5.4 se observă că există relația $(OA) = \bar{r}\cdot\bar{u}$ astfel că, pe baza relațiilor (5.23 a) și (5.24), se obține

$$(OA) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \quad (5.25)$$

și deci

$$w^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2. \quad (5.26)$$

Din relațiile (5.21) și (5.26), după efectuarea calculelor, rezultă expresia momentului de inerție J_Δ, și anume

$$J_\Delta = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \quad (5.27)$$

Expresia (5.27) pune în evidență faptul că momentul de inerție J_Δ este funcție de orientarea axei Δ, variabilele fiind cosinușii directori ai acesteia. Analizîndu-se condițiile în care momentul de inerție J_Δ înregistrează valori extreme se constată următoarele proprietăți:

— există un triedru triortogonal, cu aceeași origine O, în raport cu care momentele de inerție axiale au valori maxime sau minime. Axele acestui triedru se numesc axe principale de inerție iar momentele de inerție în raport cu aceste axe se notează cu J_1, J_2, J_3 și se numesc momente de inerție principale;

— momentele de inerție centrifugale corespunzătoare axelor principale sînt nule și deci orice axă de simetrie constituie o axă principală de inerție.

În cazul particular al corpurilor bidimensionale, alegînd sistemul de axe xOy în planul sistemului mecanic, relația (5.27) se reduce la forma

$$J_\Delta = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha. \quad (5.28)$$

Direcțiile axelor principale de inerție se obțin din condiția că funcția J să aibă o valoare extremă, adică

$$\frac{d}{d\alpha}(J_\Delta) = 0 \quad (5.29\,a)$$

ecuație trigonometrică care are soluția

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \tag{5.29b}$$

Din relația (5.29b) rezultă că există două direcții ortogonale, precizate prin unghiurile α și $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ față de axele xOy, în raport cu care momentele de inerție axiale ale sistemelor mecanice bidimensionale înregistrează valori extreme (maximă și minimă).

5.1.2. IMPULS. TEOREMA IMPULSULUI

Pentru a măsura mișcarea mecanică, Newton a introdus noțiunea de impuls sau cantitatea de mișcare. Se definește drept impuls al unui punct material produsul dintre masa m a punctului și viteza sa $\bar{v}$, adică

$$\bar{H} = m\bar{v}. \tag{5.30}$$

Impulsul unui sistem de puncte materiale cu masele m_i și vitezele $\bar{v}_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ este vectorul definit prin

$$\bar{H} = \Sigma m_i\bar{v}_i. \tag{5.31a}$$

În cazul unui corp care are un volum V și densitatea $\rho\ (x, y, z)$, raportat la un triedru cartezian $Oxyz$, impulsul are expresia

$$\bar{H} = \int_v \bar{v}\ \mathrm{d}m = \int_v \rho\bar{v}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z. \tag{5.31b}$$

Impulsul este o mărime de stare, referitoare la posibilitatea transmiterii mișcării mecanice de la un sistem mecanic la altul. Ecuația dimensională a mărimii impulsului este $[H] = \mathrm{MLT^{-1}}$.

Impulsul unui sistem de puncte materiale poate fi evaluat în funcție de masa întregului sistem și de viteza centrului maselor. În acest scop, relația (5.31 a) se scrie sub forma

$$\bar{H} = \Sigma m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma m_i\bar{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\bar{r}_c)$$

sau

$$\bar{H} = M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{r}_c) = M\bar{v}_c \tag{5.32}$$

unde M reprezintă masa întregului sistem iar $\bar{v}_c$ este viteza centrului maselor.

Printr-un calcul analog plecînd de la expresia (5.31 b) se ajunge la aceeași expresie (5.32) în cazul corpului. Aceasta înseamnă că impulsul unui sistem mecanic este egal cu impulsul unui punct care concentrează întreaga masă a sistemului și care are mișcarea centrului maselor.

Prin proiectarea expresiilor (5.31a, b) și (5.32) pe axele unui sistem de referință cartezian se obțin expresiile

$$\begin{aligned} H_x &= \Sigma m_i v_{xi} = Mv_{xc} \\ H_y &= \Sigma m_i v_{yi} = Mv_{yc} \\ H_z &= \Sigma m_i v_{zi} = Mv_{zc}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Se consideră sistemul de puncte materiale $P_1, P_2, \ldots, P_n$ din fig. 5.5. Pe lîngă forțele exterioare $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n (i = 1, 2, \ldots, n)$, asupra punctelor acționează forțele interioare $F_{ij}(i=1, 2, \ldots n, j=1, 2, \ldots, n, i \neq j)$ care, conform principiului acțiunii și reacțiunii sînt, două cîte două, egale și de semne contrare, adică $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$. Principiul al II-lea al mecanicii, exprimat pentru fiecare punct material, conduce la următoarele relații:

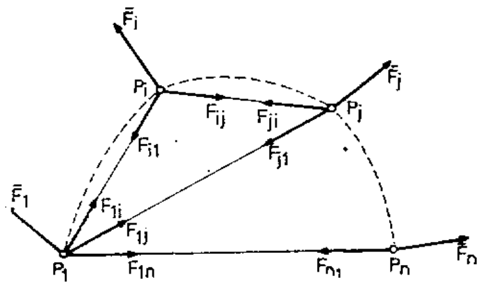


Fig. 5.5

$$\begin{aligned} m_1\bar{a}_1 &= \bar{F}_1 + \Sigma\bar{F}_{1j} \\ m_2\bar{a}_2 &= \bar{F}_2 + \Sigma\bar{F}_{2j} \\ &\vdots \\ m_n\bar{a}_n &= \bar{F}_n + \Sigma\bar{F}_{nj}. \end{aligned}$$

Prin însumarea acestor relații membru cu membru și avînd în vedere că suma totală a forțelor interioare este nulă, se obține

$$m_i\bar{a}_i = \Sigma\bar{F}_i. \tag{5.34}$$

Pentru a pune în evidență o proprietate importantă a impulsului se derivează acesta în raport cu variabila timp, obținîndu-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{H}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Sigma m_i\bar{v}_i) = \Sigma m_i\frac{\mathrm{d}\bar{v}_i}{\mathrm{d}t} = \Sigma m_i\bar{a}_i \tag{5.35}$$

rezultat care, avînd în vedere relația (5.34), conduce la

$$\frac{\mathrm{d}\bar{H}}{\mathrm{d}t} = \Sigma\bar{F}_i. \tag{5.36}$$

Relația (5.36) exprimă teorema impulsului care are următorul enunț: *derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu suma vectorială a forțelor exterioare aplicate asupra sistemului.*

Dacă derivarea impulsului se aplică relației (5.32), se obține

$$\frac{\mathrm{d}\bar{H}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\bar{v}_c}{\mathrm{d}t} = M\bar{a}_c \tag{5.37}$$

și deci

$$M\bar{a}_c = \Sigma\bar{F}_i, \tag{5.38}$$

unde $\bar{a}_c$ este accelerația centrului de greutate al sistemului.

Relația (5.38) reprezintă expresia matematică a teoremei mișcării centrului de greutate, și anume: centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale are aceeași mișcare ca a unui punct material în care este concentrată întreaga masă a sistemului și asupra căruia se aplică o forță unică egală cu suma vectorială a tuturor forțelor exterioare.

În particular, dacă suma forțelor exterioare este nulă, din relația (5.36) rezultă că impulsul sistemului este constant, adică

$$\bar{H} = M\bar{v}_c = \bar{C} \tag{5.39}$$

și deci impulsul sistemului se conservă pe tot timpul mișcării.

Din relația (5.39) se deduce

$$\bar{v}_c = \bar{C}/M$$

ceea ce înseamnă că viteza centrului maselor este constantă, și deci în cazul cînd $\Sigma\bar{F}_i = 0$ centrul de greutate al sistemului de puncte materiale are o mișcare rectilinie și uniformă sau, în particular, este în repaus.

5.1.3. MOMENT CINETIC. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale P_i, cu masele m_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), în raport cu un punct fix O este definit prin relația

$$\bar{K} = \Sigma\, \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i \tag{5.40}$$

unde $\bar{r}_i$ este vectorul de poziție al punctului P_i în raport cu O iar $\bar{v}_i$ este viteza sa. Ecuația dimensională a scalarului momentului cinetic este $[K] = L^2MT^{-1}$.

Teorema momentului cinetic se obține prin derivarea relației (5.40), astfel:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(\Sigma\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i) = \Sigma\frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i\bar{v}_i + \Sigma\bar{r}_i \times m_i\frac{d\bar{v}_i}{dt}.$$

Dar

$$\Sigma\frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i\bar{v}_i = \Sigma\,\bar{v}_i \times m_i\bar{v}_i = 0$$

deoarece vectorii $\bar{v}_i$ și $m_i\bar{v}_i$ sînt coliniari și deci

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \Sigma\bar{r}_i \times m_i\frac{d\bar{v}_i}{dt} = \Sigma\bar{r}_i \times m_i\bar{a}_i. \tag{5.41}$$

Așa cum se arată în fig. 5.5, asupra punctului material P_i acționează atît forța exterioară $\bar{F}_i$ cît și forțele interioare $\bar{F}_{ij}$ astfel că

$$\Sigma\bar{r}_i \times m_i\bar{a}_i = \Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_i + \Sigma\Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}.$$

Deoarece $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$, rezultă că $\Sigma\Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} = 0$ și deci

$$\Sigma\bar{r}_i \times m_i\bar{a}_i = \Sigma\bar{r}_i \times \bar{F}_i. \tag{5.42}$$

Se observă însă că membrul al doilea al relației (5.42) reprezintă momentul forțelor exterioare în raport cu punctul O și în consecință

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \Sigma\bar{M}_{0i} \tag{5.43}$$

adică, *derivata în raport cu timpul a momentului cinetic definit în raport cu un punct fix O este egală cu suma vectorială a momentelor forțelor exterioare în raport cu același punct.*

În particular, dacă $\Sigma M_{0i} = 0$, adică momentul forțelor exterioare în raport cu un punct este nul, momentul cinetic în raport cu punctul respectiv se conservă.

5.1.4. LUCRU MECANIC. ENERGIE MECANICĂ. TEOREMA ENERGIEI CINETICE ȘI A LUCRULUI MECANIC

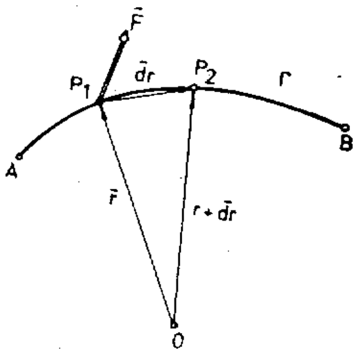


Fig. 5.6

Lucru mecanic. Se consideră un punct material P care, sub acțiunea unei forțe variabile $\bar{F} = \bar{F}(t)$ se deplasează pe o traiectorie Γ, din poziția inițială A în poziția finală B (fig. 5.6). Fie P_1 poziția punctului la momentul t și P_2 o poziție vecină, și anume la momentul $t + dt$, deplasarea între cele două poziții fiind $d\bar{r}$.

Prin definiție, lucrul mecanic elementar efectuat de forța $\bar{F}$ în timpul dt este produsul scalar dintre forța $\bar{F}$ și deplasarea $d\bar{r}$

$$dL = \bar{F}\, d\bar{r}. \tag{5.44 a}$$

Dacă vectorii $\bar{F}$ și $d\bar{r}$ se exprimă prin proiecțiile lor pe axele unui sistem cartezian $Oxyz$, lucrul mecanic elementar are expresia analitică următoare:

$$dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{5.44 b}$$

Lucrul mecanic finit (total) efectuat într-un interval finit de timp, de exemplu prin deplasarea punctelor P_1 din poziția A în B, se obține prin integrarea lucrului mecanic elementar pe traiectoria Γ între cele două puncte, adică

$$L_{AB} = \int_A^B dL = \int_A^B (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \tag{5.44 c}$$

Lucrul mecanic definește o mărime de proces a mișcării mecanice, proces în decursul căruia o anumită formă de mișcare se transformă în altă formă de mișcare.

În general, lucrul mecanic elementar dL nu este o diferențială totală a unei funcții. În cazul în care există o funcție $U(x, y, z)$, astfel că forța $\bar{F}$ are componentele

$$X = \frac{\partial U}{\partial x};\; Y = \frac{\partial U}{\partial y};\; Z = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{5.45}$$

lucrul mecanic elementar al acestei forțe este

$$dL = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \tag{5.46}$$

adică

$$dL = dU \tag{5.47}$$

și deci

$$L_{AB} = \int_A^B dU = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A). \tag{5.48}$$

Expresia (5.48) arată că lucrul mecanic efectuat de o forță $\bar{F}$, care derivă din funcția $U(x, y, z)$ conform relațiilor (5.45), nu depinde decît de poziția inițială și de cea finală, fiind independent de traiectoria parcursă de forță între cele două poziții.

Funcția scalară $U(x, y, z)$ poartă denumirea de funcție de forță și ea conduce la un cîmp de forțe care depind numai de poziția punctului, adică $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$. O astfel de forță este numită forță conservativă.

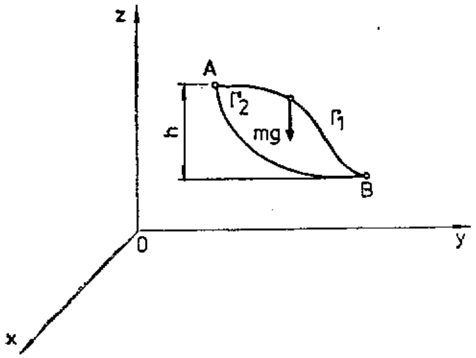


Fig. 5.7

Condițiile necesare și suficiente de existență a funcției de forță au fost stabilite de Cauchy și au forma

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{5.49}$$

Din categoria forțelor conservatoare fac parte forța de atracție universală (1.4), forța electrică (1.5), forța de greutate (1.6) și forța elastică (1.7).

Pentru exemplificare, se consideră un punct material de masă m situat în cîmpul gravitațional caracterizat prin accelerația g. Într-un sistem de axe $Oxyz$, ales astfel încît axa Oz să fie paralelă cu vectorul $\bar{g}$ (fig. 5.7), funcția de forță este

$$U = -mgz + C \tag{5.50}$$

unde C reprezintă o constantă.

Este ușor de verificat că funcția (5.50) satisface condițiile (5.49). Conform expresiei (5.48), lucrul mecanic efectuat prin deplasarea punctului între pozițiile A și B este

$$L_{AB} = U(B) - U(A) = mg(z_A - z_B) = mgh$$

fiind deci independent de traiectoria pe care se face deplasarea.

În cazul unei forțe elastice, definite conform expresiei (1.7), funcția de forțe este

$$U = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) + C \tag{5.51}$$

astfel că lucrul mecanic efectuat de forța elastică de la poziția inițială, în care se alege originea sistemului de referință, la o poziție oarecare precizată prin coordonatele x, y, z, este

$$L = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2). \tag{5.52}$$

În unele probleme este necesar să se calculeze lucrul mecanic efectuat de un sistem de forțe exterioare care acționează asupra unui solid rigid pentru o deplasare elementară a acestuia. În acest caz este util să se exprime lucrul mecanic în funcție de torsorul de reducere al forțelor, așa cum se va arăta în continuare.

Lucrul mecanic elementar al tuturor forțelor se determină prin însumarea lucrurilor mecanice produse de fiecare forță în parte adică

$$dL_e = \Sigma \bar{F}_i \, d\bar{r}_i \tag{5.53}$$

în care deplasarea elementară $d\bar{r}_i = \bar{v}_i \, dt$.

Fie O punctul în care se reduc forțele (fig. 5.8, a). Conform relației (4.37) se obține $\bar{v}_i = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ și deci

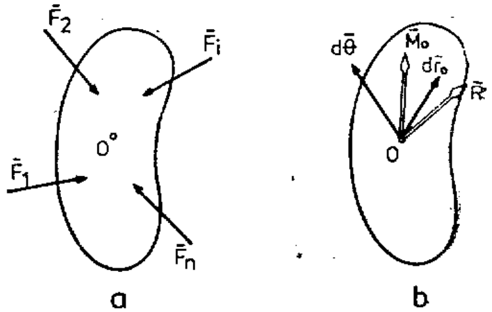


Fig. 5.8

$$d\bar{r}_i = \bar{v}_0 \, dt + (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \, dt \tag{5.54}$$

astfel că expresia (5.53) devine

$$dL_e = \Sigma \bar{F}_i \bar{v}_0 \, dt + \Sigma \bar{F}_i (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) \, dt$$

sau

$$dL_e = (\bar{v}_0 \, dt) \Sigma \bar{F}_i + (\bar{\omega} \, dt) \Sigma (\bar{r}_i \times \bar{F}_i). \tag{5.55}$$

În relația (5.55) sînt puse în evidență elementele torsorului de reducere din punctul O și anume $\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i$ și $\bar{M}_0 = \Sigma(\bar{r}_i \times \bar{F}_i)$. Se observă că $\bar{v}_0 \, dt = d\bar{r}_0$ și reprezintă deplasarea liniară elementară a punctului de reducere iar $\bar{\omega} \, dt = \overline{d\theta}$ constituie rotirea elementară a corpului, astfel că lucrul mecanic elementar are expresia

$$dL_e = \bar{R} \, d\bar{r}_0 + \bar{M}_0 \, \overline{d\theta}. \tag{5.56}$$

Semnificațiile deplasărilor $d\bar{r}_0$ și $\overline{d\theta}$ rezultă din fig. 5.8, b.

La un sistem de puncte materiale, pe lîngă forțele exterioare, intervin și forțele interioare. Pentru evaluarea lucrului mecanic elementar al forțelor interioare se consideră două puncte materiale P_i și P_j între care se exercită forțele interioare $\bar{F}_{ij}$ și $\bar{F}_{ji}$ (fig. 5.9). Lucrul mecanic al acestor forțe, pentru o deplasare elementară definită prin $d\bar{r}_i$ și $d\bar{r}_j$, este

$$dL_i = \bar{F}_{ij} d\bar{r}_i + \bar{F}_{ji} d\bar{r}_j = \bar{F}_{ij}(d\bar{r}_i - d\bar{r}_j). \tag{5.57a}$$

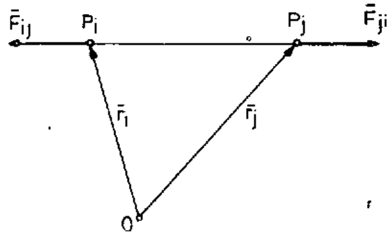


Fig. 5.9

În relația precedentă, variația vectorilor de poziție se poate exprima în funcție de viteza relativă a celor două puncte materiale astfel

$$d\bar{r}_i - d\bar{r}_j = d(\bar{r}_i - \bar{r}_j) = d(\overline{P_j P_i}) = \bar{v}_{ij} \, dt$$

și deci

$$dL_i = \bar{F}_{ij} \bar{v}_{ij} \, dt. \tag{5.57b}$$

Lucrul mecanic al forțelor interioare este nul în următoarele cazuri:

— între punctele materiale nu se exercită forțe interioare ($F_{ij} = 0$);

— viteza relativă este nulă ($v_{ij} = 0$);

— viteza relativă este perpendiculară pe direcția forțelor interioare ($\bar{v}_{ij} \perp \bar{F}_{ij}$).

Se menționează faptul că la modelul mecanic de corp rigid lucrul mecanic al forțelor interioare este nul.

Energia mecanică. Energia mecanică este măsura formelor de mișcare în ceea ce privește capacitatea unui sistem mecanic de a efectua lucru mecanic cînd suferă o transformare dintr-o stare dată în altă stare.

Energia mecanică totală a unui sistem mecanic se compune din:

— *energia cinetică* E care depinde numai de mărimile de stare ale sistemului și anume de vitezele punctelor sale;

— *energia potențială* V este energia capabilă să producă lucrul mecanic datorită poziției punctelor materiale în raport cu un sistem de referință.

Prin definiție, se numește energie cinetică a unui sistem de puncte materiale P_i, care au masele m_i și vitezele v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, mărimea scalară dată de relația

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \tag{5.58}$$

iar în cazul solidului continuu

$$E = \frac{1}{2} \int_c v^2 \,\mathrm{d}m. \tag{5.59}$$

Energia cinetică a unui sistem în mișcare este o cantitate strict pozitivă.

Relația (5.59) pune în evidență faptul că, în general, energia cinetică a unui corp depinde atît de felul mișcării sale cît și de distribuția maselor. În continuare, se determină expresiile energiei cinetice a unui corp în cazul unor mișcări particulare ale sale.

Mișcarea de translație. Așa cum s-a arătat (v. fig. 4.11), în mișcarea de translație cîmpul vitezelor este constant, deci la momentul considerat toate punctele corpului au aceeași viteză, egală cu viteza v_c a centrului maselor. Prin urmare, expresia (5.59), conduce la

$$E = \frac{1}{2} v_c^2 \int \mathrm{d}m = \frac{1}{2} v_c^2 M \tag{5.60}$$

unde M reprezintă masa corpului.

Mișcarea de rotație cu axă fixă. Distribuția vitezelor este dată de expresia (4.47a), de unde rezultă

$$v^2 = \omega^2(x^2 + y^2)$$

astfel că

$$E = \frac{1}{2} \int \omega^2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$$

expresie din care, avînd în vedere relațiile (5.4), rezultă

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 J_z \tag{5.61}$$

sau, în general, energia cinetică a unui corp în mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω în raport cu axa Δ este

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 J_\Delta. \tag{5.62}$$

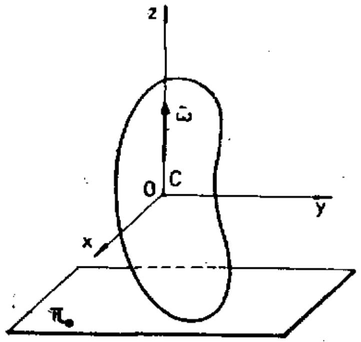


Fig. 5.10

Mișcarea plan-paralelă. Pentru simplificarea calculelor, se alege sistemul de referință mobil astfel încît originea sa să fie în centrul de greutate C al corpului iar planul xOy să fie paralel cu planul fix (fig. 5.10). În aceste condiții, în conformitate cu relațiile (4.53), rezultă

$$v^2 = (v_{cx} - y\omega)^2 + (v_{cy} + x\omega)^2. \tag{5.63}$$

Prin substituirea expresiei (5.63) în relația generală (5.59), după efectuarea calculelor și avînd în vedere proprietățile centrului de greutate, se obține

$$E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2. \tag{5.64}$$

O expresie mai simplă a energiei cinetice în mișcarea plan-paralelă se obține dacă se are în vedere că distribuția de viteze este ca și cînd corpul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotație, ceea ce conduce la

$$E = \frac{1}{2} J_I \omega^2 \tag{5.65}$$

unde J_I este momentul de inerție în raport cu axa instantanee de rotație.

Energia potențială a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma energiei potențiale a tuturor punctelor sistemului, adică

$$V = \sum V_i. \tag{5.66}$$

Energia potențială a unui punct material în poziția A față de poziția B (v. fig. 5.7), acționat de o forță conservativă definită prin funcția de forță $U(x, y, z)$ este, prin definiție, lucrul mecanic efectuat de forță între aceste două puncte, considerat cu semn schimbat, deci

$$V = -L_{BA} = -(U_A - U_B) = U_B - U_A. \tag{5.67}$$

Alegînd poziția de referință aceea în care funcția de forță este nulă $(U_B = 0)$, rezultă că energia potențială a unui punct material este dată de funcția de forță considerată cu semnul schimbat, adică

$$V = -U.$$

Energia mecanică a unui sistem este egală cu suma energiei cinetice cu energia potențială

$$W = E + V. \tag{5.68}$$

Teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic. Se consideră sistemul mecanic din fig. 5.5. Pentru fiecare punct material se exprimă ecuația fundamentală a dinamicii (1.3), care apoi este înmulțită scalar cu variațiile $\mathrm{d}\bar{r}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ale vectorilor de poziție, obținîndu-se următoarele relații:

$$\begin{aligned}
m_1\bar{a}_1\mathrm{d}\bar{r}_1 &= \bar{F}_1\mathrm{d}\bar{r}_1 + (\bar{F}_{12} + \bar{F}_{13} + \ldots \bar{F}_{1n})\,\mathrm{d}\bar{r}_1 \\
m_2\bar{a}_2\mathrm{d}\bar{r}_2 &= \bar{F}_2\mathrm{d}\bar{r}_2 + (\bar{F}_{21} + \bar{F}_{23} + \ldots \bar{F}_{2n})\,\mathrm{d}\bar{r}_2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
m_i\bar{a}_i\,\mathrm{d}\bar{r}_i &= \bar{F}_i\mathrm{d}\bar{r}_i + (\bar{F}_{i1} + \bar{F}_{i2} + \ldots \bar{F}_{in})\,\mathrm{d}\bar{r}_i \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
m_n\bar{a}_n\mathrm{d}\bar{r}_n &= \bar{F}_n\mathrm{d}\bar{r}_n + (\bar{F}_{n1} + \bar{F}_{n2} + \ldots \bar{F}_{n,\,n-1})\,\mathrm{d}\bar{r}_n.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Relațiile (5.69) se însumează, membru cu membru, de unde rezultă

$$\sum m_i\bar{a}_i\mathrm{d}\bar{r}_i = \sum \bar{F}_i\mathrm{d}\bar{r}_i + \sum\sum \bar{F}_{ij}\,\mathrm{d}\bar{r}_i. \tag{5.70}$$

Deoarece, conform relațiilor (5.53) și (5.57 a)

$$dL_e = \sum \bar{F}_i \, d\bar{r}_i \; ; \; dL_i = \sum\sum \bar{F}_{ij} \, d\bar{r}_i$$

se obține

$$\sum m_i \bar{a}_i \, d\bar{r}_i = dL_e + dL_i. \tag{5.71}$$

Membrul din stînga al relației (5.71) se transformă astfel încît să se pună în evidență energia cinetică a sistemului

$$\sum m_i \bar{a}_i \, d\bar{r}_i = \sum m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} d\bar{r}_i.$$

Deoarece dt este o mărime scalară se poate scrie

$$\sum m_i \bar{a}_i \, d\bar{r}_i = \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} d\bar{v}_i = \sum m_i \bar{v}_i \, d\bar{v}_i =$$

$$= \sum d\left(\frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2\right) = d\left(\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = dE. \tag{5.72}$$

Pe baza relațiilor (5.71) și (5.72) se obține teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic a cărei exprimare matematică sub formă diferențială este

$$dE = dL_e + dL_i \tag{5.73}$$

adică *diferențiala energiei cinetice este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și cel al forțelor interioare.*

Considerînd un interval finit de timp, în care sistemul trece din poziția inițială A în poziția finală B, prin integrarea membru cu membru a relației (5.73) rezultă forma finită a teoremei energiei cinetice, și anume

$$E_B - E_A = L_{e,\,AB} + L_{i,\,AB}. \tag{5.74}$$

Expresia (5.74) arată că *variația energiei cinetice într-un interval finit de timp este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare și cele interioare prin deplasarea sistemului din poziția inițială în cea finală.*

Deoarece în cazul corpului rigid lucrul mecanic al forțelor interioare este nul, cele două forme ale teoremei energiei cinetice și lucrului mecanic devin

$$dE = dL_e \tag{5.74 a}$$

$$E_B - E_A = L_{e,\,AB}. \tag{5.74 b}$$

5.1.5. CONSERVAREA ENERGIEI MECANICE

Un sistem de puncte materiale se numește închis dacă lucrul mecanic al forțelor exterioare aplicate asupra sa este nul. În cazul că forțele sale interioare derivă dintr-o funcție de forță U, așa cum rezultă din relația (5.47), $dL_i = dU$ și deci

$$dE = dL_e + dU$$

sau

$$dE - dU = dL_e$$

adică

$$d(E - U) = dL_e.$$

Avînd în vedere definiția energiei potențiale potrivit căreia $V = -U$ se deduce

$$d(E + V) = dL_e.$$

Se notează $W = E + V$, deci

$$dW = dL_e. \tag{5.75}$$

Pentru un sistem închis ($dL_e = 0$), relația (5.75) conduce la

$$W = E + V = \text{const} \tag{5.76}$$

ceea ce înseamnă că energia mecanică a sistemului este constantă.

În concluzie, pe baza relației (5.76), se deduce teorema conservării energiei mecanice cu următoarea formulare: *în cazul în care, într-un interval de timp considerat, lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare aplicate asupra unui sistem conservativ este nul, energia mecanică a sistemului se menține constantă.*

5.2. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

Problemele de dinamica punctului material se rezolvă pe baza principiului al II-lea al mecanicii newtoniene a cărui exprimare matematică este dată de relația (1.3).

5.2.1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

În general, forța rezultantă care acționează asupra unui punct material depinde de poziția punctului, de viteza sa și de timp, adică

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t)$$

astfel că ecuația vectorială (1.3) are forma generală

$$m\ddot{\bar{r}} = F(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t). \tag{5.77}$$

Soluția ecuației diferențiale (5.77) constă în cunoașterea vectorului de poziție al punctului material și este de forma $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Pentru rezolvarea practică a ecuației (5.77) se recurge, de regulă, la proiectarea acesteia pe axele unui sistem de referință obținîndu-se sisteme de ecuații diferențiale scalare.

Triedrul cartezian. Proiecțiile accelerației $\ddot{\bar{r}}$ pe axele reperului $Oxyz$ au expresiile (4.16) astfel că, din ecuația vectorială (5.77), se deduc următoarele ecuații diferențiale scalare:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \tag{5.78}$$

în care X, Y, Z reprezintă proiecțiile forței $\bar{F}$ pe axele triedrului $Oxyz$. Necunoscutele sistemului (5.78) sînt funcții de forma (4.2), adică ecuațiile de mișcare ale punctului material.

Sistemul de ecuații diferențiale de ordinul II (5.78) conduce, prin integrare, la soluții de forma generală următoare:

$$x = x(t,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_6)$$
$$y = y(t,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_6) \qquad (5.79)$$
$$z = z(t,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_6)$$

unde C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 sînt constante de integrare.

Pentru determinarea constantelor de integrare se utilizează condițiile inițiale, și anume cele referitoare la poziția și viteza punctului material la momentul $t = t_0$ care sînt

$$x(t_0) = x_0\ ;\ y(t_0) = y_0\ ;\ z(t_0) = z_0 \qquad (5.80\ a)$$
$$\dot{x}(t_0) = v_{0x}\ ;\ \dot{y}(t_0) = v_{0y}\ ;\ \dot{z}(t_0) = v_{0z}. \qquad (5.80\ b)$$

Impunînd funcțiilor (5.79) și derivatelor acestora în raport cu timpul condițiile (5.80 a, b), se obține un sistem de șase ecuații algebrice cu necunoscutele $C_1, C_2, \ldots, C_6$ a cărui rezolvare conduce la soluțiile

$$C_i = C_i(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ v_{0x},\ v_{0y},\ v_{0z}) \quad (i = 1,\ 2, \ldots, 6). \qquad (5.81)$$

Valorile constantelor, avînd forma (5.81), se înlocuiesc în relațiile (5.79) obținîndu-se ecuațiile mișcării punctului material

$$x = x(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ v_{0x},\ v_{0y},\ v_{0z})$$
$$y = y(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ v_{0x},\ v_{0y},\ v_{0z}) \qquad (5.82)$$
$$z = z(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ v_{0x},\ v_{0y},\ v_{0z})$$

unde variabila este timpul t, celelalte mărimi reprezentînd date ale problemei. În continuare, studiul mișcării punctului material constituie o problemă de cinematică, și anume: forma traiectoriei este reprezentată prin relațiile (4.3) iar viteza și accelerația au expresiile (4.10) respectiv (4.14).

Triedrul lui Frenet. În unele probleme, în special în cazul mișcării circulare, ecuația (5.77) conduce la soluții mai simple dacă se utilizează triedrul lui Frenet. Proiecțiile accelerației pe axele acestui triedru au expresiile (4.19) și deci se obțin ecuațiile

$$m\dot{v} = F_\tau;\ \frac{mv^2}{2} = F_\nu\ ;\ 0 = F_\beta \qquad (5.83)$$

în care F_τ, F_ν, F_β sînt proiecțiile forței $\bar{F}$ pe cele trei axe ale triedrului lui Frenet. Ecuațiile (5.83) se numesc ecuațiile intrinseci de mișcare ale lui Euler. Din aceste ecuații se deduce o proprietate importantă a traiectoriei, și anume că un punct material liber se mișcă astfel încît, în orice moment al mișcării, planul osculator al traiectoriei conține forța aplicată asupra punctului respectiv.

Observație. Problemele privind dinamica punctului material cu legături se formulează și se rezolvă în mod similar cu cele ale punctului material liber dacă se utilizează axioma legăturilor. În acest caz, după suprimarea legăturilor și introducerea forțelor de legătură corespunzătoare, ecuația fundamentală a dinamicii devine

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{F}_l \qquad (5.84)$$

în care s-a notat cu $\bar{F}_l$ rezultanta forțelor de legătură.

În continuare, ecuația (5.84) se proiectează pe axele unui triedru de referință (cartezian, Frenet etc.) obținîndu-se ecuațiile diferențiale scalare.

Necunoscutele problemei sînt de două categorii, și anume:

— necunoscute cinematice de tipul ecuațiilor de mișcare;

— necunoscute forțe de legătură.

Deoarece numărul relațiilor obținute din ecuația (5.84) este mai mic decît numărul total al necunoscutelor problemei, pentru rezolvare se utilizează și relațiile matematice care exprimă legăturile punctului material.

5.2.2. MIȘCAREA UNUI PUNCT MATERIAL CU LEGATURI ELASTICE

Se studiază mișcarea unui punct material care prezintă un grad de libertate elastică sub acțiunea unei forțe perturbatoare $P(t)$, luîndu-se în considerare forțele rezistente.

Sînt numeroase cazuri în care unele construcții sau elemente de construcție conduc prin modelare la astfel de situații. Un exemplu îl reprezintă o pilă a unui pod (fig. 5.11, *a*). Răspunsul acestui element de construcție la acțiuni dinamice poate fi aproximat satisfăcător, în unele situații, utilizînd modelul de calcul din fig. 5.11, *b*, alcătuit dintr-o bară elastică, încastrată la nivelul fundației, avînd la partea superioară o masă care concentrează o parte din masa suprastructurii podului și cea a pilei. Neglijîndu-se deformația axială a barei, precum și inerția la rotire a masei, sistemul este caracterizat geometric printr-un grad de libertate, și anume deplasarea elastică pe orizontală a masei față de poziția nedeformată (fig. 5.11, *c*). Studiul mișcării presupune deci determinarea poziției masei la orice moment de timp, adică legea de mișcare sub forma $x = x(t)$. Constanta elastică a sistemului mecanic se determină avînd în vedere expresia forței elastice (1.7) potrivit căreia constanta elastică k este numeric egală cu forța $\bar{P}$ care, aplicată pe direcția gradului de libertate, produce o deplasare $\bar{x}$ egală cu unitatea (fig. 5.11, *d*).

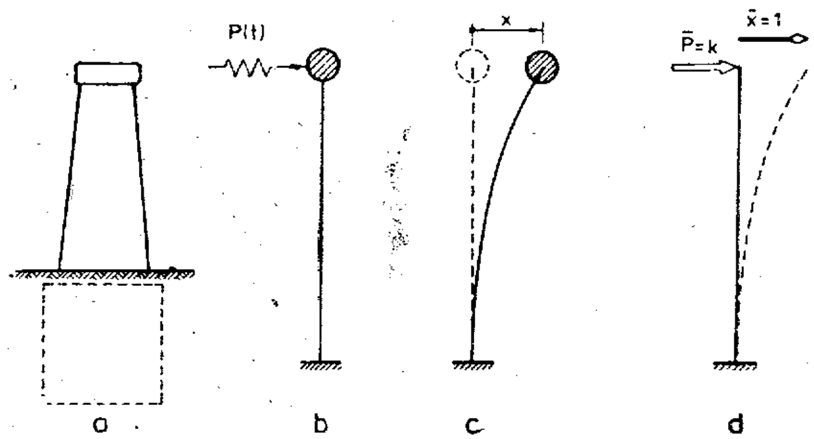


Fig. 5.11

În mod schematic, legăturile masei m cu bara elastică se prezintă ca în fig. 5.12, *a*, adoptîndu-se un model reologic Kelvin-Voigt, alcătuit dintr-un resort, care descrie comportarea elastică a barei (model Hook), legat în paralel cu un amortizor (dash-pot) capabil să redea comportarea vîscoasă (model Newton).

Sistemul mecanic este definit prin următoarele proprietăți intrinseci:
— caracteristica de inerție: masa m;
— rigiditatea resortului: caracteristica elastică k;
— amortizarea: constanta de amortizare c.

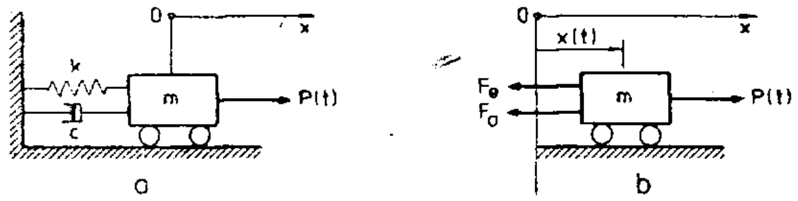


Fig. 5.12

Forțele rezistente, care determină capacitatea de amortizare a sistemului provin din: frecarea cu mediul ambiant, frecarea internă a materialelor frecarea în reazeme etc.

Se stabilește ecuația de mișcare mai întîi în cazul forței perturbatoare, $P(t)$, utilizînd ecuația fundamentală a dinamicii sub forma (5.84).

Forțele care acționează asupra punctului material sînt arătate în fig. 5.12, *b* avînd semnificațiile și expresiile următoare:
— forța elastică: $F_e = kx$;
— forța de amortizare: $F_a = c\dot{x}$;
— forța perturbatoare: $P = P(t)$.

Proiecția relației (5.84) pe direcția gradului de libertate conduce la următoarea ecuație diferențială scalară:

$$m\ddot{x} = P(t) - F_e - F_a. \tag{5.85}$$

Substituind în relația (5.85) forțele prin expresiile lor se obține ecuația diferențială

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t). \tag{5.86}$$

Notînd:

$$\omega^2 = k/m\,;\; 2\beta = c/m \tag{5.87}$$

ecuația (5.86) devine

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = P(t) \tag{5.88}$$

a cărei soluție generală este de forma

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) \tag{5.89}$$

în care $x_0(t)$ este soluția ecuației omogene corespunzătoare, iar $x_p(t)$ constituie o soluție particulară.

Se vor analiza, în continuare, formele particulare ale ecuației (5.88) și soluțiile corespunzătoare ale acesteia.

Vibrații libere. Vibrațiile libere ale unui sistem dinamic se produc prin aplicarea unei acțiuni inițiale de scurtă durată (impuls, șoc) și care are ca efect imprimarea unei viteze inițiale v_0 și/sau prin impunerea unei deplasări

inițiale x_0 după care sistemul este lăsat liber. Ecuația de mișcare în acest caz rezultă din expresia generală (5.88) în care termenul din membrul drept este nul

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{5.90}$$

Ecuația diferențială (5.90) este omogenă și are soluția

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{5.91}$$

unde r_1 și r_2 sînt rădăcinile ecuației caracteristice

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0 \tag{5.92}$$

adică

$$r_{1.2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \tag{5.93}$$

iar constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale privind poziția și viteza masei la momentul $t = t_0$.

În funcție de valorile parametrilor β și ω rădăcinile ecuației (5.93) pot fi: reale și distincte, multiple sau imaginare ceea ce conduce la următoarele situații particulare.

Vibrații libere neamortizate. Sînt vibrațiile efectuate de sistemul dinamic dacă forțele de amortizare nu se iau în considerație. În acest caz, constanta de amortizare c se consideră egală cu zero și prin urmare coeficientul β este de asemenea nul. După exprimarea condițiilor inițiale, soluția ecuației diferențiale (5.90) devine

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \tag{5.94}$$

sau

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{5.95}$$

în care:

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}\,;\; \varphi = \mathrm{arctg}(x_0\omega/v_0). \tag{5.96}$$

Expresia (5.95) reprezintă legea de mișcare a punctului material și constituie răspunsul structurii în deplasări la o perturbație constînd dintr-o deplasare inițială impusă x_0 și o viteză inițială v_0 imprimată punctului. Reprezentarea grafică a răspunsului este prezentată în fig. 5.13. Se pun în evidență următoarele caracteristici ale mișcării:

— deplasarea maximă $|x|_{max}$ se numește amplitudinea mișcării ca depinzînd de condițiile inițiale conform expresiei

$$|x|_{max} = A = \sqrt{(x_0)^2 + (v_0/\omega)^2}\,; \tag{5.97}$$

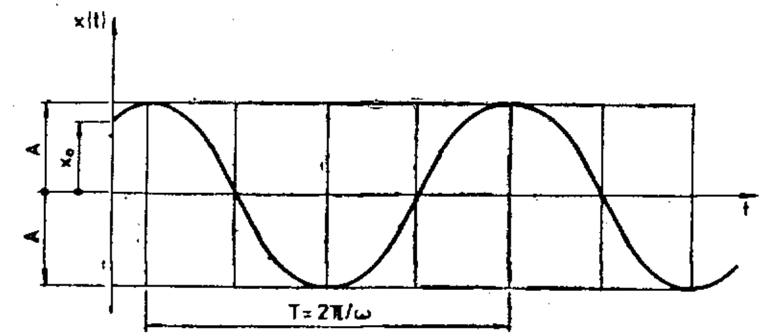


Fig. 5.13

— mişcarea este periodică (oscilatorie) şi de durată infinită, repetîndu-se identic după un interval de timp T numit perioada mişcării şi care are expresia

$$T = 2\pi/\omega \tag{5.98}$$

măsurîndu-se, de regulă, în secunde;

— numărul de oscilaţii complete efectuate în unitatea de timp reprezintă frecvenţa vibraţiei, aceasta măsurîndu-se în oscilaţii pe secundă sau hertzi (Hz) şi are expresia

$$f = 1/T = \omega/2\pi; \tag{5.99}$$

— cantitatea ω se numeşte pulsaţia proprie a sistemului şi se măsoară în radiani pe secundă (rad/s), iar unghiul φ caracterizează faza iniţială a vibraţiei. Pulsaţia proprie ω rezultă din expresia (5.87).

Cantităţile T, f şi ω *depind numai de proprietăţile intrinseci ale sistemului* material, fiind deci independente de cauzele care provoacă sau întreţin mişcarea sistemului.

Vibraţiile libere amortizate. Se produc atunci cînd sistemul mecanic care oscilează liber posedă capacitate de amortizare şi aceasta este considerată în studiul mişcării. Prezenţa amortizării se manifestă prin disiparea energiei mecanice, fapt care se reflectă în micşorarea treptată a deplasării punctului material faţă de poziţia de echilibru şi conduce la încetarea practică a mişcării după un anumit interval de timp.

În acest caz ($c \neq 0$), rădăcinile r_1, r_2 date de expresia (5.93) pot fi: reale şi distincte, duble sau imaginare. Rezultă următoarele situaţii:

— *Amortizarea critică*, care se realizează atunci cînd $\omega = \beta$ şi deci ecuaţia caracteristică are rădăcini duble. Valoarea coeficientului de amortizare care conduce la această situaţie se numeşte coeficient de amortizare critică, c_{cr}. Pe baza notaţiilor anterioare (5.87) se obţine

$$\beta_{cr} = c_{cr}/2m \tag{5.100}$$

Întrucît $\beta_{cr} = \omega$ rezultă

$$c_{cr} = 2m\omega = 2k/\omega \tag{5.101}$$

şi deci coeficientul de amortizare critică reprezintă, de asemenea, o caracteristică proprie a sistemului mecanic.

Raportul dintre coeficientul amortizării reale al unui sistem şi coeficientul său de amortizare critică c_{cr} se numeşte fracţiune din amortizarea critică ν. Acest coeficient prezintă o importanţă deosebită în ingineria seismică. Conform definiţiei date acestui coeficient rezultă

$$\nu = c/c_{cr} = c/2m\omega = \beta/\omega. \tag{5.102}$$

În cazul amortizării critice ($\nu = 1$) soluţia ecuaţiei deferenţiale este

$$x(t) = [x_0(1 + \omega t) + v_0 t]e^{-\omega t}. \tag{5.103}$$

Mişcarea definită prin ecuaţia (5.103) este aperiodică (fig. 5.14), astfel că sistemul scos din echilibru revine lent la poziţia iniţială fără să oscileze.

— *Amortizarea supracritică* a unui sistem mecanic se realizează dacă $\nu > 1$ deci $\beta > \omega$. În acest caz, rădăcinile ecuaţiei caracteristice (5.92) sînt reale şi distincte, iar soluţia (5.91) are forma

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{(\sqrt{\beta^2-\omega^2})t} + C_2 e^{-(\sqrt{\beta^2-\omega^2})t}\right). \tag{5.104}$$

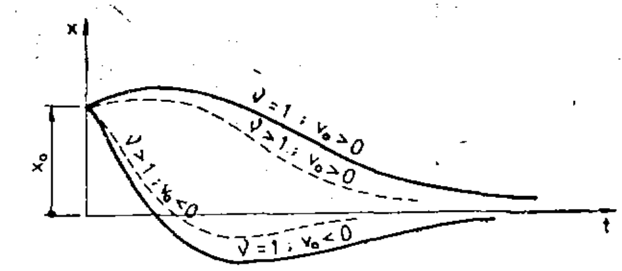


Fig. 5.14

Condiţiile iniţiale conduc la determinarea constantelor C_1 şi C_2, iar în final ecuaţia de mişcare (5.104) reprezintă, de asemenea, o mişcare aperiodică (fig. 5.14).

— *Amortizarea subcritică* se realizează atunci cînd structurile reale prezintă o amortizare inferioară amortizării critice ($\nu < 1$). În aceste cazuri $\beta < \omega$ astfel că rădăcinile ecuaţiei (5.92) sînt imaginare şi au forma

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega^* \tag{5.105}$$

unde s-a notat

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \omega\sqrt{1 - \nu^2}. \tag{5.106}$$

Ecuaţia mişcării masei este

$$x(t) = e^{-\beta t}(C_1 \cos \omega^* t + C_2 \sin \omega^* t) \tag{5.107}$$

sau

$$x(t) = A(t) \sin (\omega^* t + \varphi). \tag{5.108}$$

În expresiile (5.107), (5.108) s-au utilizat notaţiile:

$$C_1 = x_0;\ C_2 = \frac{v_0 + \nu\omega x_0}{\omega^*} \tag{5.109}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\nu\omega t};\ A_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \tag{5.110}$$

$$\varphi = \text{arc tg}(C_1/C_2). \tag{5.111}$$

Mişcarea descrisă prin ecuaţia (5.108) este reprezentată în fig. 5.15. Mişcarea punctului material este oscilatorie. După cum rezultă din rela-

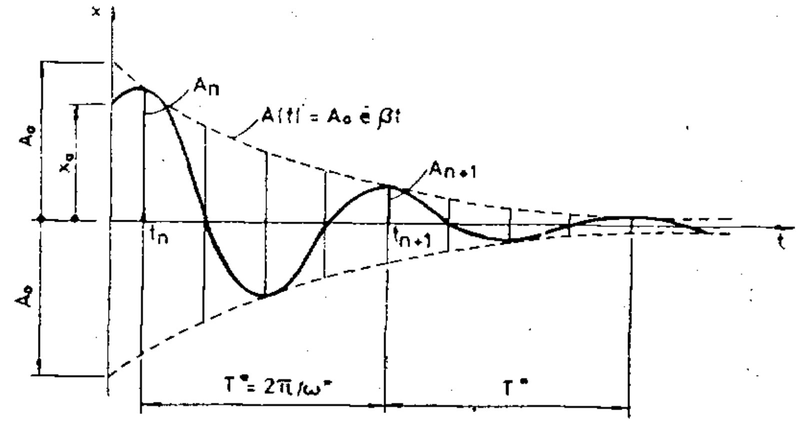


Fig. 5.15

Tabelul 5.1

Valorile fracțiunii din amortizarea critică

Tipul structurii	Coeficientul ν
Poduri din beton armat	0,03 – 0,16
Poduri metalice	0,02 – 0,08
Structuri din beton armat monolit	0,02 – 0,14
Construcții masive	0,05 – 0,10

ția (5.106), pulsația proprie în prezența amortizării ω^* este mai mică decît pulsația proprie determinată fără considerarea amortizării.

Celelalte caracteristici ale mișcării sînt :

— frecvența proprie

$$f^* = f\sqrt{1 - \nu^2}; \quad (5.112)$$

— perioada proprie

$$T^* = T\sqrt{1 - \nu^2} \quad (5.113)$$

unde T și f au semnificațiile date de relațiile (5.98) și respectiv (5.99).

Fracțiunea din amortizarea critică ν, pentru unele construcții, are valorile orientative prezentate în tabelul 5.1.

După cum se constată, pentru structurile de construcții, coeficientul ν are valori foarte mici fapt ce justifică neglijarea sa în expresiile (5.106), (5.112), (5.113), astfel că rezultă

$$\omega^* \approx \omega; \; f^* \approx f; \; T^* \approx T$$

ceea ce înseamnă că prezența amortizării nu influențează practic pulsația, frecvența și perioada oscilațiilor proprii.

Relația (5.108) stă la baza determinării pe cale experimentală a caracteristicii de amortizare a unei construcții. Astfel, măsurîndu-se pe o vibrogramă două amplitudini succesive A_n și A_{n+1} ale unei vibrații provocate, precum și perioada T^* a oscilațiilor, se obține

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\beta(t_{n+1} - t_n)} = e^{\beta T^*}. \quad (5.114)$$

Se observă că raportul a două amplitudini succesive, înregistrate la un interval de timp de o perioadă, este constant. Logaritmul natural al acestui raport poartă denumirea de decrement logaritmic al amortizării și are valoarea

$$\Delta = \ln(A_n/A_{n+1}) = \beta T^*. \quad (5.115)$$

Avînd în vedere relațiile (5.102) și (5.113) se obține

$$\Delta = 2\pi\nu/\sqrt{1 - \nu^2} \quad (5.116)$$

de unde, prin neglijarea cantității ν^2, rezultă

$$\nu = \Delta/2\pi. \quad (5.117)$$

Coeficientul de amortizare c, respectiv fracțiunea din amortizarea critică ν, depind de o serie de factori precum : tipul construcției, natura materialului din care este realizată, frecarea în îmbinările elementelor construcției și la reazeme, frecarea cu mediul ambiant etc. Acești coeficienți se determină pe cale experimentală sau se aproximează pe baza unor formule empirice bazate pe analiza rezultatelor experimentale.

Vibrații forțate produse de încărcări periodice. Se analizează sistemul cu un grad de libertate acționat de o forță perturbatoare armonică a cărei expresie analitică este

$$P(t) = P_0 \sin \theta t \quad (5.118)$$

unde P_0 reprezintă amplitudinea forței perturbatoare iar θ este pulsația acestei forțe. În acest caz, ecuația diferențială a mișcării rezultă din relația (5.88) care devine

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + kx = \frac{P_0}{m}\sin \theta t \quad (5.119)$$

și are soluția de forma (5.89) unde

$$x_0(t) = e^{-\nu\omega t}(D_1 \cos \omega^* t + D_2 \sin \omega^* t) \quad (5.120)$$

$$x_p(t) = D_3 \cos \theta t + D_4 \sin \theta t. \quad (5.121)$$

Constantele D_1, D_2, D_3, D_4 se determină din condițiile inițiale iar ω^* reprezintă pulsația sistemului amortizat.

Componenta (5.120) constituie răspunsul tranzitoriu al sistemului iar acesta, datorită amortizării, dispare treptat. Răspunsul în regim staționar (permanent) este constituit deci din soluția (5.121) care, după determinarea constantelor D_3 și D_4 se poate scrie sub forma

$$x(t) = A_1 \sin(\theta t - \varphi_1) \quad (5.122)$$

unde

$$A_1 = \frac{P_0}{k}\frac{1}{\sqrt{[1 - (\theta/\omega)^2]^2 + (2\nu\theta/\omega)^2}}; \quad \varphi_1 = \text{arc tg}\frac{2\nu\theta/\omega}{1 - (\theta/\omega)^2}. \quad (5.123)$$

Deoarece cantitatea P_0/k reprezintă deplasarea x_s produsă de aplicarea statică a unei forțe egale cu amplitudinea forței perturbatoare, răspunsul staționar al sistemului este

$$x(t) = x_s\mu \sin(\theta t - \varphi_1). \quad (5.124)$$

În expresia (5.124) μ are semnificația de factor de amplificare dinamică iar φ_1 reprezintă decalajul de fază. Variațiile acestor mărimi în funcție de raportul pulsațiilor $\gamma = \theta/\omega$, pentru diverse valori ale fracțiunii de amortizare critică ν, sînt reprezentate în fig. 5.16. În cazul că $\omega = \theta$, se constată

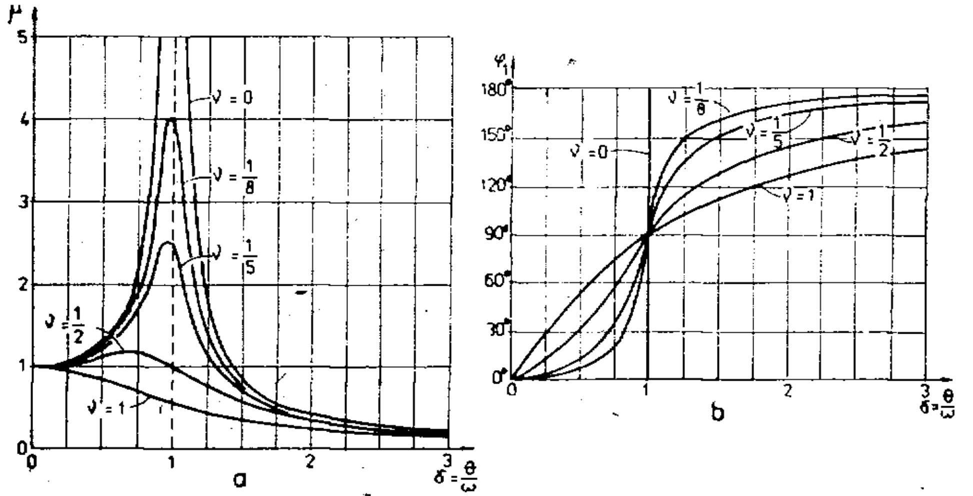


Fig. 5.16

că deplasările au valori foarte mari, iar pentru $c = 0$, ele devin infinite. Acest fenomen poartă denumirea de rezonanță.

Creșterea foarte rapidă a factorului de amplificare dinamică în vecinătatea rezonanței stă la baza determinării pe cale experimentală a pulsației proprii a unei structuri. Pentru aceasta, o forță $P(t)$ a cărei pulsație variază controlat este aplicată pe structură urmărindu-se răspunsul acesteia la diverse valori ale pulsației forței perturbatoare. În momentul în care deplasările structurii se amplifică brusc, pulsația structurii este aproximativ egală cu pulsația cunoscută a forței perturbatoare.

Dacă asupra punctului material se aplică o încărcare periodică oarecare a cărei perioadă este T_p, încărcarea se poate reprezenta prin serii Fourier sub forma

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T_p}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T_p}t\right) \tag{5.125}$$

în care:

$$a_0 = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\,dt; \quad a_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\cos\frac{2\pi n}{T_p}t\,dt \tag{5.126}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} P(t)\sin\frac{2\pi n}{T_p}t\,dt.$$

Pentru calculul practic este suficient să se rețină un număr limitat din primii termeni ai expresiei (5.125). Cu excepția primului termen (care este constant), ceilalți se interpretează ca încărcări armonice independente iar răspunsul sistemului se obține prin însumarea răspunsurilor individuale conform relației (5.122).

Răspunsul la acțiunea unei forțe oarecare. Se determină, în prealabil, mișcarea punctului material produsă de aplicarea unui impuls.

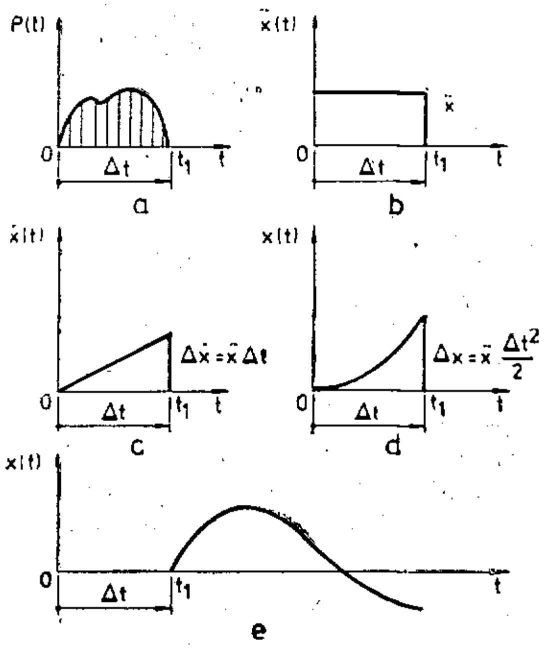


Fig. 5.17

Acțiunile care au caracterul unui impuls sînt cele a căror durată este foarte redusă, și anume mai mică decît perioada proprie a sistemului. Se consideră un impuls de durată Δt, aplicat unui punct material aflat în repaus, la care se neglijează amortizarea (fig. 5.17, *a*). În intervalul de timp Δt se poate considera că accelerația punctului rămîne constantă (fig. 5.17, *b*). În această circumstanță, la timpul t_1 care marchează sfîrșitul intervalului Δt, termenii care conțin viteza și accelerația sînt mici, și anume de ordinul Δt, respectiv Δt^2, față de termenul care conține accelerația (fig. 5.17, *c*), astfel că în ecuația (5.86) ei se neglijează rezultînd ecuația diferențială

$$m\ddot{x} = P(t), \tag{5.127}$$

sau, prin integrare,

$$\int_0^{t_1} m\ddot{x}\,dt = \int_0^{t_1} P(t)\,dt$$

de unde

$$m\Delta\dot{x} = \int_0^{t_1} P(t)\,dt. \tag{5.128}$$

Relația (5.128) arată că variația impulsului sistemului este egală cu aria diagramei $P(t)$, (fig. 5.17, *a*). După timpul t_1, forța încetează să acționeze și deci sistemul efectuează vibrații libere cu condițiile inițiale următoare:

$$\dot{x}(t_1) = \Delta\dot{x} = \frac{1}{m}\int_0^{t_1} P(t)\,dt; \quad x(t_1) = 0. \tag{5.129}$$

Acțiunea impulsului are ca efect imprimarea unei viteze inițiale $\dot{x}(t_1)$, ceea ce înseamnă că, după momentul t_1, mișcarea este descrisă de ecuația (5.94) în care $v_0 = \dot{x}(t_1)$ și $x_0 = x(t_1) = 0$, adică

$$x(t - t_1) = \frac{1}{\omega m}\left[\int_0^{t_1} P(t)\,dt\right]\sin\omega(t - t_1) \tag{5.130}$$

mișcarea fiind reprezentată în figura 5.17, *e*.

Relația (5.130) stă la baza determinării răspunsului produs de o forță oarecare $P(t)$. În acest scop, se consideră că ea este descompusă într-o succesiune de impulsuri elementare de durată $d\tau$ (fig. 5.18, *a*) al căror efect individual $dx(t)$ se însumează (fig. 5.18, *b*).

Conform expresiei (5.130), mișcarea punctului material produsă de impulsul elementar $P(\tau)\,d\tau$ are forma

$$dx(t) = \frac{P(\tau)d\tau}{m\omega}\sin\omega(t - \tau). \tag{5.131}$$

Răspunsul total se obține prin suprapunerea efectelor, adică prin însumarea tuturor deplasărilor elementare $dx(t)$ rezultînd

$$x(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^{t_1} P(\tau)\sin\omega(t - \tau)\,d\tau. \tag{5.132}$$

Dacă se ia în considerație amortizarea sistemului, expresia deplasării punctului material sub acțiunea unui impuls se determină în același mod, rezultînd o expresie asemănătoare cu expresia (5.130), și anume

$$x(t - t_1) = \frac{1}{m\omega^*}e^{-\nu\omega(t-t_1)}\left[\int_0^{t_1} P(t)\,dt\right]\sin\omega^*(t - t_1). \tag{5.133}$$

Pentru o forță oarecare $P(t)$ răspunsul se obține, ca și la sistemul fără amortizare, prin însumarea efectelor impulsurilor elementare și are forma

$$x(t) = \frac{1}{m\omega^*}\int_0^{t} P(\tau)e^{-\nu\omega(t-\tau)}\sin\omega^*(t - \tau)\,d\tau. \tag{5.134}$$

Expresiile (5.132) și (5.134) reprezintă integralele Duhamel pentru sisteme cu un grad de libertate.

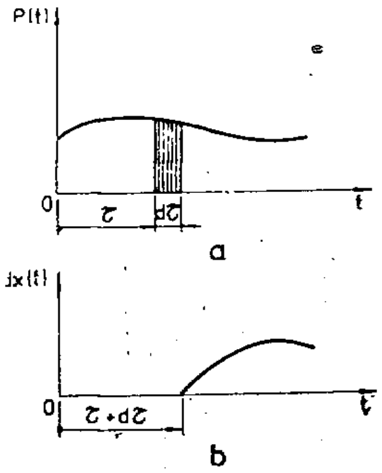


Fig. 5.18

5.3. MIŞCĂRI IMPULSIVE (CIOCNIRI)

Unele fenomene mecanice, întîlnite şi în tehnică, se desfăşoară cu variaţii foarte rapide, practic instantanee, ale vitezelor. Exemple de acest fel sînt : înfigerea piloţilor în teren prin batare, nituirea pieselor metalice, acţiunea ciocanelor pneumatice, introducerea bruscă a unei legături asupra unui corp în mişcare etc.

Fenomenele mecanice în cursul cărora au loc variaţii instantanee ale vectorului viteză se numesc ciocniri.

Pentru a simplifica studiul fenomenului, se consideră că în timpul ciocnirii contactul dintre corpuri se realizează într-un singur punct. În acest fel, interacţiunea dintre cele două corpuri se manifestă printr-o forţă de contact, numită forţă percutantă, a cărei intensitate variază foarte rapid de la valoarea iniţială egală cu zero la valoarea maximă, după care revine la valoarea nulă (fig. 5.19).

Impactul este un fenomen mecanic de interacţiune a două corpuri în care, deşi durata fenomenului este infinitezimală, are loc o variaţie finită a vitezei corpurilor. Durata impactului a două corpuri este de ordinul 10^{-3}s şi chiar mai mică. Din această cauză, variaţia finită a vitezelor conduce la valori foarte mari ale acceleraţiilor şi, de asemenea, la forţe de contact foarte mari. Acest fapt face foarte dificilă, practic imposibilă, stabilirea variaţiei forţei de contact. Or, utilizarea ecuaţiei diferenţiale vectoriale (5.77) în scopul studiului mişcării, impune cunoaşterea expresiei analitice a acestei forţe sub forma $F = F(t)$. Pentru a evita aceste dificultăţi, se introduce noţiunea de percuţie $\bar{P}$, aceasta fiind o mărime vectorială definită prin relaţia

$$\bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(t)\, dt. \tag{5.135}$$

Percuţia unui punct material într-un interval de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ poate fi exprimată în funcţie de variaţia impulsului său. Într-adevăr, dacă relaţia (1.3) se scrie sub forma $\bar{F} = m d\bar{v}/dt$ se obţine $\bar{F}\, dt = m\, d\bar{v}$ şi deci

$$\bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} m\, d\bar{v} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1. \tag{5.136}$$

Relaţia vectorială (5.136) prezintă un rol important în teoria impactului fiind utilizată pentru studiul mişcării corpurilor în cazul ciocnirilor.

Deoarece durata impactului este extrem de mică, deplasarea corpurilor în acest interval de timp este neglijabilă şi deci se poate considera că poziţia sistemului mecanic nu se modifică.

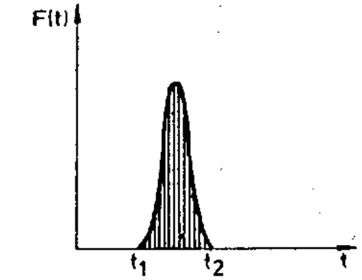


Fig. 5.19

Aceste constatări conduc la acceptarea următoarelor ipoteze :

— forţele de contact ating valori foarte mari fapt ce face ca efectul acestor forţe să fie predominant în raport cu efectele celorlalte forţe (forţa de greutate, forţe elastice, forţe rezistente etc.), care, de aceea, se pot neglija în studiul fenomenului de impact ;

— se neglijează, de asemenea, deplasările punctelor corpurilor pe durata impactului.

La ciocnirea corpurilor un rol esenţial îl au proprietăţile fizice ale materialelor din care sînt alcătuite corpurile. În linii generale, se disting două faze importante ale impactului. În prima fază corpurile iau contact şi se deformează pînă cînd viteza lor relativă se anulează. Pe durata acestei faze — numită faza de comprimare — energia cinetică a mişcării relative a corpurilor se transformă în alte forme de energie, şi anume : energie potenţială de deformaţie, energie termică, unde sonore etc. În faza a doua a fenomenului — numită faza de decomprimare (sau restituire) — energie potenţială de deformaţie este transformată din nou, parţial sau total, în energie cinetică, la sfîrşitul acestei faze contactul dintre corpuri încetînd. Dacă materialele din care sînt alcătuite corpurile au o comportare perfect plastică (modelul Prandtl, fig. 1.1, c) după prima fază corpurile rămîn în contact iar ciocnirea este plastică. În cazul în care energia cinetică înainte de ciocnire se regăseşte după desprinderea corpurilor integral sub forma de energie cinetică impactul a fost perfect elastic. În realitate, datorită faptului că orice material înregistrează deformări plastice, nu există ciocniri perfect elastice şi deci numai o parte din energia cinetică iniţială este restituită după ciocnire sub forma de energie cinetică.

5.3.1. CIOCNIREA A DOUA CORPURI ÎN MIŞCARE DE TRANSLAŢIE

Se consideră două corpuri cu masele m_1 şi m_2 în mişcare de translaţie, cele două corpuri avînd vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ ($v_1 > v_2$). Ciocnirea acestor corpuri este centrică dacă punctul de contact şi cu centrele maselor C_1 şi C_2 ale celor două corpuri sînt coliniare iar vitezele $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$ sînt dirijate după direcţia C_1C_2 (fig. 5.20, a).

Se proiectează relaţia (5.136) pe direcţia definită de C_1C_2, obţinîndu-se

$$m_1(v_1' - v_1) = -P \; ; \; m_2(v_2' - v_2) = P \tag{5.137}$$

unde P este proiecţia percuţiei (fig. 5.20, b) iar v_1' şi v_2' reprezintă vitezele celor două corpuri după ciocnire.

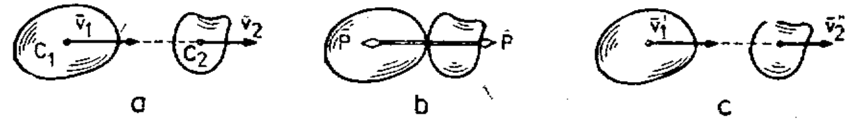


Fig. 5.20

Pe cale experimentală se constată că raportul dintre viteza relativă după ciocnire v_r' şi viteza relativă înainte de ciocnire v_r constituie o caracteristică fizică proprie a materialelor din care sînt alcătuite cele două corpuri. Acest raport se numeşte coeficient de restituire şi este deci

$$k = \frac{v_r'}{v_r} = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \tag{5.138}$$

avînd deci, în cazul a două corpuri date, o valoare cunoscută.

Tabelul 5.2

Coeficientul de restituire k

Materialul corpurilor care se ciocnesc	k
Lemn-lemn	0,50
Oțel-oțel	0,56
Fildeș-fildeș	0,89
Sticlă-sticlă	0,94

Din relațiile (5.137) și (5.138), după eliminarea percuției P și rezolvarea sistemului de ecuații, se obțin expresiile vitezelor v_1' și v_2', adică vitezele corpurilor după ciocnire, acestea fiind

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)(1+k)$$
$$v_2' = v_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v^2)(1+k). \qquad (5.139)$$

Valorile coeficientului de restituire k pentru cîteva materiale sînt date în tabelul 5.2.

Valorile coeficientului k diferențiază trei situații fundamentale, și anume:

I) $k = 0$, viteza relativă după impact este nulă. $v_r' = 0$, ceea ce înseamnă că cele două corpuri nu se mai desprind, fenomenul constituind o *ciocnire plastică*;

II) $k = 1$, ceea ce înseamnă că $v_r' = v_r$, energia cinetică inițială este restituită integral în energie cinetică, corpurile revin la forma inițială iar ciocnirea este *perfect elastică*;

III) $0<k<1$, în consecință $v_r'<v_r$, corpurile înregistrează deformații permanente ciocnirea fiind *elasto-plastică*.

Pierderea de energie cinetică în cazul unei ciocniri elasto-plastice este

$$E_p = E_1 - E_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2\right). \qquad (5.140)$$

Prin substituirea expresiilor (5.139) în relația (5.140) se obține

$$E_p = \frac{1}{2}(1 - k^2)\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2. \qquad (5.141)$$

În cazul în care vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ ale corpurilor care se ciocnesc au direcții oarecare și deci nu sînt dirijate după direcția definită de centrele maselor, se procedează la descompunerea fiecărei viteze în două componente astfel

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{1n} + \bar{v}_{1t}; \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_{2n} + \bar{v}_{2t} \qquad (5.142\text{ a})$$

unde v_{1n}, v_{2n} sînt componentele după direcția C_1C_2 iar v_{1t} și v_{2t} sînt componentele după direcția normală pe aceasta. Componentele v_{1n} și v_{2n} conduc la o ciocnire centrică și deci vitezele v_{1n}' și v_{2n}' după ciocnire se obțin cu relațiile (5.139). Componentele v_{1t} și v_{2t} se conservă, astfel că vitezele celor două corpuri după ciocnire se obțin prin însumare vectorială, deci:

$$\bar{v}_1' = \bar{v}_{1n}' + \bar{v}_{1t}; \quad \bar{v}_2' = \bar{v}_{2n}' + \bar{v}_{2t}. \qquad (5.142\text{ b})$$

Un caz particular îl constituie ciocnirea centrică a unui corp cu un perete fix. Avînd în vedere că viteza peretelui este tot timpul nulă

($v_2 = v_2' = 0$), din relația (5.138) se deduce

$$v_1' = -kv_1 \qquad (5.143)$$

ceea ce înseamnă că v_1' este de semn contrar față de viteza v_1 și $v_1' < v_1$.

Relația (5.143) permite determinarea experimentală a coeficientului de restituire astfel: se lasă să cadă un corp cu masa m_1 de la o înălțime h_1 pe o suprafață orizontală fixă și se determină înălțimea h_2 pînă la care corpul se ridică după ciocnire. Neglijînd rezistența aerului vitezele înainte și după ciocnire au expresiile

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}; \quad v_1' = \sqrt{2gh_2}$$

și deci

$$k = \frac{v_1'}{v_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \qquad (5.144)$$

5.3.2. CIOCNIREA UNUI PUNCT MATERIAL CU UN CORP ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE CU AXA FIXĂ

Fie un corp în mișcare de rotație față de o axă fixă care trece prin punctul O (fig. 5.21). Acest corp este lovit de un punct material de masă m, șocul aplicîndu-se într-un punct A. Se notează: ω — viteza unghiulară a corpului în momentul ciocnirii; v_1 — componenta normală a vitezei punctului material; b — distanța de la axa de rotație la suportul vitezei v.

Deoarece momentul forțelor în raport cu centrul O este nul, momentul cinetic al sistemului se conservă, adică

$$K_0 = K_0'. \qquad (5.145)$$

Momentul cinetic total se obține prin însumarea momentelor cinetice ale corpului și respectiv punctului material, adică

$$K_0 = K_{01} + K_{02}$$

unde

$$K_{01} = mv_1b. \qquad (5.146)$$

Momentul cinetic al unui corp în mișcare de rotație cu axa fixă, în raport cu această axă, se determină avînd în vedere distribuția de viteze exprimată prin relația (4.46). Se consideră corpul din fig. 5.22, în mișcare de rotație față de axa care trece prin punctul O, viteza unghiulară fiind ω. Conform definiției, momentul cinetic în raport cu punctul O este

$$\bar{K}_0 = \int \bar{r} \times \bar{v}\, dm.$$

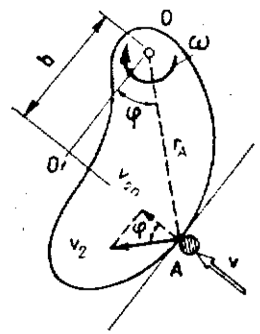


Fig. 5.21

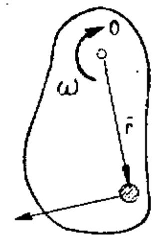


Fig. 5.22

În mișcarea de rotație cu axa fixă, cîmpul de viteze are următoarele proprietăți: $\bar{v} \perp \bar{r}$ și $v = \omega r$, semnificațiile notațiilor rezultînd din fig. 5.22. Pe baza acestor proprietăți se deduce

$$K_0 = \int (r)(\omega r)\mathrm{d}m = \omega \int r^2 \mathrm{d}m = \omega J_0 \tag{5.147}$$

unde J_o este momentul de inerție al corpului în raport cu axa de rotație.

Momentul cinetic total devine

$$K_0 = mv_1 b + \omega J_0.$$

Conservarea momentului cinetic conduce la relația

$$mv_1 b + \omega J_o = mv_1' b + \omega' J_o. \tag{5.148}$$

Conform expresiei (5.138), coeficientul de restituire este

$$k = \frac{v_{2n}' - v_1'}{v_1 - v_{2n}} = \frac{\omega' r_A \cos\varphi - v_1'}{v_1 - \omega r_A \cos\varphi}.$$

Se observă că $r_A \cos\varphi = b$, deci

$$k = \frac{\omega' b - v_1'}{v_1 - \omega b}.$$

Din relațiile (5.146) și (5.147) se deduc expresiile vitezelor după ciocnire, și anume

$$v_1' = v_1 - \frac{(v_1 - \omega b)(1 + k)}{1 + mb^2/J_0}$$

$$\omega' = \omega + \frac{(v_1 - \omega b)(1 + k)}{b(1 + J_0/mb^2)}.$$

Un aspect interesant al problemei impactului dintre un punct material și un corp care se poate roti în jurul unei axe fixe îl constituie determinarea punctului de lovire A astfel încît percuția în legătura (articulația) din punctul O să fie nulă. Acest punct se numește centru de percuție iar poziția lui se determină din condiția $P_0 = 0$, pe baza relațiilor (5.136) și (5.148), în care $\omega = 0$ (corpul fiind inițial în repaus).

5.4. ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ

Studiul mișcării mecanice a sistemelor alcătuite din puncte și/sau corpuri rigide, prezentat în capitolele precedente, s-a bazat pe principiile mecanicii clasice. În acest cadru, la determinarea stării de mișcare sau, în particular, la aplicarea condițiilor de echilibru, fiecare parte componentă a sistemului a fost separată și examinată izolat, astfel că, pe lîngă forțele date, aplicate asupra sistemului, au fost introduse și forțele necunoscute de legătură acestea reprezentînd efectul mecanic al legăturilor suprimate. În problemele de dinamică, în care, în general, interesează mișcarea sistemului, forțele de legătură au caracter de necunoscute suplimentare și ca atare complică rezolvarea problemelor. O altă caracteristică a mecanicii clasice (newtoniene) constă în modul de tratare a problemelor, și anume avînd în vedere caracterul vectorial al unor mărimi precum forța, viteza, accelerația, impulsul etc.

Mecanica analitică are ca scop, de asemenea, studiul mișcării sistemelor mecanice sub acțiunea forțelor date și avînd în vedere restricțiile geometrice impuse, urmărind însă ca ecuațiile de mișcare să nu conțină forțele de legătură și, prin urmare, rezolvarea problemelor să necesite determinarea unui număr mai redus de necunoscute. Mecanica analitică stabilește metode de rezolvare cu un grad mare de generalitate pe baza proprietăților unor mărimi scalare globale ca energie cinetică, energie potențială, lucru mecanic etc.

Mecanica analitică studiază, în general, sistemele mecanice cu legături ideale (fără frecare).

Din punctul de vedere al modului în care examinează mișcarea mecanică, principiile mecanicii analitice se diferențiază în două categorii și anume:

— *principii diferențiale* (principiul lucrului mecanic virtual, principiul lui d'Alembert), care studiază fenomenul mecanic la un *moment dat*, considerînd variații elementare ale timpului și spațiului;

— *principii integrale*, care studiază mișcarea mecanică într-un interval *finit de timp*.

În mecanica analitică configurația unui sistem este precizată prin coordonatele generalizate $q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, acestea fiind mărimi geometrice independente (distanțe și unghiuri) al căror număr n este egal cu numărul gradelor de libertate G_l, stabilit conform relațiilor (3.47 a, b). Deoarece coordonatele generalizate nu sînt direct legate de un anumit sistem de coordonate, metodele de rezolvare prezintă un grad mai mare de generalitate.

Caracterizarea variațiilor în timp ale coordonatelor generalizate se face prin vitezele generalizate corespunzătoare $\dot{q}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ acestea fiind derivatele în raport cu timpul ale coordonatelor generalizate. În mod analog, derivatele în raport cu timpul ale vitezelor generalizate constituie accelerațiile generalizate $\ddot{q}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

5.4.1. PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Deplasări reale, deplasări virtuale. Lucru mecanic virtual. Sub acțiunea forțelor aplicate asupra sa, un sistem mecanic efectuează o anumită mișcare astfel încît sînt satisfăcute atît ecuațiile de mișcare cît și restricțiile de natură geometrică. Mișcarea unui punct material al sistemului, între două momente de timp infinit apropiate, este dată de variația $\mathrm{d}\bar{r}$ a vectorului de poziție și ea constituie deplasarea elementară reală a punctului material respectiv (fig. 5.23). Dacă ecuațiile de mișcare ale punctului material au forma (4.2), deplasarea elementară reală este vectorul

$$\mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{d}x\bar{i} + \mathrm{d}y\bar{j} + \mathrm{d}z\bar{k} \tag{5.149}$$

$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ reprezentînd diferențialele coordonatelor punctului.

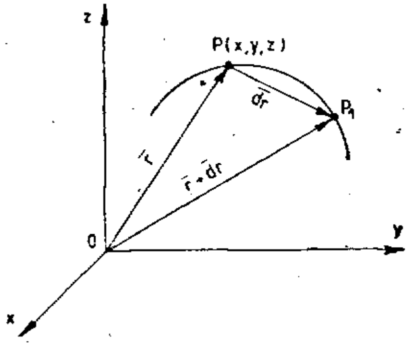


Fig. 5.23

În afara deplasării elementare reale, se poate imagina o multitudine de alte deplasări elementare. Prin deplasări virtuale se înțelege un ansamblu de deplasări elementare (infinitezimale), arbitrare, compatibile cu legăturile sistemului, astfel încît acesta trece de la configurația reală, la o configurație infinit apropiată, geometric posibilă. Deplasările virtuale sînt

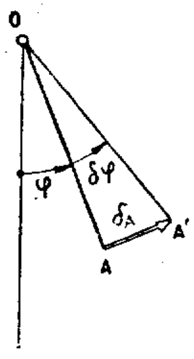


Fig. 5.24

independente de acțiunile exterioare aplicate asupra sistemului și se consideră efectuate instantaneu (timpul este „înghețat"). Deplasările virtuale se notează cu simbolul δ, astfel că deplasarea unui punct material este vectorul $\delta\bar{r}$, acesta avînd expresia

$$\delta\bar{r} = \delta x\,\bar{i} + \delta y\,\bar{j} + \delta z\,\bar{k} \tag{5.150}$$

unde δx, δy, δz sînt proiecțiile pe axele triedrului cartezian $Oxyz$ ale deplasării virtuale $\bar{\delta r}$, reprezentînd deci variațiile elementare (diferențialele) coordonatelor x, y, z, ale punctului material. Din punctul de vedere al semnificației matematice, δ reprezintă un operator diferențial identic cu operatorul d, fiind deci aplicabile aceleași reguli de calcul. De exemplu $\delta(\cos\, x) = (-\sin\, x)\delta x$.

Un exemplu de deplasare virtuală este prezentat în fig. 5.24. Bara OA are poziția precizată prin coordonata generalizată $q_1 = \varphi$. Printr-o deplasare virtuală a barei, aceasta trece instantaneu într-o poziție vecină infinit apropiată, OA' astfel că variația coordonatei generalizate este $\delta\varphi$ iar punctul A înregistrează deplasarea $\bar{\delta}_A = \overline{AA'}$ cu următoarele proprietăți $\bar{\delta}_A \perp \overline{OA}$ și $\delta_A = (OA)\delta\varphi$.

Întrucît deplasările virtuale sînt deplasări elementare, configurația unui mecanism plan căruia i se impune o deplasare virtuală se determină în conformitate cu cele prezentate în paragraful 4.3.3.

În cazul unui sistem cu n grade de libertate, ale cărui coordonate generalizate sînt $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n$, vectorul de poziție al unui punct material este funcție de coordonatele generalizate adică

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_n) \tag{5.151}$$

și deci deplasarea sa virtuală este exprimată în funcție de variațiile coordonatelor generalizate astfel

$$\delta\bar{r}_i = \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_n}\delta q_n. \tag{5.152 a}$$

sau

$$\delta\bar{r}_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k. \tag{5.152 b}$$

Într-un sistem cartezian de referință, variația $\delta\bar{r}_i$ are proiecțiile pe axe

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k\,; \quad \delta y_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k\,; \quad \delta z_i = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k. \tag{5.153}$$

Corespunzător unei deplasări virtuale, se poate defini și evalua lucrul mecanic al forțelor aplicate pe sistem, acesta fiind, evident, un lucru mecanic virtual. Expresia acestui lucru mecanic este

$$\delta L = \sum\bar{F}_i\delta\bar{r}_i = \sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i). \tag{5.154}$$

În cazul deplasării virtuale a unui corp rigid, lucrul mecanic virtual se determină pe baza expresiei (5.56), rezultînd

$$\delta L = \bar{R}\delta\bar{r}_0 + \bar{M}_0\delta\bar{\theta} \tag{5.155}$$

unde $\delta\bar{r}_0$ este deplasarea virtuală a punctului de reducere a forțelor iar $\delta\bar{\theta}$ este rotirea corpului ca urmare a deplasării virtuale.

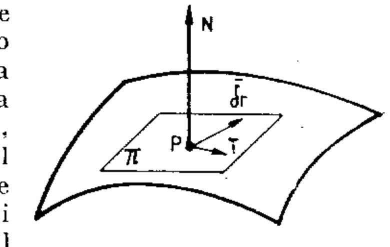


Fig. 5.25

Formulare generală. Forțe generalizate. Fie un punct material O, rezemat fără frecare pe o suprafață (fig. 5.25). În această situație, forța de legătură N are direcția normalei la suprafața de rezemare. Din punct de vedere geometric, punctul se poate deplasa numai în planul tangent Π, ceea ce înseamnă că orice deplasare virtuală $\delta\bar{r}$ este conținută în acest plan și deci $\delta\bar{r} \perp \bar{N}$ și, în consecință, lucrul mecanic virtual este nul, adică

$$\delta L = \bar{N}\delta\bar{r} = N_x\delta_x + N_y\delta_y + N_z\delta_z = 0. \tag{5.156}$$

Același rezultat se obține și în cazul altor rezemări fără frecare (punct material rezemat pe o curbă, reazemul simplu al unui corp rigid etc.). Extinsă la nivelul unui sistem mecanic cu mai multe legături, condiția (5.156) devine

$$\delta L = \sum\bar{R}_{lj}\delta\bar{r}_j = \sum(X_{rj}\delta x_j + Y_{rj}\delta y_j + Z_{rj}\delta z_j) = 0 \tag{5.157}$$

ceea ce permite formularea următoarei concluzii:

Lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură ale unui sistem material cu rezemări fără frecare este nul pentru orice deplasare virtuală a sistemului.

În relația (5.157) X_{rj}, Y_{rj}, Z_{rj} reprezintă proiecțiile reacțiunilor pe axele triedrului $Oxyz$ avînd deci aceleași semnificații cu cele din condițiile de echilibru (3.53).

Relația (5.157) servește, în continuare, la stabilirea condiției de echilibru al unui sistem mecanic. Pentru aceasta, se analizează un sistem în echilibru asupra căruia sînt aplicate forțele exterioare $\bar{F}_{ai}(X_{ai}\; Y_{ai},\; Z_{ai})$. Echilibrul sistemului se examinează prin izolarea corpurilor și punctelor materiale, introducîndu-se deci forțele de legătură, și anume: $\bar{F}_{lk}(X_{lk},\; Y_{lk},\; Z_{lk})$ care reprezintă forțele de legătură interioare; $\bar{R}_{lj}\;(X_{rj},\; Y_{rj},\; Z_{rj})$ — reacțiunile sistemului.

Condiția vectorială de echilibru (3.3) conduce la următoarea relație:

$$\sum\bar{F}_{ai} + \sum\bar{F}_{lk} + \sum\bar{R}_{lj} = 0. \tag{5.158}$$

Se consideră o configurație de deplasări virtuale și se evaluează lucrul mecanic al tuturor forțelor, obținîndu-se

$$\sum\bar{F}_{ai}\delta\bar{r}_i + \sum\bar{F}_{lk}\delta\bar{r}_k + \sum\bar{R}_{lj}\delta\bar{r}_j = 0. \tag{5.159}$$

Avînd în vedere relația (5.157) și cunoscînd că $\sum\bar{F}_{lk}\delta\bar{r}_k = 0$ (deoarece reprezintă lucrul mecanic al forțelor interioare) din relația (5.159) rezultă

$$\delta L = \sum\bar{F}_{ai}\delta\bar{r}_i = 0. \tag{5.160}$$

Condiția (5.160) exprimă principiul lucrului mecanic virtual, al cărui enunț este: *condiția necesară și suficientă ca un sistem mecanic să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al tuturor forțelor active aplicate pe sistem să fie nul.*

În coordonate carteziene relația (5.160) conduce la condiția

$$\sum X_i\delta x_i + \sum Y_i\delta y_i + \sum Z_i\delta z_i = 0 \tag{5.161}$$

unde X_i, Y_i, $Z_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ reprezintă proiecțiile forțelor active.

În cazul unui sistem mecanic cu n grade de libertate se pot impune n deplasări virtuale independente, astfel că, dacă se au în vedere relațiile (5.153) și se grupează în mod convenabil termenii, condiția (5.161) devine

$$\delta L = \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_n}\right)\delta q_n = 0. \qquad (5.162)$$

Cu notația

$$Q_k = \sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \qquad (5.163)$$

expresia (5.162) are forma

$$\delta L = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_k\delta q_k + \ldots + Q_n\delta q_n = 0. \qquad (5.164)$$

Condiția de echilibru, exprimată sub forma (5.164), este îndeplinită dacă, și numai dacă

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots, Q_k = 0, \ldots, Q_n = 0 \qquad (5.165)$$

adică

$$Q_k = \sum_{i=1}^{m} \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5.166)$$

Rezolvarea sistemului de ecuații (5.166) conduce la determinarea coordonatelor generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$ iar acestea precizează poziția de echilibru a sistemului mecanic.

Mărimea Q_k, definită conform expresiei (5.163), poartă numele de forță generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate q_k. Pentru ca un sistem mecanic să fie în echilibru este deci necesar și suficient ca toate forțele generalizate să fie egale cu zero.

Deoarece coordonatele generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sînt liniar independente, rezultă că și variațiile $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ sînt, de asemenea, liniar independente. O modalitate de a impune deplasări virtuale independente constă în a bloca (anula) pe rînd $n - 1$ grade de libertate și de a exprima, de fiecare dată, condiția de echilibru (5.164). Fie de exemplu, blocate gradele de libertate $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, ceea ce înseamnă că toate variațiile coordonatelor generalizate sînt nule cu excepția variației $\delta q_j \neq 0$. În aceste circumstanțe, deoarece se înregistrează deplasare virtuală numai pe direcția forței generalizate Q_j, condiția (5.164) capătă forma particulară

$$\delta L_j = Q_j \delta q_j = 0 \qquad (5.167a)$$

și deci

$$Q_j = \frac{\delta L_j}{\delta q_j} = 0. \qquad (5.167b)$$

Procedînd în mod analog pentru fiecare coordonată generalizată ($j = 1, 2, \ldots, n$) se obțin n ecuații independente de forma (5.167 a, b) care exprimă condițiile de echilibru ale sistemului mecanic.

Determinarea forțelor de legătură la sisteme static determinate. Principiul lucrului mecanic se poate utiliza pentru determinarea forțelor de legătură la sisteme static determinate. Aceste sisteme au $G_l \geqslant 0$, ceea ce în-

seamnă că în problemele de echilibru necunoscutele sînt alcătuite din coordonatele generalizate $q_j (j = 1, 2, \ldots, G_l)$ și din forțele de legătură. În prealabil, se determină poziția de echilibru a sistemului, adică valorile mărimilor q_j, pe baza condițiilor (5.167b). Este evident că, la sistemele care au asigurată invariabilitatea geometrică ($G_l = 0$) toți parametrii au valori nule. În scopul determinării unei anumite forțe de legătură, se suprimă legătura corespunzătoare și se introduce forța de legătură respectivă. În acest fel, sistemul mecanic dobîndește un grad de libertate suplimentar și, corespunzător acestuia, o coordonată generalizată în plus. Sistemul astfel transformat se menține în echilibru sub acțiunea forțelor active (date) și a forței de legătură (necunoscute). Condiția de echilibru se exprimă sub forma (5.167b), aplicată însă gradului de libertate suplimentar. Dacă q_{n+1} este coordonata generalizată suplimentară, condiția (5.167b) obținută din $\delta q_i = 0$, ($i = 1, 2, \ldots, n$) și $\delta q_{n+1} \neq 0$, conduce la

$$Q_{n+1} = \delta L_{n+1}/\delta q_{n+1} = 0 \qquad (5.168)$$

ecuație care are o singură necunoscută și anume forța de legătură căutată.

În numeroase situații din ingineria de construcții se urmărește determinarea forțelor de legătură la structuri static determinate și geometric invariabile ($G_l = 0$). În aceste cazuri, poziția sistemului este cunoscută și deci se trece direct la calculul forței de legătură pe baza condiției (5.168).

Pentru tipurile uzuale de rezemare ale structurilor plane în fig. 5.26, 5.27 și 5.28 sînt puse în evidență modalitățile de suprimare a legăturilor corespunzătoare determinării unei anumite forțe de legătură.

Determinarea forțelor de legătură la structuri plane static determinate prin utilizarea principiului lucrului mecanic virtual comportă următoarele etape:

— suprimarea legăturii și introducerea forței de legătură corespunzătoare, operație în urma căreia se creează un mecanism cu un grad de libertate; acest mecanism este în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare (date) și a forței de legătură necunoscute;

— se imprimă mecanismului o deplasare virtuală arbitrară și se calculează lucrul mecanic efectuat în urma acestei deplasări; pentru calculul practic se determină diagramele de deplasări după două direcții ortogonale, așa cum s-a arătat în cadrul paragrafului 4.3.3.;

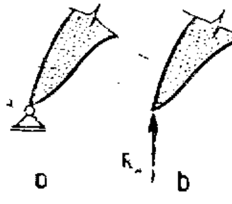


Fig. 5.26

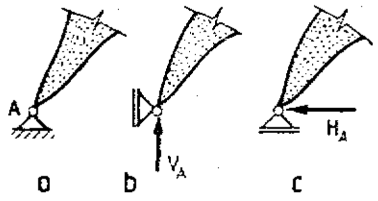


Fig. 5.27

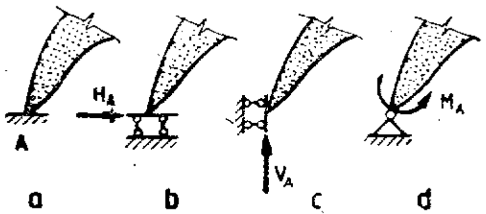


Fig. 5.28

— se exprimă condiția de echilibru (5.160), în care lucrul mecanic virtual se evaluează conform relației (5.155) care devine

$$\delta L = \sum X_i \delta x_i + \sum Y_i \delta y_i + \sum M_j \delta\theta_j = 0 \tag{5.169}$$

unde X_i, Y_i sînt proiecțiile forțelor, inclusiv ale forței de legătură, pe axele de referință Ox și Oy; δx_i, δy_i — deplasările virtuale asociate componentelor X_i și Y_i; M_j — momentele concentrate care acționează asupra structurii; $\delta\theta_j$ — rotirile corespunzătoare momentelor M_j;

— se rezolvă ecuația (5.169) și se determină forța de legătură.

Aplicația 5.1. Se exemplifică modul de aplicare a principiului lucrului mecanic virtual la determinarea unor forțe de legătură exterioare (reacțiuni) ale sistemului de corpuri din fig. 5.29, *a*. Pentru caracterizarea sistemului se utilizează relația (3.47b) în care $C = 3$, $N_p = 0$, $i = 0$, $a_c = 0$, $a_s = 4$, $r_1 = 1$ astfel că se obține $G_l = 0$, deci sistemul este static determinat și geometric invariabil, avînd un număr minim de legături.

În vederea determinării reacțiunii H_B se procedează ca în fig. 5.27, *b* rezultînd mecanismul din fig. 5.29, *b*. Pentru trasarea diagramelor deplasărilor pe direcțiile orizontală și verticală se stabilesc centrele instantanee de rotație conform precizărilor din paragraful 4.3.3. Pozițiile acestor centre sînt arătate în fig. 5.29, *b*. Din modul în care au fost determinate centrele instantanee se obține $h_1 = 2{,}00$ m. Pe aceeași figură sînt indicate componentele orizontale și verticale ale forțelor aplicate pe structură. Se face precizarea că forțele distribuite de pe fiecare corp au fost înlocuite cu rezultanta lor.

Se impune mecanismului din fig. 5.29, *b* o deplasare virtuală arbitrară, de exemplu, se consideră o rotire elementară $\delta\theta_1 = \theta_0$ (fig. 5.29, *c*, *d*). În aceste condiții, toate celelalte deplasări se pot determina în funcție de parametrul θ_0, acesta reprezentînd de fapt variația coordonatei generalizate $\delta q_1 = \theta_0$. Se obțin $\delta\theta_2 = 3\theta_0$, $\delta\theta_3 = 1{,}2\ \theta_0$, valori pe baza cărora se calculează deplasările δx, δy ale tuturor forțelor. Condiția de echilibru (5.169) conduce la următoarea ecuație:

$$\delta L = -(100\cdot 0{,}5)(6\theta_0) + (100\cdot 0{,}866)(2\theta_0) - (20\cdot 12)(6\theta_0) - (20\cdot 7)(0{,}5\cdot 3\theta_0) + $$
$$+ \left(\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 9\right)(4{,}5\cdot 1{,}2\ \theta_0) - (100)(1{,}2\ \theta_0) + (H_B)(8\cdot 3\theta_0) = 0.$$

Deoarece $\theta_0 \neq 0$, ecuația se simplifică cu această mărime și apoi se rezolvă, obținîndu-se $H_B = 48{,}66$ kN.

În ecuația de mai înainte s-au marcat prin paranteze componentele forțelor și deplasările asociate acestor forțe.

Reacțiunea V_A se determină pe baza mecanismului din fig. 5.29, *e*, obținut ca urmare a suprimării legăturii pe direcția verticală, așa cum se arată în fig. 5.27, *b*. După determinarea centrelor de rotație, se alege ca deplasare virtuală variația $\delta q_1 = \delta y_B = \delta_0$ ceea ce conduce la următoarele valori ale rotirilor corpurilor (fig. 5.29, *f*, *g*):

$$\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \delta_0/16\,; \quad \delta\theta_3 = \delta_0/6{,}3157.$$

Ecuația de lucru mecanic este

$$\delta L = (100\cdot 0{,}5)(0{,}375\ \delta_0) - (100\cdot 0{,}866)(2\ \delta_0/16) + (20\cdot 12)\cdot(6\ \delta_0/16) +$$
$$+ (20\cdot 7)(15{,}5\ \delta_0/16) + \left(\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 9\right)(4{,}5\ \delta_0/6{,}3157) -$$
$$- (100)(\delta_0/6{,}3157) - V_B(\delta_0) = 0$$

care, pentru $\delta_0 \neq 0$, are soluția $V_B = 313{,}94$ kN.

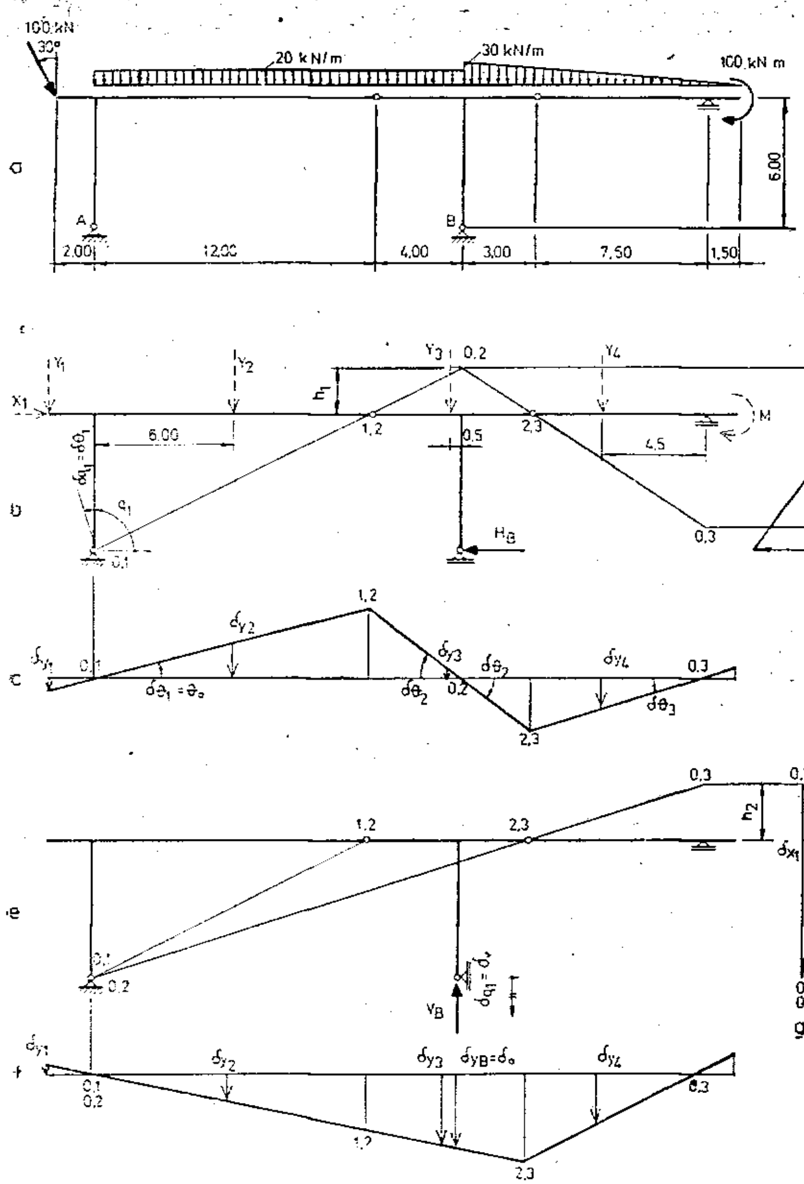


Fig. 5.29

5.4.2. PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT

Formulare generală. Se consideră un punct material cu legături, acționat de un sistem de forțe exterioare reprezentate prin rezultanta $\bar{F}$. Ecuația diferențială a mișcării este dată de relația (5.84) care se poate scrie sub forma

$$\bar{F} + \bar{F}_l - m\bar{a} = 0 \tag{5.170}$$

unde $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$ este accelerația punctului material. Mărimea vectorială $(-m\bar{a})$ fiind de tip forță se notează $\bar{\mathfrak{F}}_i$ și este numită forță de inerție, astfel că ecuația (5.170) devine

$$\bar{F} + \bar{F}_l + \bar{\mathfrak{F}}_i = 0 \tag{5.171 a}$$

Relaţia (5.171a) reprezintă o ecuaţie de echilibru fictiv deoarece, în realitate, punctul material este în mişcare ($a \neq 0$). Forţele $\bar{F}$ şi $\bar{F}_l$ sînt forţe reale, dar forţa de inerţie $\bar{\mathfrak{F}}_i$ este aplicată convenţional asupra punctului material studiat, ea fiind o forţă fictivă. Forţa de inerţie reprezintă o forţă reală numai pentru sistemul material care acţionează asupra punctului studiat, provocînd mişcarea acestuia, şi se exercită prin legăturile existente între punctul material şi agentul motor. Relaţia (5.171*a*) exprimă condiţia unui echilibru formal (convenţional), numit echilibru dinamic. În cazul unui sistem de puncte materiale, relaţia poate fi scrisă pentru fiecare punct al sistemului iar apoi, prin însumare, se obţine

$$\Sigma \bar{F}_i + \Sigma \bar{F}_l + \Sigma \bar{\mathfrak{F}}_i = 0. \qquad (5.171b)$$

Avînd în vedere că în orice moment al mişcării fiecare punct al sistemului (corpului) se află în echilibru dinamic, rezultă că şi sistemul în ansamblul său este, de asemenea, în echilibru dinamic şi ca atare forţele date, forţele de legătură şi forţele de inerţie satisfac ambele relaţii vectoriale (3.3), astfel că rezultă a doua condiţie a echilibrului dinamic, şi anume:

$$\Sigma \bar{M}_0(\bar{F}_i) + \Sigma M_0(\bar{F}_l) + \Sigma M_0(\bar{\mathfrak{F}}_i) = 0. \qquad (5.171c)$$

Relaţiile (5.171a, b, c) conduc la formularea principiului lui d'Alembert care are următorul enunţ: *forţele date, forţele de legătură şi forţele de inerţie aplicate asupra unui punct sau sistem de puncte materiale, formează un sistem echivalent cu zero, fiind deci în echilibru.* În acest fel, problemele de dinamică se abordează şi se rezolvă prin exprimarea unor condiţii de echilibru convenţional. Din aceste condiţii se determină atît legea de mişcare a sistemului studiat cît şi forţele de legătură. Metoda este numită cineto-statică fiind uşor şi simplu de utilizat în aplicaţiile tehnice.

Echilibrul dinamic se poate exprima fie sub formă analitică prin condiţiile generale (3.53) care includ însă şi forţele de inerţie, fie pe baza principiului lucrului mecanic virtual (5.160), situaţie în care sînt eliminate forţele de legătură. Astfel, dacă se analizează pe baza principiului lui d'Alembert mişcarea unui sistem alcătuit din m puncte materiale, condiţia de echilibru (5.160) conduce la următoarea expresie vectorială:

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i)\delta \bar{r}_i = 0 \qquad (5.172)$$

care este echivalentă cu următoarea relaţie scalară:

$$\sum_{i=1}^{m} [(X_{ai} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_{ai} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_{ai} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0 \qquad (5.173)$$

unde X_{ai}, Y_{ai}, Z_{ai} ($i = 1, 2, \ldots, m$) sînt proiecţiile forţelor pe axele triedrului *Oxyz*.

Relaţiile (5.172) şi (5.173) reprezintă principiul lui d'Alembert în formularea Lagrange.

Mişcarea unui punct material. Studiul mişcării prin metoda cineto-statică comportă următoarele operaţii:

— identificarea (precizarea) forţelor date (direct aplicate), acestea fiind, în general, cunoscute;

— suprimarea legăturilor şi introducerea forţelor de legătură necunoscute;

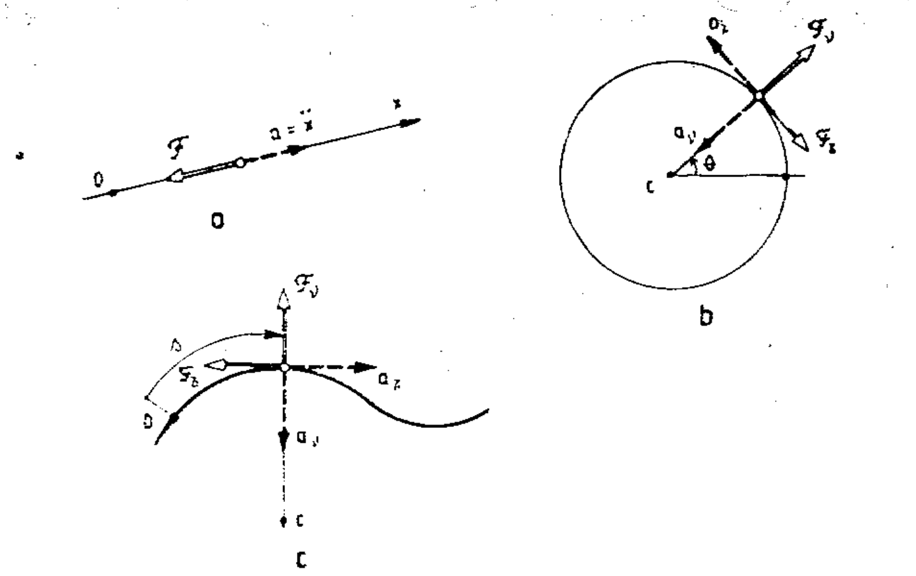


Fig. 5.30

— alegerea unui sistem de coordonate în raport cu care se studiază mişcarea, componentele acceleraţiei în acest sistem fiind deci necunoscute;

— introducerea forţei de inerţie prin componentele sale în sistemul de referinţă ales;

— exprimarea echilibrului convenţional prin ecuaţii de forma (3.53) sau pe baza principiului lucrului mecanic virtual (5.172), (5.173);

— rezolvarea ecuaţiilor scalare şi obţinerea necunoscutelor (legea de mişcare şi, eventual, forţele de legătură dinamice).

În funcţie de forma traiectoriei punctului material rezultă următarele situaţii (fig. 5.30):

Mişcarea rectilinie (fig. 5.30, *a*). Se alege ca axă de referinţă traiectoria punctului şi deci $a = \ddot{x}$. Forţa de inerţie are sensul indicat în figură şi mărimea $\mathfrak{F} = m\ddot{x}$.

Mişcarea circulară (fig. 5.30, *b*). Poziţia punctului este precizată prin coordonata θ. Acceleraţia are componentele a_τ, cu sensul convenţional pozitiv în concordanţă cu semnul coordonatei θ, şi respectiv a_ν cu sensul spre centrul cercului, astfel că cele două componente ale forţei de inerţie au sensurile din figură. Mărimile acestor componente se obţin avînd în vedere expresiile (4.25) şi (4.26) rezultînd $\mathfrak{F}_\tau = mR\ddot{\theta}$ şi $\mathfrak{F}_\nu = mR(\dot{\theta})^2$.

Mişcarea curbilinie. Coordonata curbilinie s stabileşte sensul convenţional pozitiv al componentei tangenţiale a_τ iar poziţia centrului de curbură pe cel al componentei normale a_ν, astfel că forţele de inerţie $\mathfrak{F}_\tau$ şi $\mathfrak{F}_\nu$ au sensurile ca în fig. 5.30, *c*. Valorile acestor componente ale forţei de inerţie sînt $\mathfrak{F}_\tau = m\dot{v}$ şi $\mathfrak{F}_\nu = mv^2/\rho$, în care notaţiile au semnificaţiile din relaţiile (4.19).

Sisteme de puncte materiale. Torsorul forţelor de inerţie. Fie un sistem de puncte materiale cu masele $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$, mişcarea fiecărui punct fiind caracterizată prin acceleraţia $\bar{a}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, (fig. 5.31). Pentru exprimarea echilibrului dinamic prin relaţiile vectoriale (5.171b, c) este necesar să se aplice în fiecare punct forţa de inerţie corespunzătoare. Acest

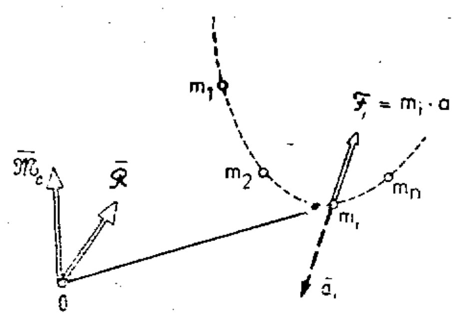


Fig. 5.31

lucru complică însă rezolvarea problemelor deoarece distribuția accelerațiilor depinde de felul mişcării sistemului. În scopul simplificării calculelor se urmăreşte înlocuirea forțelor de inerție, aplicate în fiecare punct al sistemului, cu elemente mecanice echivalente, dar cu alcătuire mai simplă. Aceasta înseamnă, de fapt, reducerea forțelor de inerție într-un punct, adică determinarea torsorului forțelor de inerție din punctul de reducere. Astfel, dacă forțele de inerție se reduc în punctul O, torsorul de reducere este alcătuit din forța rezultantă $\bar{\mathcal{R}}$ şi vectorul moment $\bar{\mathcal{M}}_0$ ale căror expresii se obțin pe baza relațiilor (2.10)

$$\bar{\mathcal{R}} = \sum \bar{\mathcal{F}}_i \qquad (5.174a)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_0 = \sum \bar{r}_i \times \bar{\mathcal{F}}_i. \qquad (5.174b)$$

În relația (5.174a) se face înlocuirea $\bar{\mathcal{F}}_i = -m_i\bar{a}_i$ rezultînd

$$\bar{\mathcal{R}} = \sum(-m_i\bar{a}_i) = -\sum m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\sum m_i\bar{v}_i\right) = -\frac{d\bar{H}}{dt}.$$

Derivata impulsului sistemului de puncte materiale se poate însă exprima și sub forma (5.37), adică în funcție de masa M a întregului sistem și de accelerația $\bar{a}_c$ a centrului maselor și deci

$$\bar{\mathcal{R}} = -M\bar{a}_c. \qquad (5.175)$$

Rezultanta forțelor de inerție nu depinde de punctul de reducere. Ea este egală cu forța de inerție a unui punct material care concentrează întreaga masă a sistemului și este situată în centrul maselor acestuia.

Se urmărește, în continuare, ca în expresia (5.174b) distribuția accelerațiilor să fie înlocuită prin distribuția de viteze. În acest scop, se fac următoarele înlocuiri și transformări matematice:

$$\bar{\mathcal{M}}_0 = \sum \bar{r}_i \times (-m_i\bar{a}_i) = -\sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}.$$

Avînd în vedere regula de derivare a produsului a două funcții, rezultă următoarea relație:

$$\sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i) - \sum \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i\bar{v}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i\right) + \sum(\bar{v}_i \times m_i\bar{v}_i).$$

Se observă că ultimul termen al expresiei precedente este nul, în final obținîndu-se

$$\bar{\mathcal{M}}_0 = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i\right) \qquad (5.176)$$

ceea ce înseamnă că momentul rezultant al forțelor de inerție depinde atît de punctul de reducere (prin vectorii $\bar{r}_i$) cît și de felul mișcării (prin distribuția vitezelor).

Dacă este cunoscut torsorul forțelor de inerție într-un punct O, se poate apoi determina torsorul de reducere în oricare alt punct avînd în vedere că forța rezultantă $\bar{\mathcal{R}}$ este un invariant iar momentul rezultant variază în conformitate cu expresia (2.17).

Expresii ale torsorului forțelor de inerție. Se urmărește stabilirea expresiilor celor două elemente ($\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\mathcal{M}}_0$) ale torsorului forțelor de inerție în cazul cîtorva mișcări particulare ale solidului rigid.

Mișcarea de translație. În acest caz, cîmpul de viteze, la un moment dat, este constant adică $\bar{v}_i = \bar{v}_c$ și deci

$$\bar{\mathcal{M}}_0 = -\frac{d}{dt}\left(\sum \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_c\right) = -\frac{d}{dt}\left[\left(\sum m_i\bar{r}_i\right) \times \bar{v}_c\right] = -\frac{d}{dt}(M\bar{r}_c \times \bar{v}_c) = -M\frac{d\bar{r}_c}{dt} \times \bar{v}_c - M\bar{r}_c \times \frac{d\bar{v}_c}{dt}$$

în care $\bar{r}_c$ este vectorul de poziție al centrului maselor.

Se observă că $d\bar{r}_c/dt = \bar{v}_c$ și deci $M\bar{v}_c \times \bar{v}_c = 0$, deci

$$\bar{\mathcal{M}}_0 = -M\bar{r}_c \times \bar{a}_c = \bar{r}_c \times (-M\bar{a}_c) = \bar{r}_c \times \bar{\mathcal{R}}. \qquad (5.177)$$

Dacă reducerea se face în centrul maselor $\bar{r}_c = 0$ și în consecință $\bar{\mathcal{M}}_c = 0$.

În concluzie, la un solid în mișcare de translație forțele de inerție se reduc la o forță rezultantă unică $\bar{\mathcal{R}} = -M\bar{a}_c$ aplicată în centrul maselor. Solidul rigid poate fi înlocuit în acest caz printr-un punct material cu masa egală a întregului corp, plasat în centrul maselor acestuia.

Mișcarea de rotație cu axă fixă. Se consideră corpul din fig. 5.32, *a* în mișcare de rotație în raport cu axa fixă. Triedrul mobil $Oxyz$ se alege astfel încît

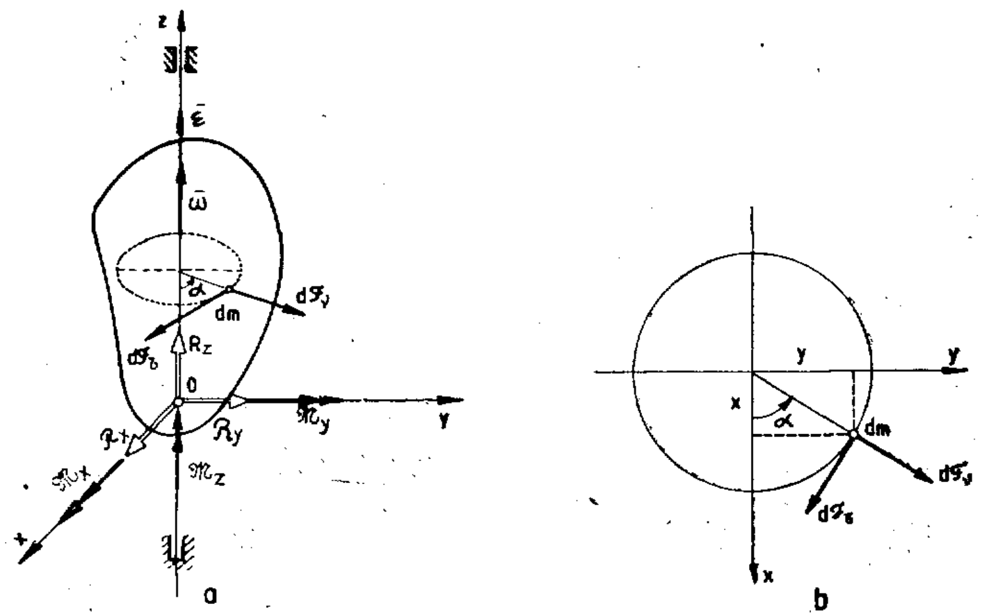


Fig. 5.32

originea sa să coincidă cu punctul de reducere iar axa Oz să se confunde cu axa de rotație. În acest fel, vectorii $\overline{\omega}$ și $\overline{\varepsilon}$ au direcția pe axa Oz. Torsorul de reducere se consideră prin componentele axei ale forței rezultante $\overline{\mathcal{R}}$ și respectiv ale momentului $\overline{\mathcal{M}}_0$ sub forma

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}} &= \mathcal{R}_x\overline{i} + \mathcal{R}_y\overline{j} + \mathcal{R}_z\overline{k}\\ \mathcal{M}_o &= \mathcal{M}_x\overline{i} + \mathcal{M}_y\overline{j} + \mathcal{M}_z\overline{k}.\end{aligned} \tag{5.178}$$

Forța de inerție corespunzătoare masei elementare dm, a cărei poziție este precizată prin coordonatele curente x, y, z, are componentele $d\mathcal{F}_\tau$ și $d\mathcal{F}_\nu$, arătate în fig. 5.32, și ale căror mărimi sînt

$$d\mathcal{F}_\tau = r\varepsilon dm\,; \quad d\mathcal{F}_\nu = r\omega^2 dm. \tag{5.179}$$

Proiecțiile pe axele triedrului ale vectorului $\overline{\mathcal{R}}$ sînt date de relațiile (2.11), obținîndu-se

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x &= \int (d\mathcal{F}_\tau)\sin\alpha + \int (d\mathcal{F}_\nu\cos\alpha) = \varepsilon\int y dm + \omega^2\int x dm\\ \mathcal{R}_y &= -\int (d\mathcal{F}_\tau)\cos\alpha + \int (d\mathcal{F}_\nu)\sin\alpha = -\varepsilon\int x dm + \omega^2\int y dm\\ \mathcal{R}_z &= 0\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x &= M(\varepsilon y_c + \omega^2 x_c)\\ \mathcal{R}_y &= M(-\varepsilon x_c + \omega^2 y_c)\\ \mathcal{R}_z &= 0\end{aligned} \tag{5.180}$$

unde M este masa întregului corp, iar x_c și y_c sînt coordonatele centrului său de mase.

Proiecțiile pe axe ale momentului rezultant $\overline{\mathcal{M}}_0$ se obțin prin aplicarea expresiilor (2.12)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_x &= \varepsilon\int xz dm - \omega^2\int yz dm\\ \mathcal{M}_y &= \varepsilon\int yz dm + \omega^2\int xz dm\\ \mathcal{M}_z &= -\varepsilon\int r^2 dm.\end{aligned}$$

Avînd în vedere definițiile momentelor de inerție, exprimate prin relațiile (5.4) și (5.8), rezultă

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_x &= \varepsilon J_{zx} - \omega^2 J_{yz}\\ \mathcal{M}_y &= \varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}\\ \mathcal{M}_z &= -\varepsilon J_z.\end{aligned} \tag{5.181}$$

Dacă corpul are o axă de simetrie Δ și se rotește în jurul acestei axe, centrul de greutate se găsește pe această axă ($x_c = 0$; $y_c = 0$) și deci $\mathcal{R} = 0$.

Deoarece, în acest caz $J_{zx} = J_{yz} = 0$, momentul forțelor de inerție are componentele $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y = 0$ și în consecință $\overline{\mathcal{M}} = (-\varepsilon J_\Delta)\overline{k}$, fiind deci dirijat după axa de rotație.

Placa plană în rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul ei. Prin alegerea triedrului mobil astfel ca axa Oz să coincidă cu axa de rotație rezultă că placa este conținută în planul xOy (fig. 5.33, *a*), iar rotirea se face în jurul punctului O. În aceste condiții $z = 0$ și deci $J_{zx} = J_{yz} = 0$ iar J_z este egal cu momentul polar J_0.

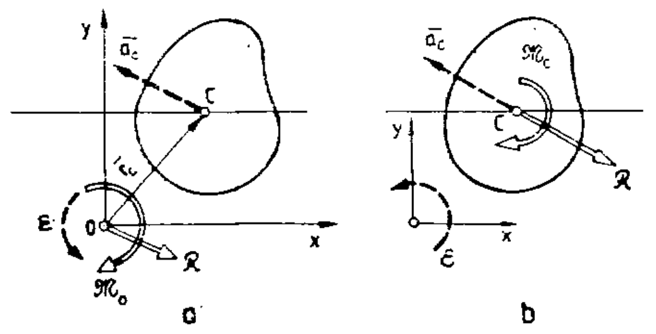


Fig. 5.33

Dacă forțele de inerție se reduc în centrul de rotație O, pe baza expresiilor (5.180) se obține

$$\mathcal{R} = \sqrt{\mathcal{R}_x^2 + \mathcal{R}_y^2} = M\sqrt{(x_c^2 + y_c^2)(\omega^4 + \varepsilon^2)} = Mr_c\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

sau

$$\mathcal{R} = Ma_c \tag{5.182 a}$$

expresie care rezultă și din relația (5.175).

Momentul forțelor de inerție are componentele date de expresiile (5.181) care conduc la

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y = 0\,; \quad \mathcal{M}_z = -\varepsilon J_z. \tag{5.182 b}$$

Avînd în vedere că $J_z = J_0$ și că vectorul moment este perpendicular pe planul plăcii ($\overline{\mathcal{M}}_z = -\varepsilon J_z\overline{k}$), acesta se poate reprezenta numai prin sensul său de rotire, care este invers semnului accelerației unghiulare ε, și are mărimea $\mathcal{M}_0 = J_0\varepsilon$ (v. fig. 5.33, *a*).

Forțele de inerție se pot reduce, de asemenea, în centrul de greutate al plăcii, situație în care elementele torsorului sînt reprezentate în fig. 5.33, *b* și au valorile $\mathcal{R} = Ma_c$ și $\mathcal{M}_c = J_c\varepsilon$. (5.183)

Aplicarea practică la sisteme de corpuri. Studiul mișcării unui sistem de corpuri pe baza principiului lui d'Alembert se realizează pe baza următorului algoritm :

— se stabilește numărul gradelor de libertate pe care le prezintă sistemul de corpuri și se aleg coordonatele generalizate ;

— se izolează corpurile și se identifică forțele date și forțele de legătură care sînt aplicate pe fiecare corp ;

— se precizează, pentru fiecare corp în parte, tipul de mişcare, şi se exprimă parametrii cinematici ai mişcării fiecărui corp în funcţie de coordonatele generalizate ale sistemului ;

— în funcţie de parametrii cinematici se determină torsorul forţelor de inerţie al fiecărui corp din sistem ;

— se scriu şi se rezolvă ecuaţiile de echilibru dinamic determinîndu-se mişcarea sistemului şi forţele de legătură.

Observaţie. Dacă interesează numai mişcarea sistemului, echilibrul dinamic se poate exprima pe baza principiilor lucrului mecanic virtual, situaţie în care forţele de legătură nu mai apar în sistemul de ecuaţii. După determinarea mişcării se pot apoi izola corpurile şi calcula forţele de legătură prin exprimarea, pentru fiecare corp în parte, a condiţiilor de echilibru fictiv.

6. Eforturi

6.1. SCHEMA STATICĂ

6.1.1. SCHEMATIZAREA CONSTRUCŢIILOR. STRUCTURI DE REZISTENŢĂ

Structura de rezistenţă a unei construcţii este osatura acesteia, care are rolul de a prelua toate încărcările construcţiei şi a le transmite apoi la teren, în condiţii care să ofere siguranţă deplină în exploatare. Formele geometrice ale structurilor de rezistenţă prezintă o mare varietate în funcţie de scopul pentru care se execută construcţia, materialul folosit, metoda de realizare etc. Elementele care compun o structură de rezistenţă se pot clasifica în trei grupe mari :

Elemente de construcţie cu fibră medie. Acestea au două dimensiuni (dimensiunile secţiunii transversale) mici în raport cu a treia (lungimea lor). Din această categorie fac parte :

— firele, care sînt elemente flexibile ce nu opun rezistenţă la îndoirea (încovoierea) lor ;

— barele, care datorită secţiunii transversale mai mari au o rigiditate oarecare la încovoiere. Practic însă ele se folosesc la acţiunea forţelor care lucrează în lungul axei lor ;

— grinzile, care se caracterizează prin rigiditate mare transversală fiind supuse în special la încărcări transversale axei lor.

Elementele de construcţie cu fibră medie au următoarele caracteristici geometrice :

— fibra medie sau axa barei (grinzii) ; este locul geometric al centrelor de greutate ale secţiunilor transversale. După forma axei se întîlnesc bare sau grinzi drepte şi bare sau grinzi curbe (în plan sau în spaţiu) ;

— secţiunea transversală a elementului ; este secţiunea normală pe axă. Poate fi constantă pe toată lungimea barei (grinzii) sau variabilă. Forma secţiunii transversale depinde de materialul din care este alcătuit elementul de construcţie şi trebuie să fie corespunzătoare solicitărilor pe care le suportă. Astfel, barele şi grinzile din lemn au forma circulară sau dreptunghiulară (fig. 6.1), grinzile din beton armat pot fi dreptunghiulare, în formă de T sau de alte forme (fig. 6.2).

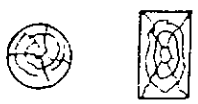


Fig. 6.1.

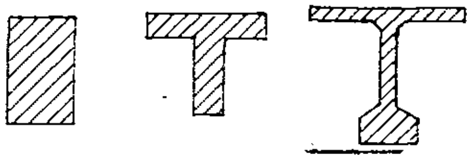


Fig. 6.2.

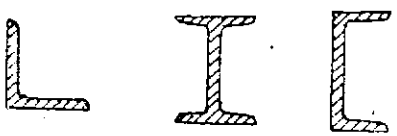


Fig. 6.3.

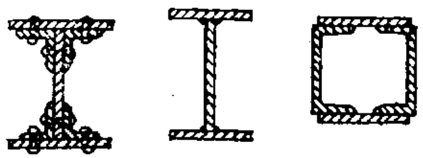


Fig. 6.4.

Barele și grinzile din oțel pot avea secțiuni transversale *simple*, atunci cînd sînt alcătuite dintr-un singur profil laminat, cornieră, profil I, profil [(fig. 6.3) etc. sau pot avea secțiunea transversală compusă din mai multe profile laminate simple, asamblate prin nituire sau sudură (fig. 6.4).

Elemente de construcție cu suprafață medie. Aceste elemente au una din dimensiuni (grosimea) foarte mică în raport cu celelalte două (fig. 6.5).

Suprafața care împarte în două părți egale grosimea elementului se numește *suprafață medie*.

Elementele cu suprafață medie sînt de două tipuri :

— membranele, care au grosimea mică și deci nu opun nici o rezistență la încovoiere ;

— plăcile, care au rigiditate mai mare și pot suporta eforturi de încovoiere.

După forma suprafeței medii plăcile și membranele pot fi curbe (fig. 6.5, *a*) sau plane (fig. 6.5, *b*).

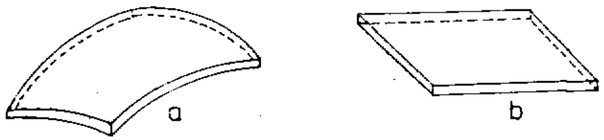


Fig. 6.5.

Elemente masive sau blocuri. Au toate cele trei dimensiuni comparabile ca ordin de mărime. Sînt folosite ca ziduri de sprijin, baraje, blocuri de fundație, cuzineți de rezemare la poduri etc.

Legăturile dintre diversele elemente din care este alcătuită construcția, precum și dintre aceasta și terenul de fundare, sînt foarte complexe. În această situație, exprimarea matematică a condițiilor de echilibru este astfel dificilă sau chiar imposibilă. Ca atare, este necesar ca din ansamblul fenomenelor să se rețină numai cele esențiale, neglijîndu-se acelea care au o importanță secundară.

Se fac deci o serie de ipoteze simplificatoare care se referă la :

— elementele din care este alcătuită construcția (structura de rezistență) ;
— legăturile dintre elemente în ansamblul construcției ;
— comportarea materialelor ;
— încărcările care acționează construcția.

Atît timp cît admiterea unor ipoteze simplificatoare nu constituie o îndepărtare prea mare de realitate, rezultatele calculelor pot fi considerate ca satisfăcătoare.

Schema de calcul a unei construcții cuprinde elementele de rezistență din care este compusă, legăturile mecanice dintre acestea, precum și încărcările care acționează asupra lor.

Din punct de vedere mecanic, schema de calcul reprezintă un sistem de *corpuri în echilibru sub acțiunea forțelor date*.

6.1.2. IPOTEZE SIMPLIFICATOARE

În Mecanica teoretică se consideră în mod ideal că toate corpurile sînt indeformabile și deci au o rezistență nelimitată, fapt acceptabil pentru scrierea ecuațiilor de echilibru. În realitate nu există un astfel de corp, construcțiile și elementele de construcție se deformează sub acțiunea încărcărilor care le acționează, iar dacă aceste încărcări depășesc anumite limite ele se pot distruge (în sensul că ies din uz).

Prin deformare, pozițiile reciproce ale diverselor forțe care acționează o construcție se schimbă.

Echilibrul se realizează deci în poziția deformată a structurii iar aplicarea condițiilor de echilibru ar trebui făcută în această stare care inițial nu este cunoscută.

Realitatea arată că, în general, deformațiile construcțiilor sub acțiunea încărcărilor din exploatare sînt foarte mici în raport cu dimensiunile lor inițiale, astfel că poziția deformată este suficient de apropiată de cea inițială. Modificările poziției forțelor datorită deformării sînt practic neglijabile și astfel condițiile de echilibru se pot scrie pe forma inițială, nedeformată, ceea ce simplifică foarte mult calculele, deoarece se pot aplica metodele și rezultatele Mecanicii teoretice. Această ipoteză simplificatoare este valabilă atît timp cît deplasările sînt asimilabile cu infiniți mici, adică diferența dintre poziția inițială și cea deformată este neglijabilă. Sînt situații cînd deformațiile construcțiilor sau elementelor lor sînt mari și deci studiul echilibrului trebuie făcut pe forma reală, deformată (calcul de ordinul II).

În domeniul micilor deformații se admite, de asemenea, ipoteza proporționalității dintre încărcări și deplasările corespunzătoare, ipoteză a cărei justificare se va face mai tîrziu. Aceasta înseamnă că efectele unei forțe asupra unei construcții sînt independente de efectele celorlalte forțe. Un anumit efect (de exemplu o deplasare) produs de mai multe forțe rezultă ca o sumă a efectelor produse de fiecare forță în parte, efecte ce sînt proporționale cu forțele corespunzătoare. Efectul total se poate exprima deci printr-o relație liniară în funcție de forțele care îl produc (principiul suprapunerii efectelor — calculul de ordinul I).

6.1.3. SCHEMATIZAREA ÎNCĂRCĂRILOR. ACȚIUNI ÎN CONSTRUCȚII

Forțele care acționează construcțiile sînt foarte diverse, modul de distribuție și valorile lor variind în limite foarte largi. De exemplu, un pod de cale ferată suportă în principal următoarele încărcări :

— greutatea proprie a structurii de rezistență a podului ;
— greutatea elementelor căii (șine, traverse etc.), trotuare, conducte ;

— greutatea convoaielor care vor circula pe pod în decursul existenței sale;
— efecte dinamice provenind din faptul că trenurile parcurg podul în viteză;
— presiunea vîntului etc.

Este de observat că nu toate forțele acționează în același mod. Astfel, greutatea structurii de rezistență și greutatea elementelor căii au în permanență (sau pe perioade de timp foarte mari) aceleași valori, deci nu variază în timp. Greutatea unui convoi apare numai atunci cînd acesta parcurge podul, acționînd variabil și numai o perioadă de timp limitată asupra structurii. Este însă o acțiune certă, decurgînd din rațiunea pentru care a fost executată construcția. Alte forțe, de exemplu presiunea vîntului, acționează în mod accidental.

Clasificarea încărcărilor se face după mai multe criterii, și anume:

1) Din punctul de vedere al acțiunii asupra construcțiilor:

a) forțe exterioare, care acționează elementele de construcție din afara lor. Fac parte din această categorie forțele active și forțele de legătură;

b) forțe interioare, care se dezvoltă în interiorul elementelor de construcție sub acțiunea forțelor exterioare.

2) După punctul de aplicare, se disting:

a) forțe masice sau de volum. Acționează în orice punct al unui corp (de exemplu: greutatea proprie, forțele de inerție);

b) forțe de suprafață sau de contur. Se aplică pe suprafața unui corp. Pot acționa în mai multe moduri, și anume:

— forțe concentrate; suprafața pe care se aplică este foarte mică, practic asimilîndu-se cu un punct. Greutatea osiei unui tren se transmite șinei de cale ferată pe suprafața de contact ce se realizează între cele două corpuri (fig. 6.6). Deoarece această suprafață este foarte mică, se consideră că transmiterea se face într-un singur punct, și anume la contactul teoretic dintre roată și șină;

— forțe distribuite; acționează pe anumite zone ale corpului avînd intensitatea constantă sau variabilă (fig. 6.7). Atunci cînd intensitatea este constantă, forța se numește uniform distribuită (fig. 6.8).

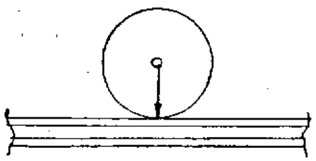


Fig. 6.6.

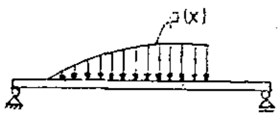


Fig. 6.7.

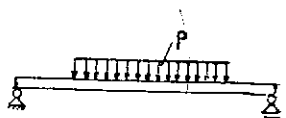


Fig. 6.8.

În Mecanica corpurilor rigide (deci pentru calculul forțelor de legătură) forța distribuită pe un anumit corp poate fi înlocuită cu rezultanta sa.

3) Din punctul de vedere al acțiunii mecanice:

a) încărcări statice, a căror intensitate crește lent de la valoarea zero și pînă la valoarea finală;

b) încărcări dinamice, care se aplică brusc asupra unei construcții.

4) Clasificări oficiale. În vederea obținerii unei asigurări raționale a construcțiilor sînt elaborate standarde și alte categorii de reglementări tehnice utilizate în proiectarea construcțiilor cu diferite destinații, alcătuite din diferite materiale. Astfel, STAS 10101/0-75 *„Acțiuni în construcții"* prezintă clasificarea și gruparea acțiunilor în general. Clasificarea se face în: *acțiuni permanente* (de exemplu: greutatea elementelor structurilor, a pardoselii la clădiri, a căii și trotuarelor la poduri, greutatea și presiunea pămînturilor

și umpluturilor, efectul precomprimării etc.), *acțiuni temporare* (de exemplu: greutatea utilajelor, presiunea hidrostatică a apei, încărcări datorite zăpezii, încărcări datorite vîntului, deplasări neuniforme ale terenului de fundare, încărcări datorită convoaielor feroviare sau rutiere la poduri și viaducte etc.), *acțiuni excepționale* (de exemplu: încărcarea seismică, ruperea cablului de ridicare, explozii, încărcări datorate inundațiilor catastrofale etc.). Grupările acțiunilor, utilizate în calcul, se împart în două categorii principale, și anume: *grupări fundamentale* și *grupări speciale*.

Analiza acțiunilor este detaliată în funcție de destinația construcției; astfel, STAS 10101/0A-77 se ocupă de clasificarea și gruparea acțiunilor pentru construcții civile și industriale, iar STAS 10101/0B-77 se ocupă cu clasificarea și gruparea acțiunilor pentru podurile de cale ferată și șosea. Evident, pentru informare în domeniul proiectării se vor consulta colecțiile de standarde în vigoare.

6.2. EFORTURI. METODA SECȚIUNILOR. DIAGRAME DE EFORTURI

6.2.1. EFORTURI. METODA SECȚIUNILOR

Construcțiile sînt în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare, alcătuite din forțe active și forțe de legătură (reacțiuni). Pentru a stabili modul de comportare a unei construcții sub acțiunea forțelor exterioare, este necesar să se determine efectul acestora asupra elementelor de construcții, solicitările interioare ce apar în secțiunile lor.

Dacă o structură este în echilibru, orice parte detașată imaginar din ea prin niște secțiuni fictive rămîne în echilibru sub acțiunea încărcărilor exterioare ce lucrează asupra ei și a forțelor interioare ce se nasc pe aceste secțiuni.

Se consideră astfel un corp, asupra căruia se aplică forțele active P_1, P_2, $p(x)$ și forțele de legătură R_1, R_2 (fig. 6.9).

Printr-o secțiune fictivă S, se separă elementul în două părți: corpul (C_1) din stînga secțiunii și corpul (C_2) din dreapta secțiunii. Se presupune că se îndepărtează corpul (C_1) din stînga și se studiază echilibrul părții rămase (C_2). Asupra corpului (C_2) acționează forțele $p(x)$ și R_2. Pentru a rămîne în echilibru, pe secțiunea S trebuie să se aplice un sistem de forțe echivalent din punct de vedere mecanic cu forțele R_1, P_1 și P_2, care acționau pe corpul (C_1). Aceasta

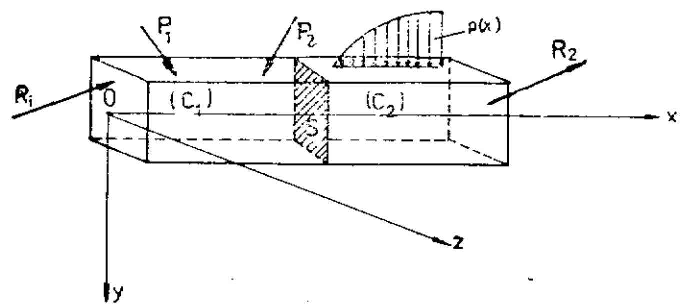


Fig. 6.9.

înseamnă a reduce sistemul de forțe din stînga secțiunii S într-un punct O al acesteia (fig. 6.10). Se știe că un sistem de forțe se reduce într-un punct la un torsor de reducere, alcătuit dintr-o forță rezultantă R_0 și un moment M_0.

Corpul din dreapta (C_2) este deci în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare $p(x)$ și R_2, a forței rezultante R_0 și a momentului M_0. Similar rezultă că, în punctul O al corpului (C_1) trebuie să acționeze o forță R_0' și un moment M_0', egale și de sens contrar cu R_0 și M_0.

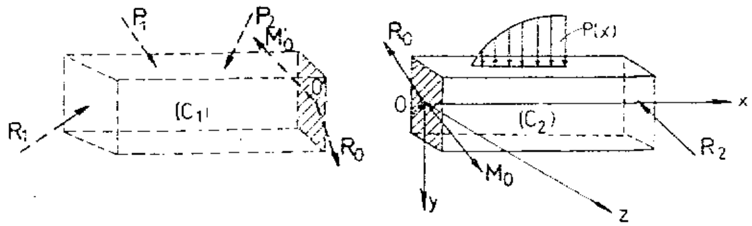


Fig. 6.10.

Mărimile vectoriale R_0 și M_0 reprezintă acțiunea corpului (C_1) asupra corpului (C_2), iar R_0' și M_0' reprezintă efectul corpului (C_2) asupra corpului (C_1).

În concluzie, rezultantele R_0 și R_0', precum și momentele M_0 și M_0', constituie acțiunea reciprocă a corpurilor (C_1) și (C_2), adică forțele interioare de legătură din secțiunea S considerată.

Forța rezultantă R_0 și momentul rezultant M_0 care se introduc într-o secțiune fictivă a unui element de construcție pentru restabilirea echilibrului și care reprezintă efectul mecanic al părții îndepărtate se numesc forțe interioare sau *eforturi*.

Metoda de determinare a eforturilor prin secționare imaginară și reducerea forțelor de la stînga secțiunii se numește *metoda secțiunilor* și este o metodă generală, care se aplică oricărui element de construcție.

Pentru bara cu axa dreaptă, se consideră sistemul de axe de coordonate cu originea în centrul de greutate al secțiunii și avînd ca axă Ox axa elementului, iar secțiunea transversală este conținută în planul yOz (fig. 6.11).

S-a arătat că, eforturile dintr-o secțiune se pot reprezenta fie pe corpul din stînga (R_0', M_0'), fie pe corpul din dreapta (R_0, M_0).

În cele ce urmează, se vor defini și reprezenta eforturile pe corpul din dreapta. Se va numi fața din stînga a secțiunii fața secțiunii de pe corpul din stînga, iar fața legată de corpul din dreapta se va numi fața din dreapta a secțiunii (fig. 6.12).

Se consideră că s-au determinat pe fața din dreapta secțiunii eforturile R_0 și M_0 (fig. 6.13).

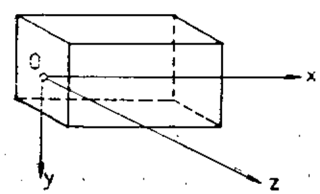


Fig. 6.11.

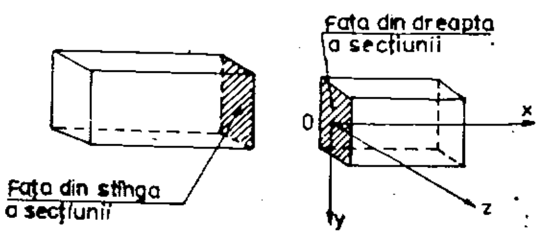


Fig. 6.12.

Forța rezultantă R_0 are o componentă după axa Ox, numită forță axială, N și o componentă în planul secțiunii, forța tăietoare, T. Forța tăietoare se descompune în componente după direcția axei Oy, T_z și după direcția axei Oz, T_y.

Sensurile pozitive convenționale ale eforturilor N, T_z și T_y sînt inverse sensurilor axelor de coordonate pe care se proiectează, așa cum sînt reprezentate în fig. 6.13.

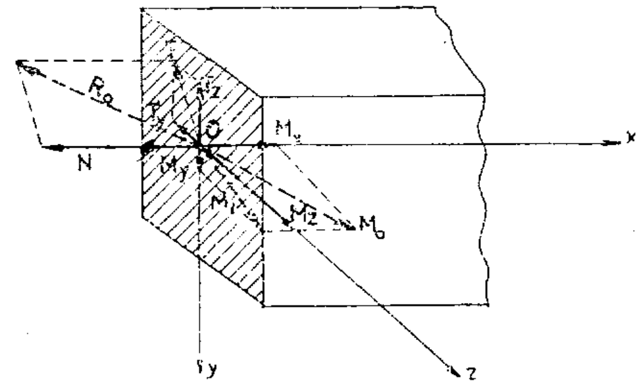


Fig. 6.13.

Descompunînd în mod asemănător momentul M_0, se obține o componentă pe axa Ox, care reprezintă momentul de torsiune sau de răsucire M_x și o componentă în planul yOz, care reprezintă momentul încovoietor M_i. Momentul încovoietor poate fi descompus după axele Oy și Oz obținîndu-se momentele încovoietoare M_y și M_z.

Momentele M_x, M_y și M_z sînt pozitive atunci cînd au același sens cu axele de coordonate (v. fig. 6.13).

Notînd cu X_i, Y_i, Z_i proiecțiile unei forțe exterioare P_i ce acționează asupra corpului, cu M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} momentele forței P_i în raport cu axele de coordonate, rezultă expresiile eforturilor pentru calculul direct (reducere de la stînga pe fața din dreapta):

$$N = \sum_{st} X_i; \qquad M_x = \sum_{st} M_{xi}$$
$$T_y = \sum_{st} Z_i; \qquad M_y = \sum_{st} M_{yi} \tag{6.1}$$
$$T_z = \sum_{st} Y_i; \qquad M_z = \sum_{st} M_{zi}.$$

Aceleași eforturi pot fi calculate prin reducere de la dreapta, cu expresiile:

$$N = -\sum_{dr} X_i; \qquad M_x = -\sum_{dr} M_{xi}$$
$$T_y = -\sum_{dr} Z_i; \qquad M_y = -\sum_{dr} M_{yi} \tag{6.2}$$
$$T_z = -\sum_{dr} Y_i; \qquad M_z = -\sum_{dr} M_{zi}.$$

În cazul structurilor particulare, și anume la care forțele exterioare și structura sînt în același plan (structuri plane încărcate în planul lor), rezultă

că planul forțelor, care se presupune a fi planul xOy, conține și axa elementului de construcție (fig. 6.14).

Rezultanta forțelor de la stînga va fi conținută în planul forțelor, deci $T_y = 0$.

De asemenea, forțele de la stînga fiind coplanare cu axele Ox și Oy, rezultă $M_x = 0$ și $M_y = 0$.

În concluzie, în cazul structurilor plane încărcate în planul lor, într-o secțiune a structurii vor apărea numai trei eforturi, și anume :

— *forța axială* N, dată de suma proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor exterioare de la stînga secțiunii ;

— *forța tăietoare* T_z (care se va nota în acest caz cu T), obținută din suma proiecțiilor tuturor forțelor de la stînga pe normala la axa barei ;

— *momentul încovoietor* M_z (notat mai simplu M) este un vector perpendicular pe planul forțelor, avînd ca mărime suma momentelor de la stînga în raport cu axa Oz. Deoarece în acest caz elementul de construcție este reprezentat prin axa sa, mărimea momentului încovoietor poate fi privită și ca sumă a momentelor forțelor de la stînga, în raport cu centrul de greutate al secțiunii.

Sensurile convențional pozitive pentru aceste trei eforturi sînt arătate în fig. 6.15, momentul încovoietor fiind reprezentat schematic prin sensul său de rotație.

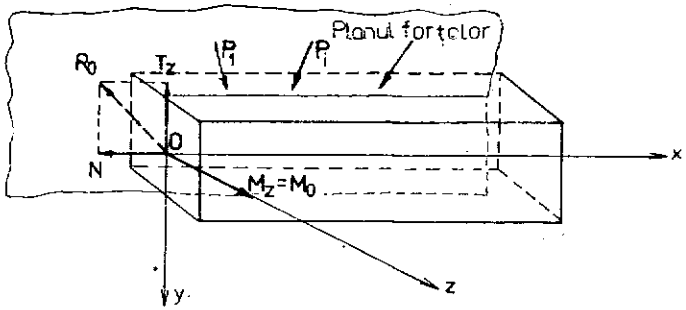


Fig. 6.14.

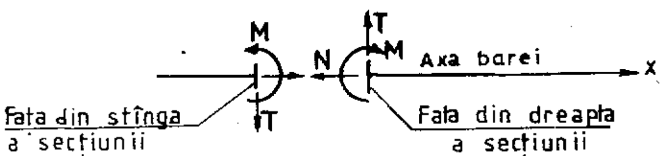


Fig. 6.15.

6.2.2. DIAGRAME DE EFORTURI. CONVENȚII DE SEMNE

S-a arătat mai înainte că prin metoda secțiunilor pot fi calculate eforturile în orice secțiune a unui element de construcție.

Dimensionarea economică și sigură a unei construcții necesită cunoașterea eforturilor în toate secțiunile elementelor ei pentru a se putea stabili care este secțiunea solicitată cel mai defavorabil. Pentru aceasta, este ne-

cesar a determina modul cum variază eforturile de-a lungul unui element (bară). Diagrama care constituie reprezentarea grafică a variației unui anumit efort pe lungimea unei bare se numește diagramă de eforturi.

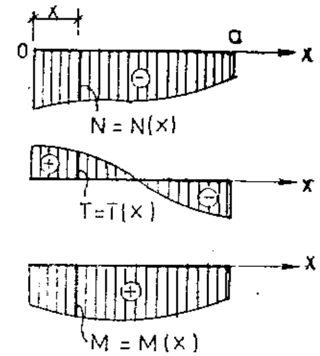


Fig. 6.16.

Din punct de vedere matematic, trasarea unei diagrame de eforturi presupune mai întîi stabilirea funcției efortului respectiv și apoi reprezentarea grafică a acestei funcții. Dacă se studiază sistemele plane încărcate în planul lor, aceasta înseamnă determinarea, pe anumite porțiuni de bară, a funcțiilor $N = N(x)$, $T = T(x)$, $M = M(x)$, care reprezentate grafic constituie diagramele respective de eforturi pe porțiunea de bară considerată. Variabila x precizează poziția secțiunii față de o origine aleasă arbitrar. În fig. 6.16 sînt arătate principial diagramele de eforturi N, T, M pentru o bară o-a. De-a lungul unei bare, diagrama unui efort poate fi reprezentarea grafică a unei singure funcții sau a mai multor funcții, fiecare dintre ele fiind valabilă numai pe cîte o zonă a barei.

Metoda de stabilire a variației eforturilor pentru o structură o constituie metoda secțiunilor. Diagrama de eforturi precizează atît mărimea efortului dintr-o secțiune, cît și semnul efortului respectiv, adică sensul său real. Așa cum s-a arătat, pentru stabilirea semnului unui efort este necesar a se stabili convenția de semne, adică sensurile convențional pozitive ale eforturilor dintr-o secțiune. Pentru aceasta, trebuie adoptat pentru fiecare bară un sens de parcurs care definește sensul axei Ox. În general, alegerea sensului de parcurs pentru fiecare bară este arbitrară, dar el trebuie astfel considerat încît pentru un observator situat de partea pe care se indică sensul de parcurs, acesta să fie îndreptat de la stînga către dreapta. Sensul de parcurs se indică printr-o săgeată paralelă cu axa barei. În fig. 6.17 se arată modul în care se poate alege sensul de parcurs pentru diverse bare.

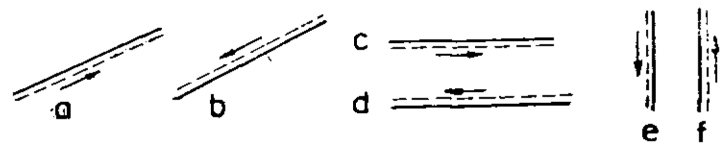


Fig. 6.17.

Convenția de semne poate fi stabilită și prin alegerea unei fibre a barei care se presupune convențional întinsă la încovoiere, așa cum este arătat punctat în fig. 6.17. Momentul pozitiv într-o secțiune are sensul astfel încît întinde această fibră.

Dacă s-a ales sensul de parcurs (sau fibra întinsă), eforturile convențional pozitive sînt perfect determinate fizic, și anume :

— forța axială N este pozitivă, atunci cînd are sensul invers axei Ox, deci atunci cînd este de întindere ;

— forța tăietoare T are sensul pozitiv astfel încît rotește în sens orar față de un punct de pe corpul pe secțiunea căruia se figurează ;

— momentul încovoietor M este pozitiv cînd întinde fibra presupusă convențional întinsă.

La structuri alcătuite din bare drepte, trasarea diagramelor de eforturi se face chiar pe axa structurii, ordonatele diagramelor măsurîndu-se de la această axă. În funcție de sensul de parcurs adoptat (sensul axei Ox), se definește sistemul de axe pentru reprezentarea funcțiilor de eforturi (fig. 6.18, *a-c*).

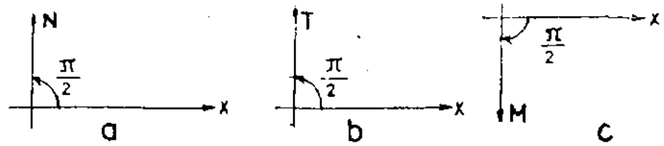


Fig. 6.18.

Astfel, sensul pozitiv de reprezentare a eforturilor N și T se obține prin rotirea cu unghiul $\pi/2$ a axei Ox în sens trigonometric (v. fig. 6.18, *a*, *b*), iar pentru momentul încovoietor, aceeași axă se rotește cu unghiul $\pi/2$ în sens orar (v. fig. 6.18, *c*). Diagrama de momente încovoietoare va apărea întotdeauna desenată pe partea fibrei real întinse.

6.2.3. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE ÎNCĂRCĂRI ȘI EFORTURI

Trasarea diagramelor de eforturi se face pe baza corelațiilor dintre funcția de încărcare și funcțiile eforturilor care conduc la aspectul de ordin calitativ și cantitativ al diagramelor.

Dintr-o structură în echilibru (fig. 6.19) se izolează un element de bară dreaptă de lungime $\mathrm{d}x$, asupra căruia se aplică forțele exterioare $p(x)$ ce acționează asupra lui, precum și eforturile pe cele două fețe de legătură cu structura (fig. 6.20). Pe fiecare față a elementului s-au figurat eforturile considerate pozitive. Deoarece cele două secțiuni sînt situate la distanța elementară $\mathrm{d}x$, creșterile (variațiile) eforturilor pe cele două fețe vor fi $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}M$.

Forța distribuită $p(x)$ poate fi considerată constantă pe lungimea $\mathrm{d}x$, astfel că rezultanta ei va fi $p(x)\,\mathrm{d}x$. Avînd direcția oarecare, s-a descompus această rezultantă într-o componentă normală pe axa elementului, $p_n\,\mathrm{d}x$, și o componentă paralelă cu axa elementului, $p_t\,\mathrm{d}x$. Întrucît sistemul din care a fost izolat elementul $\mathrm{d}x$ este în echilibru, și elementul $\mathrm{d}x$ va fi în echilibru.

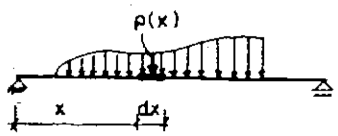


Fig. 6.19.

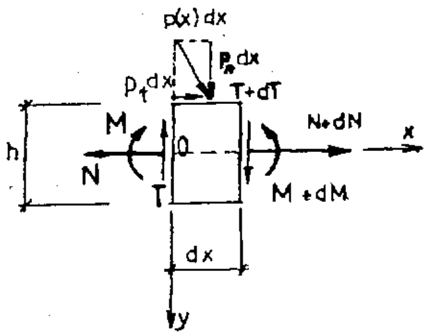


Fig. 6.20.

Din condițiile de echilibru al elementului de bară $\mathrm{d}x$ rezultă

$$\sum X_i = N + \mathrm{d}N - N + p_t\,\mathrm{d}x = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -p_t \tag{6.3}$$

$$\sum Y_i = T - T - \mathrm{d}T - p_n\,\mathrm{d}x = 0\,; \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -p_n \tag{6.4}$$

$$\sum M_0 = T\,\mathrm{d}x + M - M - \mathrm{d}M - p_n\,\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}x}{2} + p_t\,\mathrm{d}x\,\frac{h}{2} = 0.$$

Termenul $p_n\,\frac{\mathrm{d}x^2}{2}$ este infinit mic de ordin superior și nu se ia în considerație, iar $p_t\,\frac{h}{2} = m_x$ (moment distribuit).

Din ultima relație se obține

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = T + m_x. \tag{6.5}$$

Cînd $m_x = 0$ rezultă $\frac{dM}{dx} = T$ și prin derivare, relația

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -p_n. \tag{6.6}$$

Relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări sînt generale, aplicîndu-se oricărei structuri plane încărcate în planul ei și care este alcătuită din bare drepte.

Corelațiile dintre diagramele de eforturi și încărcări au la bază interpretarea geometrică a derivatei unei funcții, rezultînd următoarele observații care sînt foarte importante pentru trasarea diagramelor de eforturi:

1) Dacă între două secțiuni funcțiile de încărcări p_n și p_t au expresii algebrice de un anumit grad, forța tăietoare T și forța axială N sînt tot expresii algebrice, avînd gradul mai mare cu o unitate, iar momentul încovoietor M are gradul mai mare cu două unități. În particular, dacă forța este uniform distribuită ($p =$ const), diagrama de forțe tăietoare are variație liniară, iar diagrama de momente este o parabolă de gradul 2 (fig. 6.21), adică:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_r = -p\,; \ \mathrm{tg}\,\alpha_x = T_x.$$

Pe segmentele de bară pe care forța tăietoare este pozitivă, momentul încovoietor crește, iar pe porțiunile cu forța tăietoare negativă, momentul încovoietor scade.

2) În secțiunile în care forța tăietoare schimbînd semnul se anulează, diagrama de momente prezintă un maxim sau un minim. Deoarece $\frac{d^2M}{dx^2} = -p$, atunci cînd $p > 0$ diagrama de momente înregistrează un maxim, iar dacă $p < 0$ momentul încovoietor este minim.

3) O forță concentrată, normală pe axa grinzii, produce în secțiunea în care este aplicată un salt egal cu valoarea sa (o discontinuitate) în diagrama de forțe tăietoare, iar în diagrama de momente se înregistrează o schimbare bruscă a tangentei (fig. 6.22).

$$T_i^{dr} = T_i^{st} - P\,; \ \mathrm{tg}\,\alpha_1 = T_i^{st}\,; \ \mathrm{tg}\,\alpha_2 = T_i^{dr}.$$

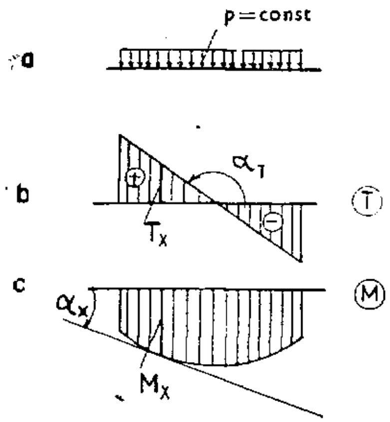


Fig. 6.21.

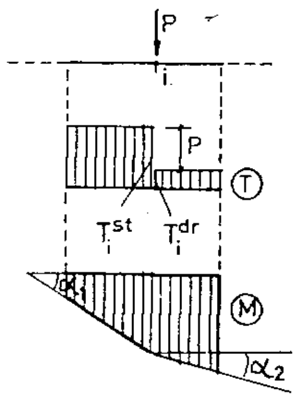


Fig. 6.22.

4) Un moment concentrat de valoare M_0, aplicat într-o secțiune, produce în diagrama de momente un salt egal cu M_0 (fig. 6.23)

$$M_i^{dr} = M_i^{st} + M_0.$$

5) Relațiile diferențiale permit, pe lîngă interpretările de natură calitativă expuse mai înainte, și obținerea unor relații de recurență (de ordin cantitativ) între eforturile din două secțiuni ale unei bare drepte. Se presupune că s-au determinat eforturile din secțiunea *1* a unei grinzi și interesează să se determine eforturile în secțiunea *2* (fig. 6.24).

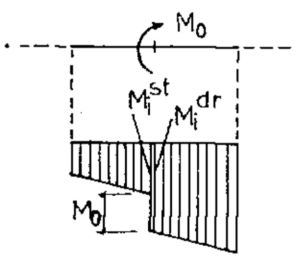


Fig. 6.23.

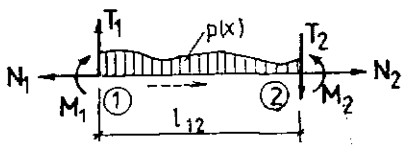


Fig. 6.24.

Între aceste două secțiuni nu sînt aplicate forțe sau momente concentrate.

Din relația

$$\frac{dT}{dx} = -p(x)$$

se obține

$$dT = -p(x)\,dx$$

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 -p(x)\,dx$$

dar

$$\int_1^2 p(x)\,dx = \Omega_{p_{1-2}}.$$

Cu Ω_{p1-2} s-a notat aria funcției încărcării dintre secțiunile *1* și *2*. Deci

$$T_2 - T_1 = -\Omega_{p_{1-2}} \text{ sau } T_2 = T_1 - \Omega_{p_{1-2}}.$$

În mod similar, folosind relația

$$dM/dx = T$$

se obține

$$dM = T\,dx;\quad \int_1^2 dM = \int_1^2 T\,dx;\quad M_2 - M_1 = \Omega_{T_{1-2}}$$

sau

$$M_2 = M_1 + \Omega_{T_{1-2}}.$$

Variația momentului încovoietor între două secțiuni ale unei grinzi drepte este egală cu suprafața diagramei de forțe tăietoare dintre cele două secțiuni.

În mod practic, aceste relații sînt suficiente pentru calculul valorilor din diagramele T și M, întrucît intervalele de bară $1-2$ se aleg astfel încît forțele și momentele concentrate să fie la capetele acestor intervale. Dacă se dorește o verificare pe un interval ce cuprinde în interior forțe și momente concentrate, prin completare, relațiile se generalizează astfel:

$$T_2 = T_1 - \Omega_{p_{1-2}} - \sum_1^2 P_{i,n}$$
$$M_2 = M_1 + \Omega_{T_{1-2}} + \sum_1^2 M_{0,i}. \tag{6.7}$$

6.2.4. DETERMINAREA EFORTURILOR PE BAZA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Principiul lucrului mecanic virtual a fost expus în cap. 5 iar exprimarea echilibrului pe baza acestui principiu, în cap. 6.

Structurile static determinate conțin un număr strict necesar de legături pentru asigurarea invariabilității geometrice. Suprimarea unei legături la o astfel de structură conduce la obținerea unui mecanism cu un singur grad de libertate. Mecanismul este în stare de echilibru sub acțiunea încărcărilor cunoscute și a forței de legătură necunoscută. Se poate da mecanismului o deplasare arbitrară și evalua lucrul mecanic efectuat care trebuie să fie nul. Expresia lucrului mecanic conține ca necunoscută forța de legătură. Din rezolvarea ecuației se obține valoarea necunoscutei.

Atunci cînd forțele care acționează structura au direcții oarecare, este indicat să se construiască epurele de deplasări pe orizontală și pe verticală, iar forțele să fie considerate prin componentele lor după aceste direcții, *aceasta simplificînd calculul lucrului mecanic.*

Continuitatea unei bare în secțiunea *i* (fig. 6.25, *a*) constă în aceea că deplasarea relativă dintre cele două fețe ale secțiunii *i* este împiedicată. Deplasarea relativă dintre cele două fețe are trei componente: după tangenta la axa barei, după normala la axa barei și rotirea relativă. Pentru a împiedica aceste deplasări și a realiza continuitatea, sînt necesare trei legături

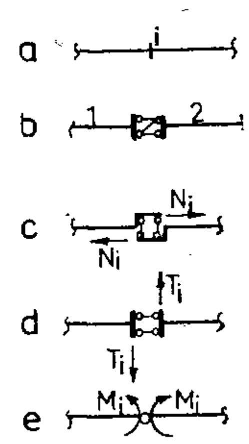


Fig. 6.25.

simple, așa cum este arătat în fig. 6.25, *b*. Dacă se suprimă toate cele trei legături simple, trebuie introduse forțele de legătură corespunzătoare, și anume forța axială N_i, forța tăietoare T_i și momentul încovoietor M_i. Pentru determinarea eforturilor cu ajutorul lucrului mecanic virtual, se va suprima *o singură legătură*, și anume aceea care corespunde efortului căutat, celelalte două legături fiind menținute, rezultînd mecanismul cu un grad de libertate.

Pentru forța axială N_i, se creează posibilitatea deplasării relative după tangenta barei, împiedicîndu-se deplasarea după normala la axă, precum și rotirea relativă. Se obține astfel mecanismul din fig. 6.25, *c*. Mecanismul din fig. 6.25, *d* permite numai deplasarea după normala la axa barei și reprezintă secționarea incompletă pentru determinarea forței tăietoare T_i. În cazul momentului încovoietor M_i, cele două fețe ale secțiunii *i* trebuie să se poată roti una față de alta, fără a se deplasa după axa barei sau după tangenta la axa barei. Această posibilitate de mișcare este permisă de o articulație (fig. 6.25, *e*).

Fiecare din cele trei tipuri de secționare incompletă conduce în cazul structurilor static determinate la mecanisme cu un singur grad de libertate.

Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual se face la fel ca la calculul reacțiunilor, adică se dă deplasarea virtuală arbitrară și se egalează cu zero lucrul mecanic obținut.

Pentru aflarea eforturilor din secțiunea *i* a structurii din fig. 6.26, *a*, s-au format mecanismele din fig. 6.26, *b*, *c*.

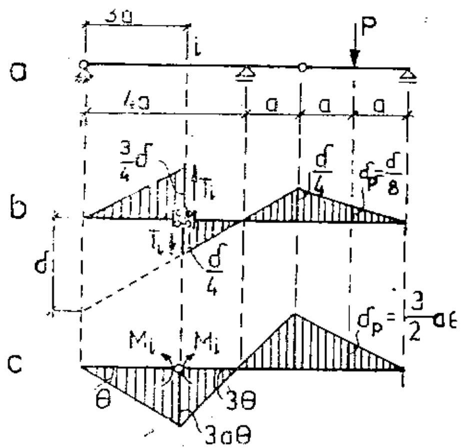


Fig. 6.26.

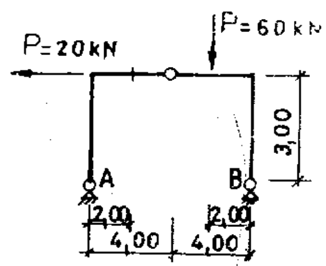


Fig. 6.27.

În cazul forței tăietoare T_i, s-a ales ca parametru deplasarea δ, iar în cazul momentului M_i, parametrul este rotirea θ.

Se obține

$$\delta L = -T_i\left(\frac{3}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta\right) - P\frac{\delta}{8} = 0; \quad T_i = -\frac{P}{8}$$

$$\delta L = -M_i(\theta + 3\theta) - P\frac{3}{2}a\theta = 0; \quad M_i = -\frac{3}{8}Pa.$$

Aplicația 6.1. La cadrul din fig. 6.27, să se determine reacțiunile V_A și H_A precum și eforturile din secțiunea *i* cu ajutorul lucrului mecanic virtual.

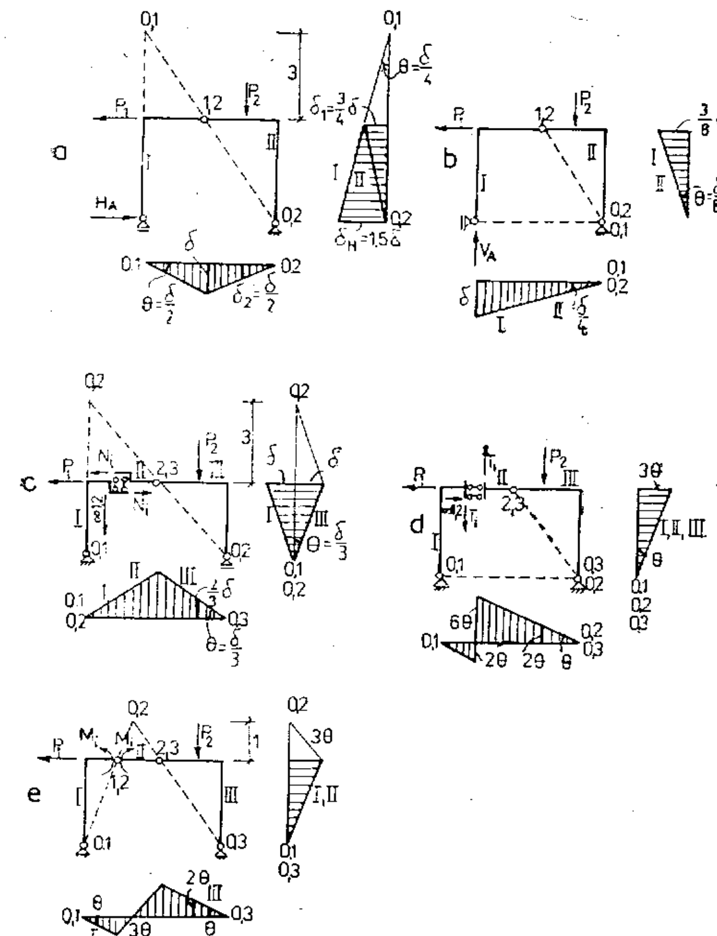


Fig. 6.28.

Mecanismele obținute prin suprimarea legăturilor, precum și epurele de deplasări corespunzătoare sînt arătate în fig. 6.28, *a-e*, unde s-au precizat și deplasările pe direcțiile forțelor în funcție de un parametru ales arbitrar.

Calculul reacțiunilor H_A (fig. 6.28, *a*)

$$-H_A\delta_H - P_1\delta_1 + P_2\delta_2 = 0$$

$$-H_A \cdot 1{,}5\delta + 20\cdot\frac{3}{4}\delta + 60\cdot\frac{\delta}{2} = 0; \quad H_A = 30 \text{ kN}.$$

În mod similar se scriu ecuațiile de lucru mecanic virtual pentru fiecare deplasare virtuală, obținîndu-se:

V_A (fig. 6.28, *b*); $-V_A\delta + 20\cdot\frac{3}{8}\delta + 6\cdot\frac{1}{4}\delta = 0$; $V_A = 22{,}5$ kN;

N_i (fig. 6.28, *c*); $-N_i(\delta + \delta) + 20\delta - 60\cdot\frac{2}{3}\delta = 0$; $N_i = 10$ kN;

T_i (fig. 6.28, *d*); $T_i(2\theta + 6\theta) - 20\cdot 3\theta - 60\cdot 2\theta = 0$; $T_i = 22{,}5$ kN;

M_i (fig. 6.28, *e*); $-M_i(\theta + 3\theta) - 20\cdot 3\theta - 60\cdot 3\theta = 0$; $M_i = -60$ kN·m.

6.2.5. DETERMINAREA EFORTURILOR PE CALE GRAFICĂ

Trasarea pe cale grafică a diagramelor T şi M se bazează pe construcţia poligonului de forţe şi a poligonului funicular.

Se va considera cazul particular al unei grinzi simplu rezemate, încărcată cu forţe concentrate verticale (fig. 6.29). Reacţiunea R_A va avea direcţia verticală, astfel că linia de închidere a poligonului funicular va fi determinată de intersecţiile laturilor *1* şi *5* ale acestuia cu verticalele prin reazemele A şi B (dreapta m-n).

Paralela dusă în poligonul forţelor prin polul O, la linia de închidere a poligonului funicular, precizează mărimile V_A şi V_B ale reacţiunilor.

Forţa tăietoare dintr-o secţiune k are valoarea

$$T_k = V_A - P_1 - P_2.$$

În dreptul poligonului de forţe se duc din extremităţile forţelor P_1, P_2, P_3, P_4 şi ale reacţiunilor V_A, V_B, drepte orizontale care delimitează diagrama de forţe tăietoare raportată la orizontala ce trece prin originea reacţiunii V_A, respectiv vîrful reacţiunii V_B.

Pentru determinarea momentului încovoietor în secţiunea k se vor însuma momentele forţelor ce se găsesc la stînga acestei secţiuni

$$M_k = M_k(V_A) - M_k(P_1) - M_k(P_2)$$

dar (v. cap. 2, pct. 2.4.5)

$$M_k(V_A) = \overline{ad}\cdot H\ ;\ M_k(P_1) = \overline{cd}\cdot H\ ;\ M_k(P_2) = \overline{bc}\cdot H$$

$$M_k = (\overline{ad} - \overline{cd} - \overline{bc})H = \overline{ab}\cdot H.$$

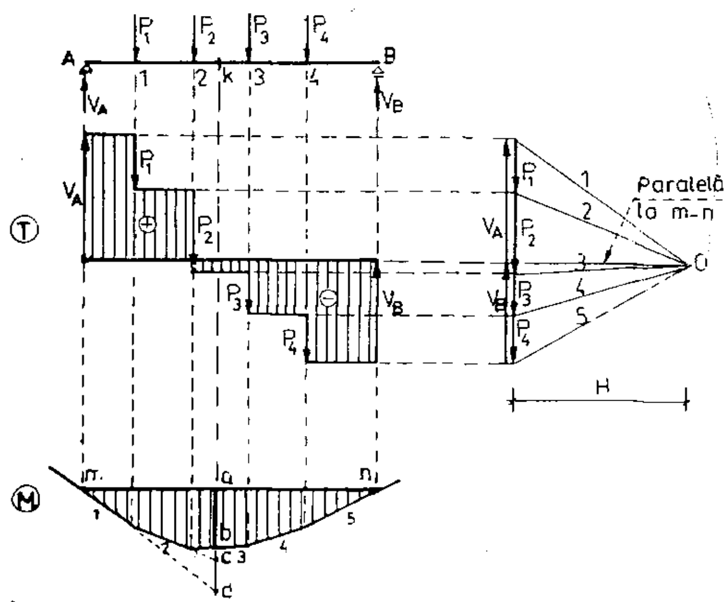


Fig. 6.29.

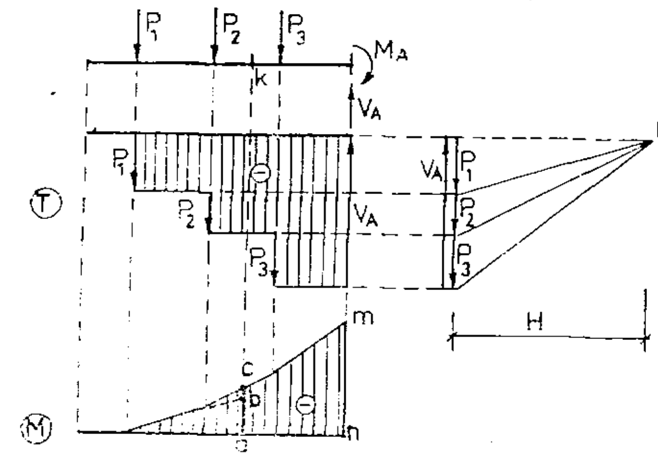


Fig. 6.30.

Diagrama de momente este delimitată de poligonul funicular, considerînd drept axă de referinţă linia de închidere $m-n$. Ordonatele se măsoară pe direcţia verticală şi se multiplică cu distanţa polară H.

În cazul unei console încărcate cu forţe concentrate (fig. 6.30), diagrama de forţe tăietoare se construieşte direct însumînd forţele de la stînga iar diagrama de momente este dată de poligonul funicular, ordonatele măsurîndu-se de la prima latură a acestuia

$$M_l = M_l(P_1) + M_l(P_2) = \overline{ab}\cdot H + \overline{bc}\cdot H = (\overline{ab} + \overline{bc})H = \overline{ac}\cdot H. \qquad (6.8)$$

Este indicat ca prima latură a poligonului funicular să fie aleasă orizontală pentru ca axa de referinţă a diagramei de momente să fie orizontală.

Reacţiunea V_A din încastrare se obţine din poligonul forţelor, ca fiind forţa de închidere a poligonului, iar momentul $M_A = \overline{mn}\cdot H$.

6.3. DIAGRAME DE EFORTURI LA GRINDA DREAPTĂ

6.3.1. GRINDA SIMPLU REZEMATĂ

Grinda dreaptă simplu rezemată este o grindă cu axa rectilinie, rezemarea fiind realizată la o extremitate printr-un reazem articulat iar la cealaltă cu un reazem simplu. Se presupune în cele ce urmează că reazemul simplu permite mişcarea după direcţia axei grinzii, adică reacţiunea din reazemul simplu este normală pe axa grinzii.

Se consideră grinda din fig. 6.31, la care se cer diagramele de eforturi. În prealabil se vor determina reacţiunile scriind următoarele ecuaţii de echilibru:

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A\ ;\ \Sigma M_A = 0 \rightarrow V_B\ ;\ \Sigma X_i = 0 \rightarrow H_A = 0.$$

Fiecare din cele trei ecuaţii conţine cîte o singură necunoscută ce poate fi deci determinată direct din ecuaţia respectivă.

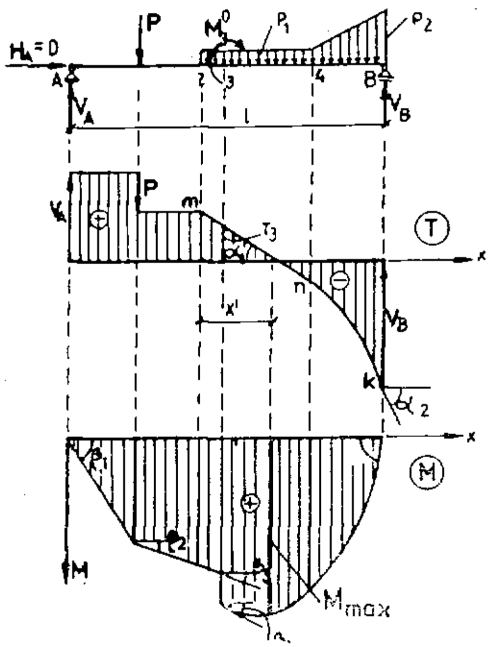


Fig. 6.31.

Verificarea calculului reacțiunilor verticale V_A și V_B se face prin ecuația de proiecție pe verticală.

Sensul de parcurs se alege de la stînga la dreapta, deci fibra presupusă întinsă este cea de la partea inferioară. Această convenție de semne se adoptă pentru toate grinzile drepte ce vor fi studiate, fără a mai menționa acest lucru.

Diagramele de eforturi T și M vor prezenta cinci zone distincte corespunzătoare încărcărilor aplicate pe grindă.

Diagrama T. Pe prima parte $A - 1$, $p_x = 0$, deci $T_{A-1} = \text{const}$. Valoarea forței tăietoare într-o secțiune a acestui interval este dată de suma forțelor de la stînga, adică V_A. Prin urmare, $T_{A-1} = V_A$.

În secțiunea *1*, diagrama de forțe tăietoare va prezenta un salt produs de forța concentrată P

$$T_1^{st} = V_A\,;\; T_1^{dr} = V_A - P.$$

Pe intervalul *1—2* încărcarea $p_x = 0$, deci forța tăietoare este constantă și are valoarea $T_{1-2} = V_A - P$.

Între secțiunile *2* și *4* grinda este încărcată cu o *forță verticală uniform distribuită* $p_x = p_1 = \text{const}$. Aceasta înseamnă că diagrama de forțe tăietoare va avea o variație liniară. Pentru precizarea acestei drepte sînt suficiente două valori, de exemplu cele de la extremitățile intervalului

$$T_2 = V_A - P\,;\; T_4 = T_2 - \Omega_{p_{2-4}} = T_2 - pl_{2-4}.$$

Este necesar de stabilit secțiunea în care forța tăietoare se anulează, deoarece aici momentul va prezenta o valoare extremă. Acest lucru se poate face, de exemplu, prin determinarea distanței x' de la secțiunea *2* pînă la secțiunea care interesează. În baza relației de recurență se poate scrie

$$T_{x'} = T_2 - \Omega_{p_{2-x'}} = T_2 - p_1 x'$$

deoarece

$$T_{x'} = 0 \quad \text{se obține } x' = \frac{T_2}{p_1}.$$

Pe intervalul *4—B* grinda este încărcată cu o forță distribuită care are o variație liniară, de la valoarea p_1 la valoarea p_2. Forța tăietoare va varia după o parabolă de gradul al doilea, iar în punctul B, diagrama T se închide cu valoarea reacțiunii V_B. Din relația $dT/dx = -p_x$ rezultă că $\operatorname{tg}\alpha_1 = p_1$ și $\operatorname{tg}\alpha_2 = p_2$.

Diagrama M. Fiind cunoscute încărcările și diagrama de forțe tăietoare se poate trasa diagrama de momente, atît ca aspect general cît și în ce privește valorile în secțiunile caracteristice. Pe intervalele pe care forța tăietoare este constantă, diagrama de momente va avea o variație liniară. Aceasta se întîmplă în secțiunile $A - 1$ și $1 - 2$. Este deci suficient a calcula valorile momentelor încovoietoare la extremitățile acestor intervale.

Deoarece $M_A = 0$ se obține

$$M_1 = \Omega_{T_{A-1}} \text{ și } M_2 = M_1 + \Omega_{T_{1-2}}.$$

În continuare, între secțiunile *2—3* și *3—4* diagrama M este constituită din două arce de parabolă de gradul al II-lea, prezentînd în secțiunea *3* un salt, ca urmare a momentului concentrat M_3^0 ce acționează în această secțiune

$$M_3^{st} = M_2 + \Omega_{T_{2-3}}\,;\; M_3^{dr} = M_3^{st} + M_3^0.$$

În secțiunea de anulare a forței tăietoare, momentul încovoietor este maxim, avînd valoarea

$$M_{max} = M_3^{dr} + \Omega_{T_{3-x'}}.$$

Pe intervalul pe care forța tăietoare variază după o parabolă de gradul al II-lea, diagrama de momente va fi un arc de parabolă de gradul al III-lea. Situația aceasta se întîlnește între secțiunea *4* și reazemul B

$$M_4 = M_{max} + \Omega_{T_{x'-4}}\,;\; M_B = M_4 + \Omega_{T_{4-B}} = 0.$$

Pentru reprezentarea corectă a diagramelor sînt de observat următoarele:

— în secțiunea *4*, $p_{st} = p_{dr} = p_1$, deci, în diagrama de forțe tăietoare, dreapta $m—n$ va fi tangentă la parabola de gradul al II-lea $n—k$;

— diagrama de momente va prezenta în secțiunea *1* un vîrf, deoarece $T_1^{st} > T_1^{dr}$, adică $\operatorname{tg}\beta_1 > \operatorname{tg}\beta_2$;

— tangentele geometrice la diagrama de momente la stînga și la dreapta secțiunii *3* sînt *paralele*, deoarece $T_3^{st} = T_3^{dr} = \operatorname{tg}\beta_3$.

În mod similar, se pot trata diagramele de eforturi pentru alte încărcări.

Aplicația 6.2. Să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda din fig. 6.32.

Pentru determinarea reacțiunilor, încărcarea distribuită se înlocuiește cu rezultanta care are valoarea $R = \frac{1}{2}pl$, iar poziția sa este indicată în fig. 6.32, *a*

$$\Sigma M_A = 0\,; \qquad R\cdot\frac{2}{3}l - V_B l = 0$$

$$V_B = \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}pl;$$

$$\Sigma M_B = 0\,; \qquad -R\cdot\frac{1}{3}l + V_A l = 0$$

$$V_A = \frac{1}{3}R = \frac{1}{6}pl.$$

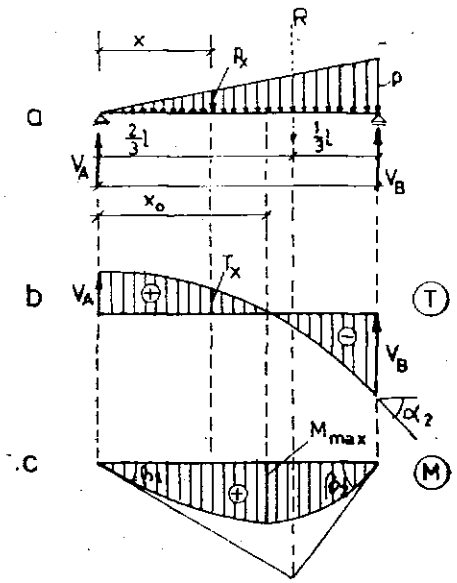


Fig. 6.32.

Încărcarea p_x are o variație liniară, într-o secțiune curentă avînd valoarea $p_x = \frac{p}{l} x$.

Diagrama de forțe tăietoare va fi pe toată lungimea grinzii o parabolă de gradul al II-lea avînd valorile

$$T_A = V_A;\quad T_B = -V_B.$$

Înclinarea tangentei geometrice la curba forței tăietoare va crește continuu în valoare absolută de la zero (în secțiunea A) pînă la valoarea tg $\alpha_2 = p$ (în secțiunea B).

Poziția secțiunii în care se anulează forța tăietoare este stabilită prin abscisa x_0, rezultată din relația

$$T_x = V_A - \frac{1}{2} p_x x_0 = \frac{1}{6} pl - \frac{1}{2} \frac{p}{l} x_0^2 = 0$$

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0.577\, l.$$

Momentul încovoietor variază după o parabolă cubică, înregistrînd valoarea maximă în secțiunea de anulare a forței tăietoare

$$M_{max} = \Omega_{T_{A-x_0}} = \frac{2}{3} V_A x_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} pl \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{pl^2}{9\sqrt{3}} \approx \frac{pl^2}{15{,}6}.$$

Se cunoaște că

$$\text{tg}\, \beta_1 = V_A = \frac{pl}{6};\quad \text{tg}\, \beta_2 = V_B = \frac{pl}{3} \text{ sau tg}\, \beta_2 = 2\, \text{tg}\, \beta_1.$$

Tangentele geometrice duse în secțiunile de reazem la curba momentelor încovoietoare se întîlnesc pe suportul rezultantei.

6.3.2. CONSOLA

Consola are asigurată rezemarea printr-o încastrare conținînd, după cum se știe, trei legături simple (fig. 6.33).

Forțele de legătură se determină din ecuațiile de echilibru exprimate sub formă de proiecții pe axele Ox și Oy și de momente în raport cu secțiunea de încastrare

$$H_A - \sum P_i \cos \alpha_i = 0; \qquad H_A = \sum P_i \cos \alpha_i$$

$$V_A - \sum P_i \sin \alpha_i = 0; \qquad V_A = \sum P_i \sin \alpha_i$$

$$M_A - \sum P_i b_i \sin \alpha_i = 0; \qquad M_A = \sum P_i b_i \sin \alpha_i.$$

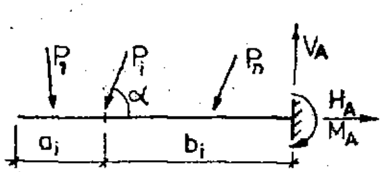


Fig. 6.33.

Dacă forțele aplicate pe grindă sînt verticale, unghiul $\alpha_i = 90°$, obținîndu-se pentru consola din fig. 6.34

$$H_A = 0;\quad V_A = \Sigma P_i;\quad M_A = \Sigma P_i b_i.$$

Se observă că diagramele de eforturi pot fi trasate fără a se determina în pre-

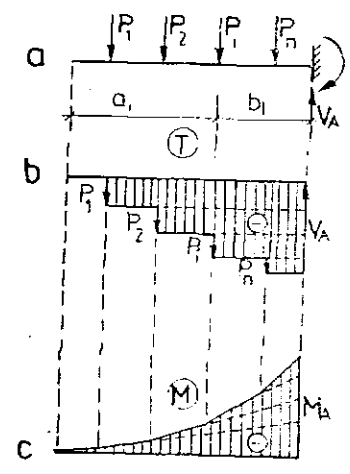


Fig. 6.34.

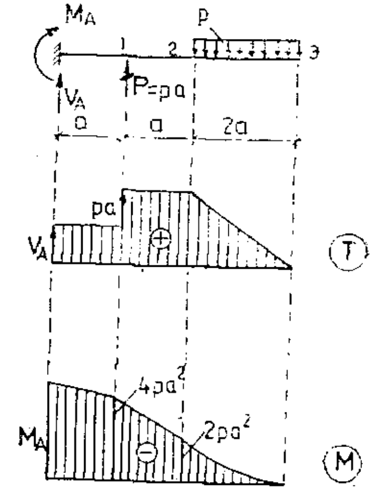


Fig. 6.35.

alabil reacțiunile, pentru că în orice secțiune sînt cunoscute forțele de la stînga. Dacă încastrarea este la extremitatea din stînga grinzii (fig. 6.35), reacțiunile se stabilesc în mod similar, iar eforturile dintr-o secțiune se pot determina prin reducerea forțelor de la dreapta.

Pentru grinda din fig. 6.35 se obține

$$V_A + pa - 2pa = 0; \qquad V_A = pa$$

$$M_A + pa^2 - 2pa \cdot 3a = 0; \qquad M_A = -5pa^2$$

$$M_1 = M_A + \Omega_{T_{A-1}} = -5pa^2 + pa^2 = -4pa^2$$

$$M_2 = M_1 + \Omega_{T_{1-2}} = -4pa^2 + 2pa^2 = -2pa^2.$$

Diagramele de eforturi se pot trasa și prin reducerea forțelor de la dreapta. Astfel:

$$T_3 = 0;\quad M_3 = 0.$$

Aplicîndu-se relațiile de recurență și ținînd seama că se merge în sens invers sensului de parcurs, rezultă

$$T_2 = T_3 + \Omega_{p_{3-2}} = 2pa$$

$$T_1^{dr} = T_2 = 2pa$$

$$T_1^{st} = T_1^{dr} - P = 2pa - pa = pa$$

$$M_2 = M_3 - \Omega_{T_{3-2}} = -\frac{2pa \cdot 2a}{2} = -2pa^2$$

$$M_3 = -2pa^2 - 2pa \cdot a = -4pa^2$$

$$M_A = -4pa^2 - pa^2 = -5pa^2.$$

Eforturile din secțiunea de încastrare, obținute prin reducerea forțelor de la dreapta, reprezintă tocmai forțele de legătură din încastrare.

6.3.3. GRINDA CU CONSOLE

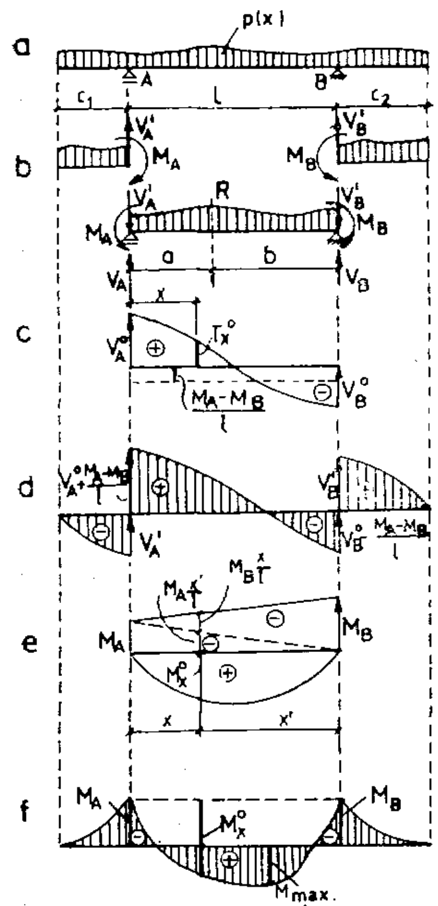


Fig. 6.36.

Grinda cu console este o grindă dreaptă la care rezemarea nu se face la extremitățile sale, rezultînd la capete două console (fig. 6.36, *a*). Grinda poate fi considerată ca fiind alcătuită dintr-o grindă simplu rezemată de deschidere l și două console de lungime c_1, respectiv c_2, încastrate la capetele grinzii simplu rezemate. Considerînd îndepărtate consolele, în secțiunile A și B ale grinzii simplu rezemate trebuie aplicate efectele acestora, adică eforturile din secțiunile de încastrare ale consolelor (fig. 6.36, *b*).

Diagramele de eforturi pe console se vor trasa așa cum s-a arătat la grinda în consolă.

Grinda simplu rezemată rezultată prin suprimarea consolelor este încărcată la capete cu efectul consolelor (V'_A, M_A, respectiv, V'_B, M_B), iar pe deschiderea l, cu încărcarea corespunzătoare a cărei rezultantă este R.

Calculul reacțiunilor

$$V_A = \frac{Rb}{l} + V'_A + \frac{M_A - M_B}{l} =$$

$$= V_A^0 + V'_A + \frac{M_A - M_B}{l}$$

$$V_B = \frac{Ra}{l} + V'_B + \frac{M_B - M_A}{l} =$$

$$= V_B^0 + V'_B + \frac{M_B - M_A}{l}.$$

S-au notat cu V_A^0 și V_B^0 reacțiunile grinzii simplu rezemate fără considerarea efectului consolelor.

Forța tăietoare într-o secțiune situată la distanță x de reazemul A are expresia

$$T_x = V_A - V'_A - \Omega_{p_{A-x}} = V_A^0 + V'_A + \frac{M_A - M_B}{l} - V'_A - \Omega_{p_{A-x}} =$$

$$= V_A^0 - \Omega_{p_{A-x}} + \frac{M_A - M_B}{l} = T_x^0 + \frac{M_A - M_B}{l}$$

în care T_x^0 este forța tăietoare pe grinda simplu rezemată, fără console.

Se constată că în orice secțiune, forța tăietoare diferă față de forța tăietoare a grinzii simplu rezemată cu cantitatea $\frac{M_A - M_B}{l}$. Rezultă o deplasare cu această cantitate a axei de referință a diagramei T^0 (fig. 6.36, *c*), obținîndu-se în final diagrama din fig. 6.36, *d*, care cuprinde și consolele. Legea de variație a forței tăietoare depinde, evident, de legea de variație a încărcării $p(x)$.

Pentru trasarea diagramei M pe zona dintre reazemele A și B, se va considera separat efectul momentelor M_A, M_B și al încărcării de pe deschidere (fig. 6.36, *e*)

$$M_x = M_x^0 - M_A\frac{x'}{l} - M_B\frac{x}{l}$$

în care M_x^0 este momentul în secțiunea x a grinzii simplu rezemate, fără console.

În fig. 6.36, *f* este reprezentată diagrama de momente pe toată grinda, inclusiv pe zona consolelor. Se observă că momentul încovoietor este mai mic decît la grinda simplu rezemată datorită efectului consolelor. Secțiunea în care se înregistrează momentul maxim diferă față de grinda simplu rezemată datorită corectării diagramei T^0 cu cantitatea $\frac{M_A - M_B}{l}$.

Prin modificarea lungimilor c_1 și c_2 ale consolelor, se poate stabili pentru un anumit sistem de forțe o diagramă de momente în care $|M_A| = |M_{max}| = |M_B|$, adică o soluție rațională din punct de vedere economic.

Aplicația 6.3. Se cer diagramele T și M pentru grinda cu console din fig. 6.37. Să se determine lungimea consolelor astfel încît momentele pe reazeme să fie egale cu momentul maxim.

Deoarece

$$M_A = M_B = -\frac{pc^2}{2}$$

între reazeme, diagrama de forțe tăietoare va avea același aspect ca la grinda simplu rezemată de deschidere l

$$V_A = V_B = \left(\frac{l}{2} + c\right)p.$$

Momentul va fi maxim în secțiunea din mijlocul grinzii și are valoarea

$$M_{max} = M_x^0 - \frac{1}{2}M_A - \frac{1}{2}M_B = \frac{pl^2}{8} - \frac{pc^2}{2}.$$

Din condiția $|M_{max}| = |M_A| = |M_B|$ se obține

$$\frac{pl^2}{8} - \frac{pc^2}{2} = \frac{pc^2}{2}$$

$$c^2 = \frac{l^2}{8}; \quad c = \frac{l}{\sqrt{8}} \approx 0{,}354\ l.$$

În acest caz, momentul maxim este

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{16} = \frac{pl^2}{16}$$

iar reacțiunile au valoarea

$$V_A = V_B = 0{,}854\ p.$$

Diagramele de eforturi sînt reprezentate în fig. 6.37, *b*, *c*.

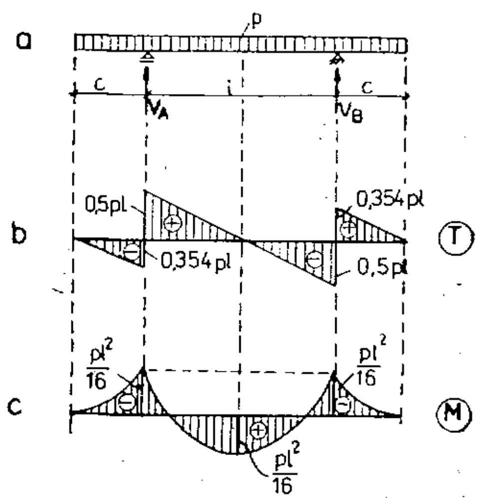


Fig. 6.37.

6.3.4. GRINDA ÎNCLINATĂ

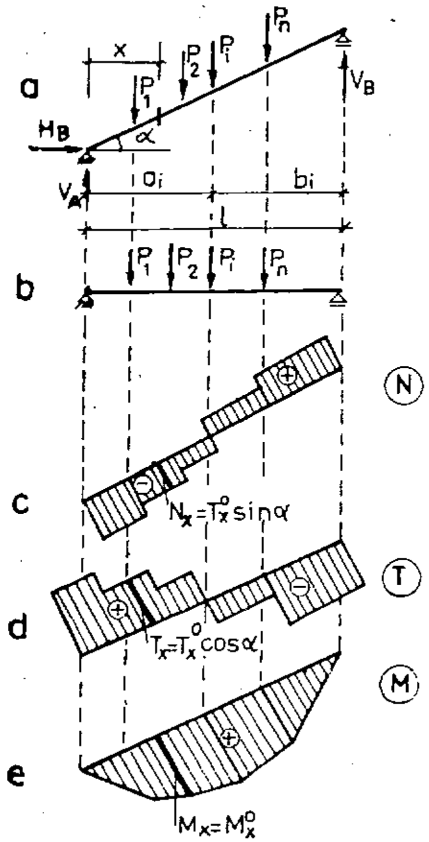


Fig. 6.38.

Sînt situații cînd grinzile drepte simplu rezemate sînt înclinate față de direcția generală a forțelor (fig. 6.38, *a*) sau reazemul simplu nu este paralel cu axa grinzii (v. fig. 6.40). Reacțiunile se vor determina din exprimarea condițiilor de echilibru prin ecuații în care să nu apară decît o singură necunoscută. Astfel, pentru grinda înclinată din fig. 6.38 se pot determina reacțiunile astfel:

$$\Sigma X_i = 0; \quad H_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad V_B = \frac{\Sigma P_i a_i}{l} = V_B^0$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad V_A = \frac{\Sigma P_i b_i}{l} = V_A^0$$

în care V_A^0 și V_B^0 sînt reacțiunile grinzii orizontale, simplu rezemate, de deschidere l și încărcată cu aceleași forțe (fig. 6.38. *b*). Eforturile dintr-o secțiune a acestei grinzi se notează cu T_x^0 și M_x^0.

Eforturile într-o secțiune x a grinzii înclinate au expresiile

$$N_x = -(V_A - \sum_A^x P_i)\sin\alpha = -T_x^0 \sin\alpha$$

$$T_x = (V_A - \sum_A^x P_i)\cos\alpha = T_x^0\cos\alpha$$

$$M_x = V_A x + \sum_A^x P_i(x - a_i) = M_x^0.$$

Se observă că momentul încovoietor nu depinde de înclinarea grinzii față de direcția forțelor.

În mod similar se pot trasa diagramele de eforturi în cazul încărcărilor distribuite. Pentru forțe uniform distribuite trebuie avut în vedere modul în care se indică valoarea încărcării. Astfel, în fig. 6.39, *a*, intensitatea p a forței se referă la unitatea de lungime măsurată pe direcția grinzii, în timp ce în fig. 6.39, *c*, intensitatea p_1 a forței este dată pe unitatea de lungime a proiecției orizontale a grinzii.

În primul caz, reacțiunile au valorile

$$V_A = V_B = \frac{pl}{2\cos\alpha}$$

iar diagrama de momente este arătată în fig. 6.39, *b*

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8\cos\alpha} = \frac{M_{max}^0}{\cos\alpha}.$$

Pentru situația din fig. 6.39, *c*, se obține

$$V_A = V_B = \frac{p_1 l}{2}; \quad M_{max} = \frac{p_1 l^2}{8} = M_{max}^0.$$

O încărcare oarecare, uniform distribuită, poate fi caracterizată fie prin intensitatea p (fig. 6.39, *a*), fie prin intensitatea p_1 (fig. 6.39, *c*) între acestea existînd relația $p_1 = p/\cos\alpha$.,

Se consideră o grindă la care reazemul simplu este înclinat cu un unghi dat față de axa grinzii (fig. 6.40).

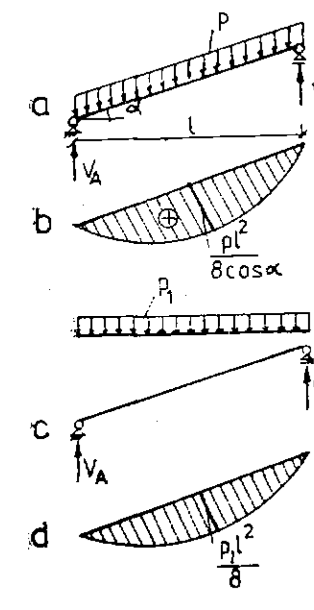


Fig. 6.39.

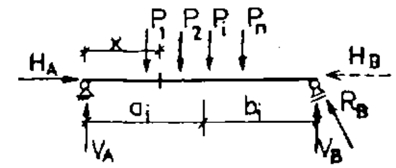


Fig. 6.40.

Componentele verticale ale reacțiunilor din reazeme, forța tăietoare și momentul încovoietor dintr-o secțiune nu depind de înclinarea reazemului simplu

$$V_A = \frac{P_i b_i}{l} = V_A^0; \quad V_B = \frac{\Sigma P_i a_i}{l} = V_B^0$$

$$T_x = V_A - \sum_A^x P_i = T_x^0$$

$$M_x = V_A x - \sum_A^x P_i(x - a_i) = M_x^0.$$

Datorită componentei orizontale H_B a reacțiunii din reazemul simplu, în grindă există forța axială chiar dacă forțele sînt normale pe axa grinzii $(N = H_A)$.

Aplicația 6.4. Se cer diagramele N, T, M pentru grinda din fig. 6.41.

Determinarea reacțiunilor:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-V_B \cdot 5 + 20 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}25 + 50 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$V_B = 37{,}5 \text{ kN};$$

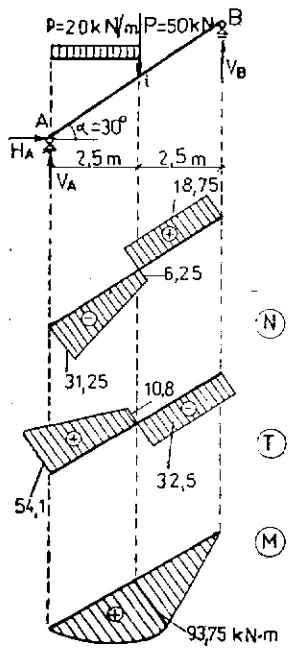


Fig. 6.41.

$$\sum M_B = 0$$

$$V_A \cdot 5 - 20 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}75 - 50 \cdot 2{,}5 = 0$$

$$V_A = 62{,}5 \text{ kN}.$$

Verificare :

$$\sum Y = V_A + V_B - 20 \cdot 2{,}5 - 50 =$$
$$= 62{,}5 + 37{,}5 - 50 - 50 = 0$$

$$\sum X_i = 0\ ;\ H_A = 0$$

$$N_A = -V_A \sin 30° = -62{,}5 \cdot 0{,}500 = -31{,}25 \text{ kN}$$

$$N_{1\,st} = 62{,}5 \cdot 0{,}500 + 20 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}500 = -6{,}25 \text{ kN}$$

$$N_{1\,dr} = -6{,}25 + 50 \cdot 0{,}500 = 18{,}75 \text{ kN}.$$

Pe zona $A-1$ forța axială variază liniar și rămîne constantă între secțiunile 1 și B

$$T_A = V_A \cos 30° = 62{,}5 \cdot 0{,}866 = 54{,}1 \text{ kN}.$$

Între secțiunile A și 1 forța tăietoare are o variație liniară

$$T_{1\,st} = 62{,}5 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}866 = 10{,}8 \text{ kN}$$

$$T_{1\,dr} = 10{,}8 - 50 \cdot 0{,}866 = -32{,}5 \text{ kN}$$

$$M_{max} = M_1 = 62{,}5 \cdot 2{,}5 - 20 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}25 = 93{,}75 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

6.3.5. TRANSMITEREA INDIRECTĂ A ÎNCĂRCĂRILOR

Sînt situații în care încărcările nu se transmit direct grinzilor, ci prin intermediul unor elemente secundare. În fig. 6.42, *a* este arătată în secțiune transversală alcătuirea de principiu a unui pod de cale ferată. Structura principală de rezistență este constituită din două grinzi principale. La anumite intervale λ, pe grinzile principale reazemă grinzi transversale, numite antretoaze, care au rolul de a susține grinzile secundare (lonjeronii), cărora li se transmit direct forțele.

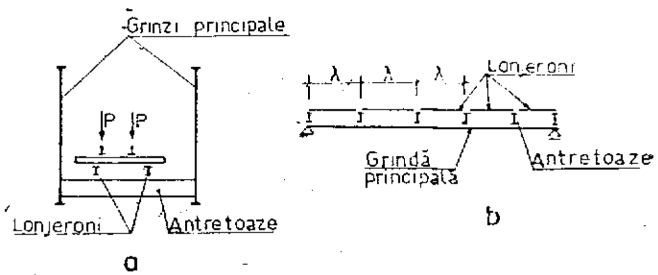


Fig. 6.42.

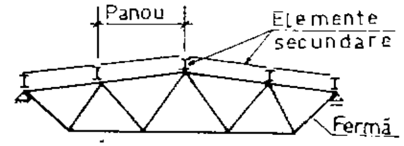


Fig. 6.43.

Transmiterea indirectă a încărcărilor este întîlnită și în cazul fermelor de acoperiș (fig. 6.43), fiind impusă de necesitatea de a transmite forțele numai în anumite puncte ale fermei.

În general, grinzile secundare (lonjeronii) sînt grinzi simplu rezemate în anumite puncte pe grinda principală. Porțiunea dintre punctele de rezemare a grinzilor secundare se numește panou.

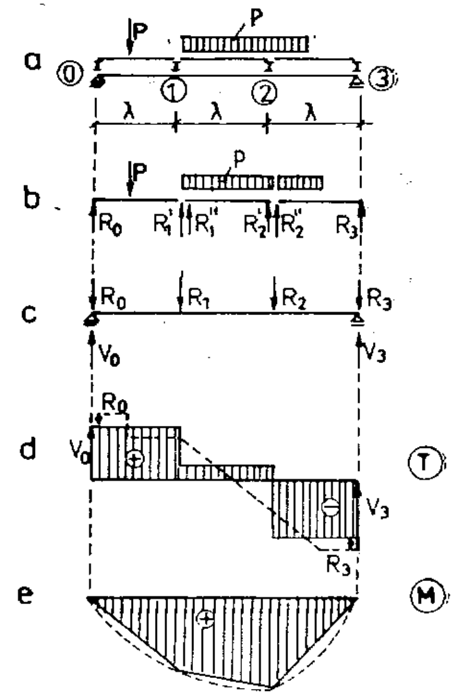


Fig. 6.44.

În fig. 6.44 este arătată o grindă cu transmitere indirectă a forțelor. Pentru trasarea diagramelor de eforturi, se calculează reacțiunile lonjeronilor, care apoi se aplică grinzii principale sub formă de forțe concentrate.

Astfel, la lonjeronul $0-1$ se determină reacțiunile R_0 și R_1', la lonjeronul $1-2$, reacțiunile R_1'' și R_2', iar la lonjeronul $2-3$, reacțiunile R_2'' și R_3 (fig. 6.44, *b*). Trecînd la grinda principală, aceasta este încărcată cu forțele concentrate R_0, $R_1 = R_1' + R_1''$, $R_2 = R_2' + R_2''$ și R_3, în consecință diagramele de eforturi se trasează ca pentru o grindă dreaptă, încărcată cu forțele R_0, R_1, R_2, R_3.

Este de observat că reacțiunile V_0 și V_3 ale grinzii principale se pot calcula fie direct, pe schema din fig. 6.44, *a*, fie considerîndu-se grinda principală încărcată cu reacțiunile lonjeronilor (fig. 6.44, *c*). Transmiterea indirectă a încărcărilor nu modifică reacțiunile grinzii principale.

Diagramele T și M sînt trasate în fig. 6.44, *d*, *e* pentru cazul transmiterii indirecte (linie continuă), comparativ cu transmiterea directă (linie întreruptă). În secțiunile de rezemare a lonjeronilor (secțiunile 1 și 2), momentul încovoietor este același în ambele situații de transmitere a încărcărilor. Se poate arăta că diagramele de eforturi pe grinda principală, în cazul transmiterii indirecte a încărcărilor, se obțin din diagramele de eforturi considerînd forțele aplicate direct, prin scăderea diagramelor de eforturi ale lonjeronilor.

6.4. EFORTURI LA GRINZI COTITE ȘI CADRE

6.4.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Grinda cotită este o bară a cărei axă este de formă poligonală, laturile poligonului putînd fi drepte sau curbe. Punctele în care se întîlnesc aceste laturi se numesc noduri și ele constituie în general legături rigide.

În fig. 6.45 sînt date exemple de grinzi cotite. Astfel, în fig. 6.45, *a* este arătat un stîlp cu o consolă pentru susținerea cablului la o cale ferată electrificată. Grinda din fig. 6.45, *b* este o grindă de scară, iar structura din fig. 6.45, *c* se întîlnește la marchizele care acoperă peroanele de lîngă clădirile de călători din stațiile de cale ferată.

Cadrele sînt grinzi cotite de forme speciale. Ele sînt alcătuite, de regulă, din elemente verticale sau puțin înclinate față de verticală, numite stîlpi, și elemente orizontale sau puțin înclinate față de orizontală, numite rigle. Punctele de intersecție a axelor (de legare a barelor) se numesc noduri. Ca exemple se arată un cadru de pod (fig. 6.46, *a*) și un cadru care formează structura de rezistență a unei magazii de mărfuri (fig. 6.46, *b*).

În construcții se întîlnesc în mod obișnuit cadre static nedeterminate. Așa cum se vede, cadrul din fig. 6.46, *a* este de 5 ori static nedeterminat, iar cel din fig. 6.46, *b*, de 3 ori static nedeterminat.

Studiul cadrelor static determinate este necesar pentru a rezolva structurile de acest tip și ca elemente de bază în rezolvarea cadrelor static nedeterminate. Cadrele din fig. 6.46 devin static determinate dacă li se suprimă un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică. Se obțin astfel cadrele din fig. 6.47.

Cadrele static determinate au numărul minim de legături pentru asigurarea invariabilității geometrice. Aceste legături trebuie să fie judicios distribuite pentru a nu constitui sisteme critice. Considerînd cadrul ca un sistem de corpuri, studiul invariabilității geometrice și determinării statice se face ca și la sistemele de corpuri.

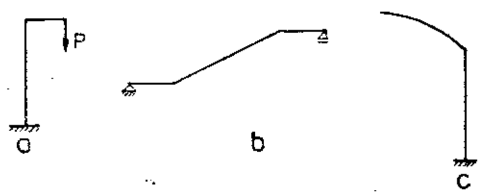


Fig. 6.45.

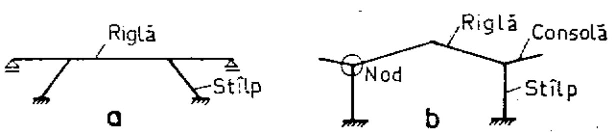


Fig. 6.46.



Fig. 6.47.

6.4.2. CALCULUL FORȚELOR DE LEGĂTURĂ

La cadrele static determinate, forțele de legătură se calculează pe baza ecuațiilor de echilibru. Astfel, la cadrul din fig. 6.48 se înlocuiesc legăturile cu forțele de legătură V_A, H_A, V_B după care se scriu ecuațiile de echilibru sub forma următoare:

$$\Sigma X_i = 0\ ;\ \Sigma M_A = 0\ ;\ \Sigma M_B = 0.$$

Din fiecare ecuație se obține cîte o necunoscută. Foarte des se întîlnește structura din fig. 6.49, numită cadru cu trei articulații. Cadrul este static determinat. Numărul de necunoscute este $N = 2\cdot 3 = 6$, iar numărul de ecuații $E = 3\cdot 2 = 6$. Cadrul cu trei articulații este o structură geometric invariabilă. Cînd articulațiile A și B sînt situate pe aceeași orizontală (v. fig. 6.49), atunci reacțiunile se descompun în componente orizontale (H_A și H_B) și componente verticale (V_A și V_B). Este posibil de a se determina cele patru necunoscute din ecuații independente, așa cum se prezintă în continuare.

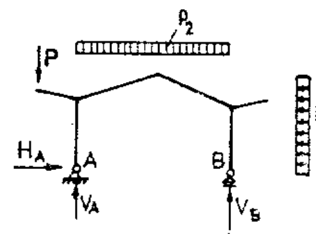


Fig. 6.48.

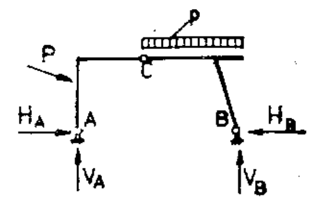


Fig. 6.49.

În baza teoremei solidificării se exprimă echilibrul întregului cadru prin ecuații de momente în raport cu punctele A și B. Din aceste relații se obțin componentele verticale V_A și V_B: din ecuația $\Sigma M_B = 0$ se obține necunoscuta V_A, iar din $\Sigma M_A = 0$ se obține necunoscuta V_B.

Verificarea determinării corecte a acestor valori se face prin ecuația de proiecții pe verticală.

Componentele H_A și H_B se calculează pornind de la observația că în articulația C momentul încovoietor este nul. Evaluînd momentul M_C ca sumă a momentelor forțelor de la stînga, se obține H_A. În mod similar, considerînd forțele de la dreapta, se obține H_B. Pentru verificare se folosește ecuația de proiecții pe orizontală a tuturor forțelor de pe cadru.

În cazul în care cadrul nu are articulațiile pe aceeași orizontală, reacțiunile R_A și R_B se pot descompune în două moduri: 1) în componente verticale (V_A, V_B) și orizontale (H_A, H_B), (fig. 6.50, *a*); 2) în componente verticale (V_A', V_B') și componentele (H_A', H_B') dirijate după linia articulațiilor (fig. 6.50, *b*).

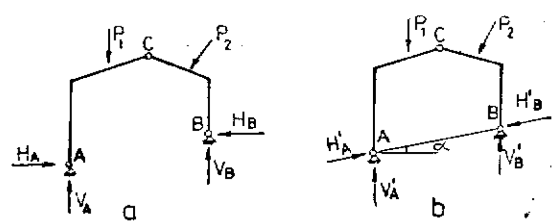


Fig. 6.50.

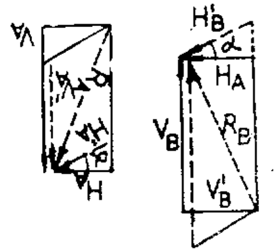


Fig. 6.51.

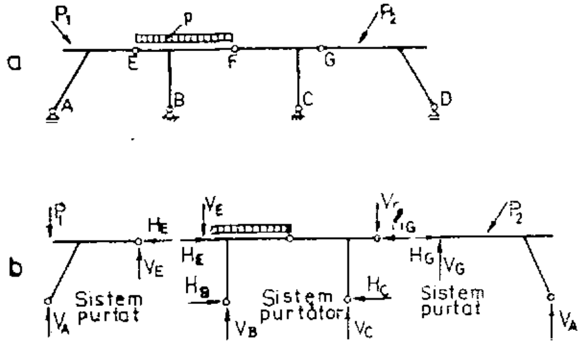


Fig. 6.52.

În primul caz, nu mai este posibil de obţinut ecuaţii care să conţină cîte o singură necunoscută, dar pot fi obţinute sisteme de două ecuaţii cu cîte două necunoscute. În continuare sînt redate schematic aceste ecuaţii

$$\sum M_B = 0\ ;\ \sum M_C^{st} = 0.$$

Prin $\sum M_C^{st}$ s-a notat suma momentelor în raport cu punctul C ale tuturor forţelor de la stînga acestui punct, reprezentînd momentul încovoietor în secţiunea C. Ambele relaţii conţin necunoscutele H_A şi V_A.

În mod similar se determină necunoscutele H_B şi V_B din ecuaţiile

$$\sum M_A = 0\ ;\quad \sum M_C^{dr} = 0.$$

Verificarea se face cu ecuaţiile: $\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$.

Dacă descompunerea reacţiunilor R_A şi R_B se face ca în fig. 6.50, *b*, componentele necunoscutelor se determină la fel ca la cadrul cu articulaţiile situate pe aceeaşi orizontală (v. fig. 6.49). Între componentele H_A, V_A şi H'_A, V'_A, respectiv H_B, V_B şi H'_B, V'_B există, aşa cum rezultă din fig. 6.51, relaţii de echivalenţă, şi anume:

$$V_A = V_A + H'_A \sin\alpha\ ;\quad H_A = H'_A \cos\alpha$$

$$V_B = V'_B - H'_B \sin\alpha\ ;\quad H_B = H'_B \cos\alpha.$$

La cadrele mai complicate, cu mai multe deschideri, se determină mai întîi forţele de legătură ale sistemelor purtate (sisteme secundare). Astfel, la cadrul din fig. 6.52, sistemul purtător (principal) este cadrul central BFC, iar grinzile cotite AE şi CD reprezintă sistemele purtate. S-a descompus structura în sisteme purtate şi sistem purtător, punîndu-se în evidenţă forţele de legătură (fig. 6.52, *b*). Din ecuaţiile de echilibru ale sistemelor purtate se stabilesc forţele de legătură V_E, H_E, V_A, respectiv V_G, H_G, V_D. Rezolvarea sistemului purtător este cunoscută, el fiind un cadru cu trei articulaţii.

6.4.3. DIAGRAME DE EFORTURI. ECHILIBRU DE NOD

Pentru trasarea diagramelor de eforturi, este necesar să se aleagă sensul de parcurs pentru fiecare bară a cadrului. În acest fel, în fiecare secţiune sînt precizate sensurile convenţional pozitive ale eforturilor. Este recomandabil ca sensul de parcurs să fie luat în continuare, aşa cum s-a adoptat de exemplu în fig. 6.53.

Eforturile convenţional pozitive pe faţa din dreapta secţiunilor i şi j sînt arătate în fig. 6.54, *a*, *b*. În orice secţiune, eforturile pot fi determinate şi prin reducerea forţelor de la dreapta secţiunii, considerînd însă convenţia de semne de pe faţa din stînga (fig. 6.54, *c*).

Aspectul calitativ al diagramelor de eforturi rezultă din interpretarea relaţiilor diferenţiale dintre eforturi şi încărcări.

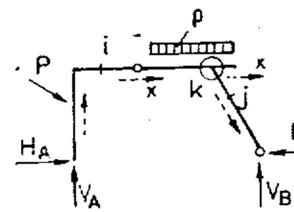


Fig. 6.53.

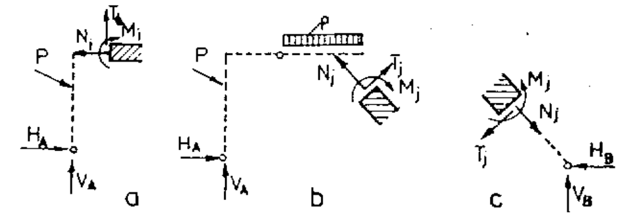


Fig. 6.54.

Reprezentarea diagramelor de eforturi se face după regulile stabilite la grinda dreaptă, fiind în legătură cu sensul de parcurs ales. În fig. 6.55 este arătat modul în care se raportează diagramele de eforturi pe fiecare bară a cadrului, sensul axei Ox fiind dat de sensul de parcurs. Trebuie observat că diagrama de momente este totdeauna raportată pe partea fibrei real întinse, iar semnul ei depinde de sensul de parcurs: cînd fibra real întinsă coincide cu cea presupusă întinsă, semnul este plus; în caz contrar, diagrama de momente are semnul minus. Dacă se schimbă sensul de parcurs, este evident că diagrama de momente îşi schimbă numai semnul, rămînînd reprezentată pe aceeaşi parte, şi anume pe partea fibrei real întinse.

În secţiunile din vecinătatea unui nod, diagramele de eforturi prezintă unele aspecte caracteristice. Diagramele N şi T înregistrează salturi datorită schimbării direcţiilor pe care se proiectează forţele. Se analizează situaţia nodului k al cadrului din fig. 6.53. Nodul trebuie să fie în echilibru sub acţiunea eforturilor care acţionează pe secţiunile din jurul său. În fig. 6.56 se arată nodul cu eforturile pe fiecare secţiune. Se consideră că secţiunile care izolează nodul sînt infinit apropiate, astfel că, teoretic, toate eforturile figurate sînt aplicate chiar în nod. Între aceste eforturi trebuie să existe următoarele relaţii obţinute din echilibrul nodului:

$$\sum X_i = 0\ ;\quad -N_{k1} + N_{k2} + N_{k3}\cos\alpha - T_{k3}\sin\alpha = 0$$

$$\sum Y_i = 0\ ;\quad T_{k1} - T_{k2} - T_{k3}\cos\alpha - N_{k3}\sin\alpha = 0$$

$$\sum_k M_i = 0\ ;\quad M_{k1} - M_{k2} - M_{k3} = 0.$$

Dacă în nod acţionează forţe sau momente concentrate, atunci în ecuaţiile de echilibru se introduc şi acestea.

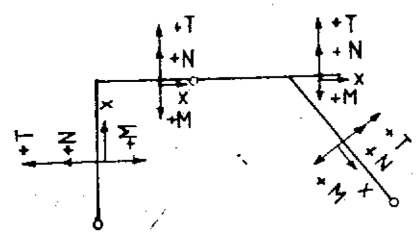


Fig. 6.55.

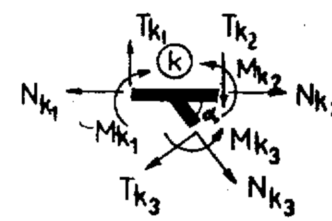


Fig. 6.56.

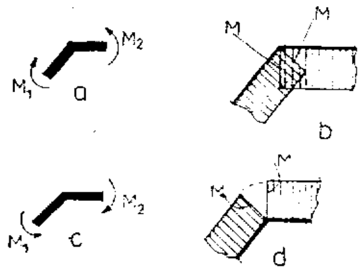


Fig. 6.57.

La un nod alcătuit din două bare, diagrama de momente se rabate pe aceeași parte. Aceasta rezultă din echilibrul momentelor de la nod, aspectul diagramei în acest caz fiind arătat în fig. 6.57, *b*, *d*.

6.4.4. UTILIZAREA SIMETRIEI STRUCTURILOR LA CALCULUL REACȚIUNILOR ȘI LA TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI

În cazul structurilor simetrice se pot obține simplificări importante atît în ceea ce privește determinarea reacțiunilor, cît și la trasarea diagramelor de eforturi.

O structură este simetrică față de o axă dacă îndeplinește următoarele condiții:

— prezintă simetrie geometrică față de axa de simetrie;
— legăturile sînt dispuse simetric față de această axă (simetrie mecanică).

La structurile static determinate, pentru calculul reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi, aceste două condiții sînt suficiente pentru ca structura să fie considerată simetrică. În cazul structurilor static nedeterminate, precum și la calculul deplasărilor elastice la structuri static determinate, noțiunea de simetrie statică presupune și existența simetriei elastice.

Cadrele din fig. 6.58, *a*, *b* nu reprezintă structuri simetrice, deoarece nu au simetrie mecanică. În primul caz, reazemul *A* este un reazem articulat, iar simetricul său, ca poziție, este un reazem simplu. În cazul al doilea, poziția articulației *C* este nesimetrică. O structură simetrică este cadrul cu trei articulații din fig. 6.58, *c*.

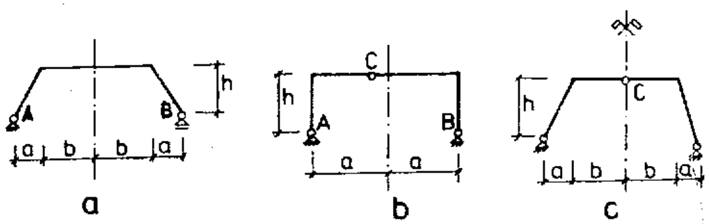


Fig. 6.58.

Dacă încărcările care acționează o structură simetrică sînt dispuse oarecum, nu se obține nici o simplificare. În baza principiului suprapunerii efectelor, orice încărcare poate fi însă descompusă într-o componentă simetrică și o componentă antisimetrică.

Pentru ca două forțe concentrate să fie simetrice față de o axă, trebuie ca (fig. 6.59, *a*):

— punctele de aplicare să fie simetrice;
— suporturile să fie simetrice;
— valorile forțelor să fie egale $F = F'$;
— sensurile să coincidă prin suprapunere.

În mod similar, două momente sînt simetrice dacă punctele de aplicare sînt simetrice, momentele au aceeași valoare ($M = M'$), iar sensurile coincid prin suprapunere. Momentele simetrice au deci întotdeauna sensuri contrare (fig. 6.59, *b*).

Încărcările antisimetrice prezintă aceleași caracteristici ca și încărcările simetrice în ceea ce privește punctul de aplicare, suportul și mărimea, dar prin suprapunere sensurile sînt inverse (fig. 6.60, *a*, *b*).

Ținînd seama de aceste caracteristici, o forță concentrată *P* se descompune în componente, ca în fig. 6.61, *a*, iar o forță uniform distribuită, ca în fig. 6.61, *b*.

Se consideră o porțiune dintr-o bară a unei structuri simetrice. Segmentul de bară este delimitat de secțiunile simetrice *i* și *i'* (fig. 6.62, *a*). Eforturile N_i, T_i și M_i de pe fața din dreapta a secțiunii *i* trebuie să fie simetrice cu eforturile N, T și M de pe fața din stînga a secțiunii *i'*. Aceasta înseamnă că au mărimile egale, iar sensurile coincid prin suprapunere.

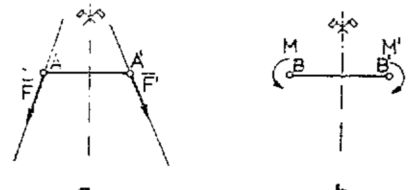


Fig. 6.59.

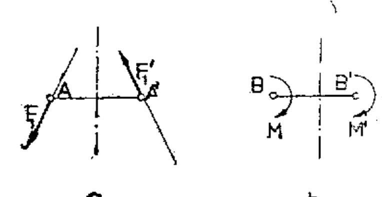


Fig. 6.60.

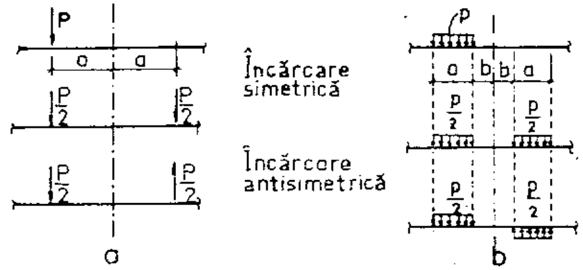


Fig. 6.61.

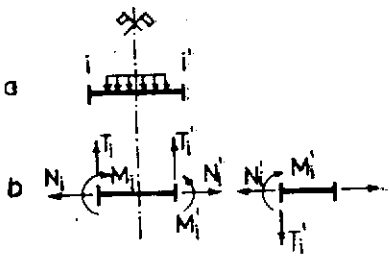


Fig. 6.62.

Convenția de semne pentru eforturi se referă însă la eforturile de pe fața din dreapta a unei secțiuni, astfel că reprezentînd eforturile pe fața *i'* dreapta, se observă că forța tăietoare T_i este negativă. Rezultă că între eforturile din cele două secțiuni simetrice există relațiile

$$N_i = N_{i'};\ T_i = -T_{i'};\ M_i = M_{i'}$$

ceea ce înseamnă că pentru o încărcare simetrică, diagramele *N* și *M* sînt simetrice, iar diagrama *T* este antisimetrică. Reacțiunile vor fi, de asemenea, simetrice. Situația eforturilor din secțiunile *i* și *i'* este prezentată în fig. 6.62, *b*.

Procedînd în mod similar în cazul unei structuri simetrice acționată de o încărcare antisimetrică (fig. 6.63, *a*), se obțin relațiile între eforturile dintre secțiunile simetrice *i* și *i'*, și anume:

$$N_i = -N_{i'};\ T_i = T_{i'};\ M_i = -M_{i'}.$$

Sensurile eforturilor din secțiunile *i* și *i'* se prezintă ca în fig. 6.63, *b*.

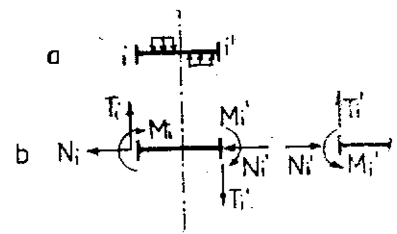


Fig. 6.63.

La o structură simetrică încărcată antisimetric, diagrama T este simetrică, iar diagramele N şi M sînt antisimetrice. Reacţiunile sînt antisimetrice. În continuare, se dă în rezumat dependenţa dintre încărcări şi diagramele de eforturi la structuri simetrice.

Încărcarea	N	T	M	Reacţiuni
Simetrică	Simetrică	Antisimetrică	Simetrică	Simetrice
Antisimetrică	Antisimetrică	Simetrică	Antisimetrică	Antisimetrice

Pe baza acestor concluzii, diagramele de eforturi se trasează numai pe jumătate din structură, pe cealaltă jumătate transmiţîndu-se simetric sau antisimetric.

Sînt situaţii în care, deşi structura nu prezintă simetrie mecanică, totuşi se pot folosi proprietăţile de simetrie.

Astfel, la cadrul din fig. 6.64, *a* se determină în prealabil reacţiunile V_1, H_1, V_2, după care structura se prezintă ca în fig. 6.64, *b*, putînd fi considerată ca o structură simetrică, încărcată cu forţele V_1, H_1, P_1, P_2, V_2 care pot fi descompuse în componente simetrice şi antisimetrice. Grinda din fig. 6.64, *c*, la forţe verticale se comportă ca o structură simetrică, deoarece $H_A = 0$, reazemul A lucrînd ca un reazem simplu.

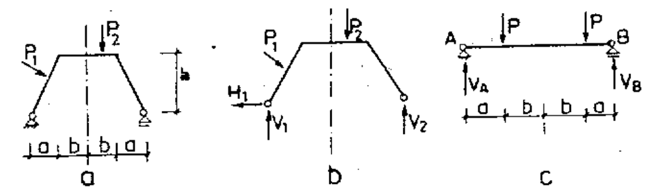


Fig. 6.64.

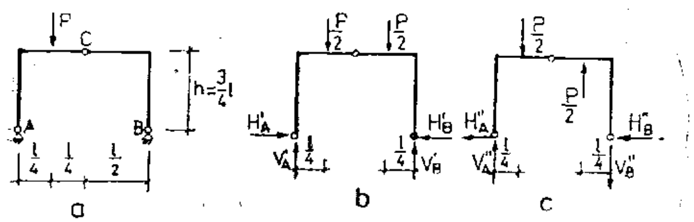


Fig. 6.65.

Metodologia de valorificare a proprietăţii de simetrie este exemplificată pe cadrul din fig. 6.65, *a*.

În primul rînd, încărcarea P oarecare este înlocuită printr-o pereche de forţe simetrice (fig. 6.65, *b*) şi o pereche de forţe antisimetrice (fig. 6.65, *c*).

La încărcarea simetrică reacţiunile sînt simetrice

$$V'_A = V'_B; \quad H'_A = H'_B$$

$$\sum Y = 0; \quad V'_A + V'_B - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} = 0; \qquad V'_A = V'_B = \frac{P}{2}$$

$$\sum M_C^{st} = 0; \quad \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} - H'_A \cdot \frac{3}{4} l = 0; \quad H'_A = \frac{P}{6} = H'_B.$$

Pentru încărcarea antisimetrică reacţiunile sînt antisimetrice. Din această cauză, sensurile trebuie să fie aşa cum sînt figurate pe schema din fig. 6.65, *c*

$$\sum X_i = 0; \quad H''_A + H''_B = 0; \text{ dar } H''_A = H''_B \text{ deci } H''_A = H''_B = 0.$$

Deoarece $V''_A = V''_B = V$, rezultă că structura este acţionată de două cupluri: cuplul forţelor $\frac{P}{2}$ şi cuplul reacţiunilor verticale V''. Pentru echilibru, cuplurile trebuie să fie egale şi de sensuri contrare, deci:

$$V'' \cdot l = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}; \quad V'' = \frac{P}{4}.$$

Diagramele de eforturi pentru fiecare încărcare se trasează după regulile cunoscute, numai pe jumătate din structură, pe cealaltă jumătate desenîndu-se simetric sau antisimetric conform celor arătate anterior.

Reacţiunile totale se obţin prin însumarea reacţiunilor componente

$$V_A = V'_A + V''_A = \frac{P}{2} + \frac{P}{4} = \frac{3P}{4}$$

$$V_B = V'_B - V''_B = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$$

$$H_A = H'_A - H''_A = \frac{P}{6}$$

$$H_B = H'_B + H''_B = \frac{P}{6}.$$

Diagramele de eforturi sînt arătate în fig. 6.66.

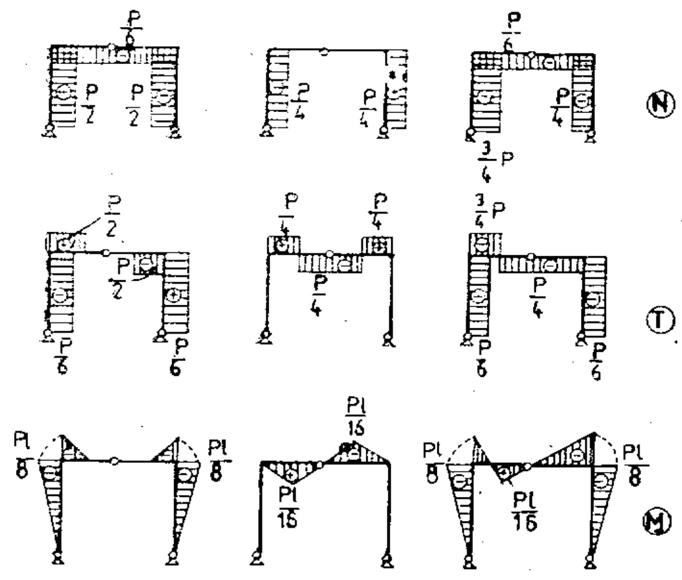


Fig. 6.66.

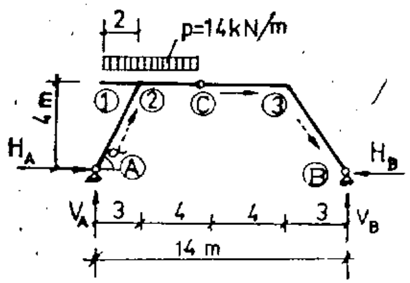


Fig. 6.67.

Aplicația 6.5. Să se traseze diagramele N, T, M la cadrul cu trei articulații din fig. 6.67.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B = 0$$

$$V_A \cdot 14 - 6 \cdot 14 \cdot 10 = 0; \quad V_A = 60 \text{ kN};$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-V_B \cdot 14 - 6 \cdot 14 \cdot 4 = 0; \quad V_B = 24 \text{ kN}.$$

Verificare:

$$\sum Y_i = V_A + V_B - 6 \cdot 14 = 60 + 24 - 84 = 0$$

$$\sum M_C^{st} = 0; \quad 60 \cdot 7 - 6 \cdot 14 \cdot 3 - H_A \cdot 4 = 0; \quad H_A = 42 \text{ kN}$$

$$\sum M_C^{dr} = 0; \quad -24 \cdot 7 + H_B \cdot 4 = 0; \quad H_B = 42 \text{ kN}$$

Verificare: $\sum X_i = H_A - H_B = 42 - 42 = 0.$

Diagrama de forțe axiale rămîne constantă pe fiecare bară și are valorile

$$N_{A2} = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha = -60 \cdot 0{,}8 - 42 \cdot 0{,}6 = -73{,}2 \text{ kN}$$

$$N_{23} = -H_A = -42 \text{ kN}$$

$$N_{3B} = -V_B \sin\alpha - H_B \cos\alpha = -24 \cdot 0{,}8 - 42 \cdot 0{,}6 = -44{,}4 \text{ kN}.$$

Diagrama de forțe tăietoare prezintă următoarele caracteristici:

— bara $A-2$: $T = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha = 60 \cdot 0{,}6 - 42 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ kN;

— bara $1-2$: variație liniară; $T_1 = 0$; $T_2 = -2 \cdot 14 = -28$ kN;

— bara $2-C$; variație liniară; $T_2 = 60 - 2 \cdot 14 = 32$ kN; $T_C = 32 - 14 \cdot 4 = -24$ kN;

— bara $C-3$: $T = -V_B = -24$ kN;

— bara $3-B$: $T = -V_B \cos\alpha + H_B \sin\alpha = -24 \cdot 0{,}6 + 42 \cdot 0{,}8 = 19{,}2$ kN.

Diagrama de momente se construiește pe baza diagramei T și a relațiilor de recurență. Astfel:

— bara $A-2$: variație liniară;

$$M_A = 0; \; M_{2A} = 0 + \Omega_{T_{A2}} = 5 \cdot 2{,}4 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

— bara $1-2$: variație parabolică;

$$M_1 = 0; \quad M_{21} = 0 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 28 = -28 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

— bara $2-C$: variație parabolică;

$$M_C = 0; \quad M_{max} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 1{,}72 = 20{,}6 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$M_{2C} = 20{,}6 - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 2{,}28 = -16 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

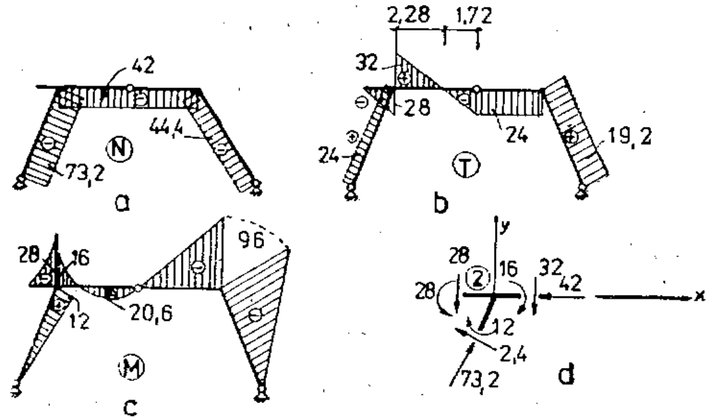


Fig. 6.68.

— bara $C-3$: variație liniară;

$$M_{3C} = 0 - 24 \cdot 4 = -96 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

— bara $3-B$: variație liniară;

$$M_B = 0; \quad M_{3B} = 0 - 19{,}2 \cdot 5 = -96 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Diagramele sînt arătate în fig. 6.68, *a—c*.

Echilibrul nodului 2 (fig. 6.68, *d*). S-au reprezentat pe fiecare secțiune eforturile cu sensurile lor reale

$$\sum X_i = -42 + 73{,}2 \cdot 0{,}6 - 2{,}4 \cdot 0{,}8 = 0;$$

$$\sum Y_i = -28 - 32 + 73{,}2 \cdot 0{,}8 + 2{,}4 \cdot 0{,}6 = 0;$$

$$\sum M_2 = -28 + 16 + 12 = 0.$$

Aplicația 6.6. Să se traseze diagramele N, T, M la cadrul cu alcătuire compusă, din fig. 6.69.

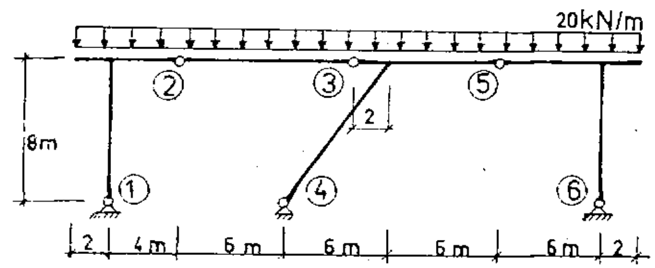


Fig. 6.69.

Calculul forțelor de legătură interioare și de la reazeme (reacțiuni) se face pe schema din fig. 6.70, *a*, prin desfacerea legăturilor interioare. În fig. 6.70, *b* se prezintă structura în ansamblu cu forțele active și reactive (reacțiunile din reazeme).

Determinarea forțelor de legătură:

— corpul $2-3$

$$V_2 = V_3 = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ kN}$$

$$H_2 = H_3 = 65 \text{ kN};$$

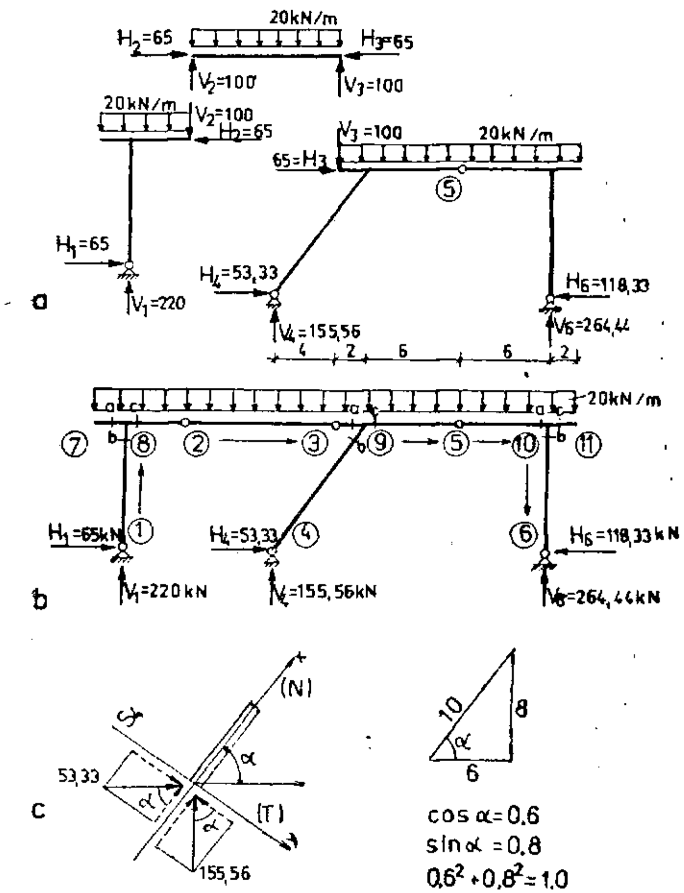


Fig. 6.70.

— corpul *1—2*

$\sum M_1 = 0$; $-20\cdot 6(3-2) - 100\cdot 4 + H_2\cdot 8 = 0$; $H_2 = 65$ kN;

$\sum X_i = 0$; $H_1 - H_2 = 0$; $H_1 = 65$ kN;

$\sum Y_i = 0$; $V_1 - 20\cdot 6 - 100 = 0$; $V_1 = 220$ kN;

— cadrul *4—5—6*

$\sum M_4 = 0$; $-100\cdot 4 - 65\cdot 8 - 20\cdot 16(8+4) + V_6\cdot 18 = 0$;
$V_6 = 264{,}44$ kN

$\sum M_6 = 0$; $-V_4\cdot 18 + 100\cdot 14 - 65\cdot 8 + 20\cdot 16(8-2) = 0$;
$V_4 = 155{,}56$ kN.

Verificare: $\sum Y_i = 155{,}56 - 100 - 20\cdot 16 + 264{,}44 = 0$

$\sum M_5^{dr} = 0$; $-20\cdot 8\cdot 4 - H_6\cdot 8 + 264{,}44\cdot 6 = 0$; $H_6 = 118{,}33$ kN

$\sum M_5^{st} = 0$; $-155{,}56\cdot 12 + H_4\cdot 8 + 100\cdot 8 + 20\cdot 8\cdot 4 = 0$;
$H_4 = 53{,}33$ kN.

Verificare: $\Sigma Y_i = 53{,}33 + 65 - 118.33 = 0$.

Verificare pe ansamblul structurii:

$$\sum Y_i = 220 + 155{,}56 + 264{,}44 - 20\cdot 32 = 0.$$

Diagramele de eforturi se trasează pe baza valorilor calculate în continuare.

Valorile forțelor axiale N (fig. 6.71, *a*):

$N_1 = -220$ kN; $N_{8b} = -220$ kN

$N_7 = 0$; $N_{8a} = 0$

$N_{8c} = -65$ kN; $N_{9a} = -65$ kN

$N_4 = -53{,}33\cos\alpha - 155{,}56\sin\alpha = -156{,}45$ kN (fig. 6.70, *c*);
$N_{9b} = -156{,}45$ kN.

$N_{9c} = -65 - 53{,}33 = -118{,}33$ kN; $N_{10a} = -118{,}33$ kN

$N_6 = -264{,}44$ kN; $N_{10b} = -264{,}44$ kN

$N_{10c} = 0.$

Valorile semnificative din diagrama forțelor tăietoare T (fig. 6.71, *b*):

$T_1 = -65$ kN; $T_{8b} = -65$ kN

$T_7 = 0$; $T_{8a} = -20\cdot 2 = -40$ kN

$T_{8c} = +220 - 20\cdot 2 = 180$ kN; $T_{9a} = 180 - 20\cdot 16 = -140$ kN

$T_4 = -53{,}33\sin\alpha + 155{,}56\cos\alpha = 50{,}67$ kN; $T_{9b} = 50{,}67$ kN

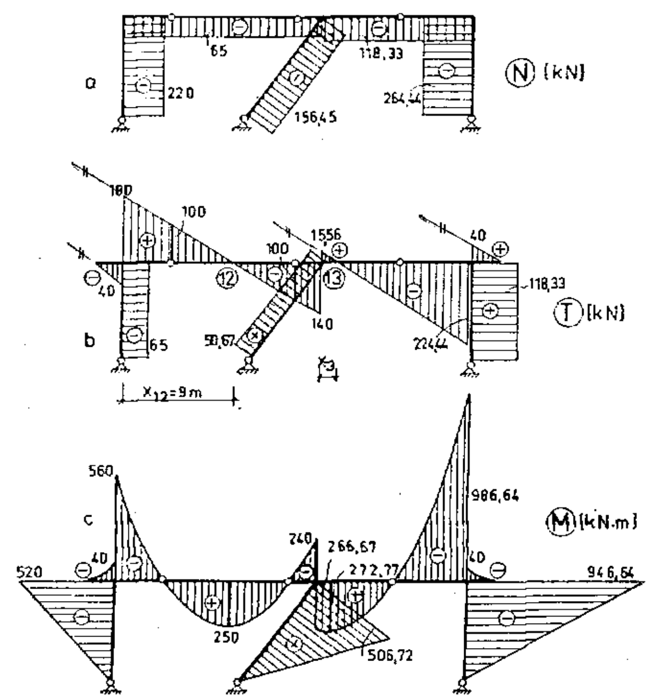


Fig. 6.71.

$T_{9c} = 220 + 155,56 - 20 \cdot 18 = 15,56$ kN

$T_{10a} = 15,56 - 20 \cdot 12 = -224,44$ kN sau

$T_{10a} = -264,44 + 20 \cdot 2 = -224,44$ kN

$T_{10c} = -224,44 + 264,44 = 40$ kN sau

$T_{10c} = +20 \cdot 2 = 40$ kN

$T_{11} = 40 - 20 \cdot 2 = 0.$

Diagrama T prezintă valori nule în secţiunile de la distanţele:

$$x_{(12)} = \frac{180}{20} = 9 \text{ m}; \quad x_{(13)} = \frac{15,56}{20} = 0,778 \text{ m}.$$

Calculul valorilor (ordonatelor) semnificative din diagrama de momente încovoietoare M (fig. 6.71, c):

$M_1 = 0; \quad M_{8b} = -65 \cdot 8 = -520$ kN·m

$M_7 = 0; \quad M_{8a} = -(20 \cdot 2) \cdot 1 = -40$ kN·m

$M_{8c} = -65 \cdot 8 - (20 \cdot 2) \cdot 1 = -560$ kN·m

$M_2 = 0$

$M_{(12)} = -560 + \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 9 = 250$ kN·m sau

$M_{(12)} = 220 \cdot 9 - 65 \cdot 8 - 20 \cdot 11 \cdot 5,5 = 250$ kN·m (din forţele de la stînga)

sau, cunoscînd că $T_2 = V_2 = 100$ kN

$M_{(12)} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 100(9 - 4) = 250$ kN·m ($M_{(12)} = M_2 + \Omega_{T_{2,12}}$)

sau, întrucît grinda $2-3$ este o grindă independentă simplu rezemată încărcată cu forţă uniform distribuită $M_{(12)} = \frac{pl^2}{8} = \frac{20 \cdot 10^2}{8} = 250$ kN·m

$M_3 = 0$

$M_{9a} = 220 \cdot 16 - 65 \cdot 8 - 20 \cdot 18 \cdot 9 = -240$ kN·m sau

$M_{9a} = 250 - \frac{1}{2} \cdot 140(16 - 9) = -240$ kN·m

sau, cunoscînd că $T_3 = V_3 = 100$ kN

$M_{9a} = 0 - \frac{100 + 140}{2} \cdot 2 = -240$ kN·m

$M_4 = 0; \quad M_{9b} = 155,56 \cdot 6 - 53,33 \cdot 8 = 506,72$ kN·m

$M_{9c} = 220 \cdot 16 + 155,56 \cdot 6 - 65 \cdot 8 - 53,33 \cdot 8 - 20 \cdot 18 \cdot 9 =$

$= 266,72$ kN·m sau

$M_{9c} = 264,44 \cdot 12 - 118,33 \cdot 8 - 20 \cdot 14 \cdot 7 = 266,7$ kN·m

$M_{(13)} = 266,72 + \frac{1}{2} \cdot 15,56 \cdot 0,778 = 272,77$ kN·m

$M_5 = 0$

$M_{10a} = -118,33 \cdot 8 - (20 \cdot 2) \cdot 1 = -986,64$ kN·m

$M_{10b} = -118,33 \cdot 8 = -946,64$ kN·m

$M_{10c} = -(20 \cdot 2) \cdot 1 = -40$ kN·m.

Verificarea diagramelor de eforturi prin condiţiile de echilibru ale nodurilor (fig. 6.72):

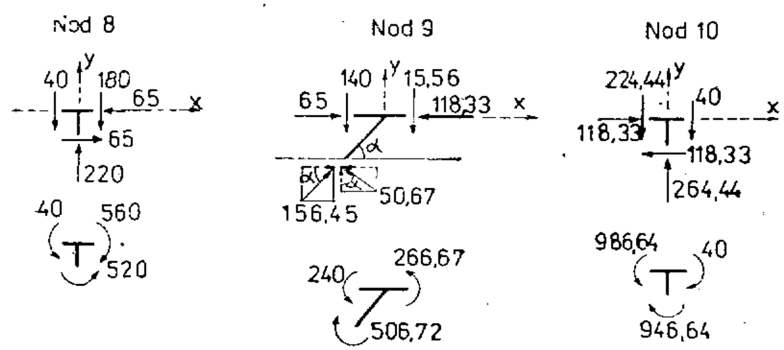


Fig. 6.72.

Nodul 8: $\sum X_i = 65 - 65 = 0$

$\sum Y_i = -40 + 220 - 180 = 0$

$\sum_8 M_C = -40 - 520 + 560 = 0.$

Nodul 9: $\sum X_i = 65 + 156,45 \cos \alpha - 50,67 \sin \alpha - 118,33 = 0$

$\sum Y_i = -140 + 156,45 \sin \alpha + 50,65 \cos \alpha - 15,56 = 0$

$\sum_9 M_i = -240 - 266,67 + 506,67 = 0$

Nodul 10: $\sum X_i = 118,33 - 118,33 = 0$

$\sum Y_i = -224,44 + 264,44 - 40 = 0$

$\sum_{10} M_i = -986,64 + 946,64 + 40 = 0.$

Aplicaţia 6.7. Să se traseze diagramele N, T, M la cadrul simetric, încărcat simetric din fig. 6.73, a.

Structura fiind alcătuită simetric şi încărcată simetric, rezultă în consecinţă că reacţiunile vor fi simetrice, diagramele N şi M vor fi simetrice, iar diagrama T va fi simetrică.

Calculul reacţiunilor (fig. 6.73, b)

Din proiecţia pe verticală rezultă:

$$V_1 = V_3 = \frac{20 + 40 \cdot 12 + 20}{2} = 260 \text{ kN}.$$

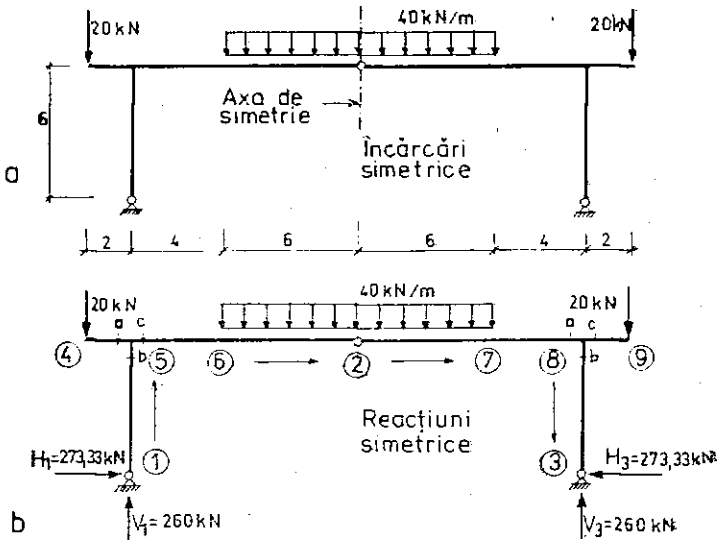


Fig. 6.73.

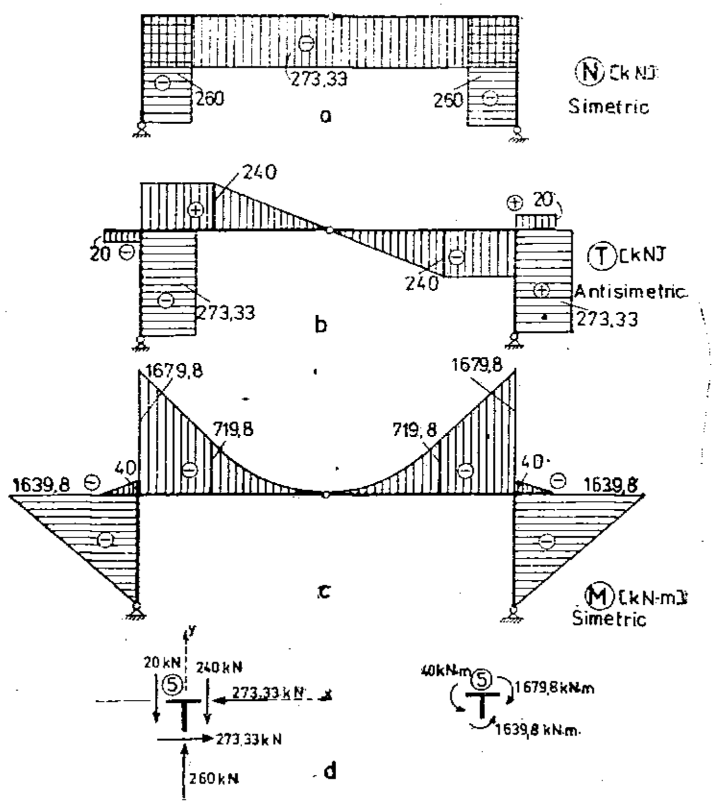


Fig. 6.74.

Din condiția ca momentul încovoietor în articulația *2* să fie nul, rezultă :

$$H_3 = \frac{260\cdot 10 - 20\cdot 12 - 40\cdot 6\cdot 3}{6} = 273{,}33 \text{ kN}.$$

Valorile necesare pentru trasarea diagramelor de eforturi vor fi (fig. 6.74):
Diagrama de forțe axiale N (fig. 6.74, *a*)

$$N_1 = -260 \text{ kN}; \quad N_{5b} = -260 \text{ kN}$$

$$N_4 = N_{5a} = 0$$

$$N_{5c} = N_{52} = -273{,}33 \text{ kN}.$$

În dreapta axei de simetrie, valori simetrice.
Diagrama de forțe tăietoare T (fig. 6.74, *b*)

$$T_1 = T_{5b} = -273{,}33 \text{ kN}$$

$$T_4 = -20 \text{ kN}; \quad T_{5a} = -20 \text{ kN}$$

$$T_{5c} = 260 - 20 = 240 \text{ kN}; \quad T_6 = 240 \text{ kN}$$

$$T_2 = 0.$$

În continuare, în dreapta, valori antisimetrice.
Diagrama de momente încovoietoare M (fig. 6.74, *c*)

$$M_1 = 0; \quad M_{5b} = -273{,}3\cdot 6 = -1\,639{,}8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_4 = 0; \quad M_{5a} = -20\cdot 2 = -40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{5c} = -273{,}3\cdot 6 - 20\cdot 2 = -1\,679{,}8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_6 = -273{,}3\cdot 6 - 20\cdot 6 + 260\cdot 4 = -719{,}8 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{sau}$$

$$M_6 = -1\,679{,}8 + 240\cdot 4 = -719{,}8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_2 = 0.$$

Diagrama este simetrică.
Verificarea diagramelor de eforturi prin analiza echilibrului de nod:

Nodul *5*: $\sum X_i = 273{,}33 - 273{,}33 = 0$

$$\sum Y_i = -20 + 260 - 240 = 0$$

$$\sum_5 M_i = -40 - 1\,639{,}8 + 1\,679{,}8 = 0.$$

6.5. ÎNCĂRCĂRI MOBILE. LINII DE INFLUENȚĂ

6.5.1. ÎNCĂRCARE MOBILĂ

Încărcările utile care acționează asupra unei construcții se caracterizează în general prin poziția lor variabilă. Astfel, planșeul unei magazii de mărfuri poate fi încărcat în totalitate sau numai pe anumite porțiuni, încărcarea putînd ajunge sau nu la limita maximă. Un grup de oameni care circulă pe trotuarul unui pod reprezintă o încărcare mobilă, deoarece își schimbă poziția.

O încărcare mobilă se caracterizează deci prin aceea că își schimbă poziția pe structură, putînd la un moment dat să acționeze sau nu asupra construcției.

Atunci cînd peste un pod de cale ferată trece un tren, încărcările transmise de către roțile locomotivei, considerate cu destulă exactitate ca forțe concentrate, se deplasează de la un capăt la altul al podului. Aceste forțe nu își modifică poziția relativă una față de alta, dar întregul grup își schimbă în permanență poziția față de structură.

Același lucru se întîmplă și la un pod de șosea peste care circulă un convoi de autocamioane. Forțele transmise de către roțile acestuia sînt schematizate ca forțe concentrate care se deplasează pe pod.

Există și convoaie de încărcări distribuite. Astfel, un excavator pe șenile care parcurge un pod constituie o încărcare distribuită, de o anumită intensitate și lungime, care își modifică poziția.

Un convoi de încărcări mobile reprezintă un sistem de forțe, în general verticale, de mărime dată, a căror poziție relativă este invariabilă.

Există convoaie reale, care circulă efectiv pe o construcție, cum ar fi de exemplu o locomotivă care parcurge un pod.

Pentru calculul podurilor se folosesc însă convoaie convenționale tip, numite convoiae tip, ale căror efecte asupra unei structuri sînt mai mari decît cele ale convoaielor reale. Convoaiele tip pentru poduri sînt prevăzute în prescripțiile oficiale.

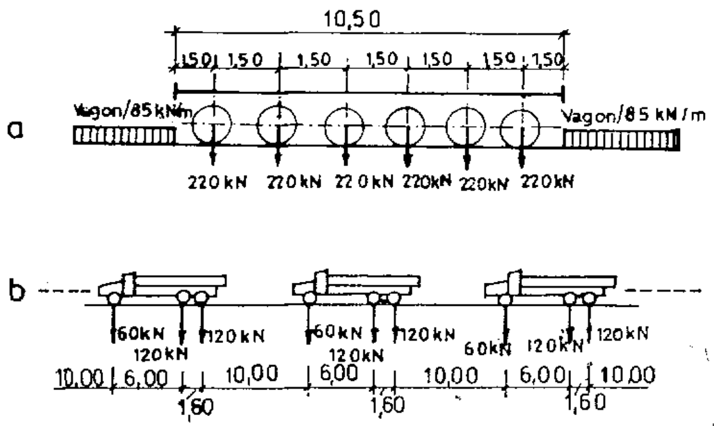


Fig. 6.75.

În fig. 6.75, *a* se prezintă spre exemplificare o schemă tip pentru un convoi de cale ferată (T 8,5) format dintr-o locomotivă încadrată de vagoane, echivalate cu încărcări distribuite nelimitate de o parte și de alta. În fig. 6.75, *b* se prezintă o schemă tip de convoi rutier (A 30) format din autocamioane de 300 kN fiecare.

6.5.2. LINIE DE INFLUENȚA

Podurile de cale ferată și cele de șosea sînt construite cu scopul de a asigura circulația unor convoaie de încărcări mobile peste un obstacol.

Pentru un anumit convoi, eforturile într-o secțiune oarecare a unui element de rezistență vor varia în funcție de poziția pe care convoiul o ocupă pe structură. Proiectarea construcției, în condițiile garantării unei siguranțe

depline în exploatare, necesită determinarea celei mai defavorabile situații în care se poate găsi solicitată o secțiune dată a construcției. Este deci vorba de a cunoaște poziția convoiului pentru care un efort dintr-o secțiune înregistrează valoarea maximă și apoi de a calcula această valoare.

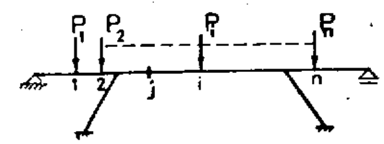


Fig. 6.76.

Se consideră structura din fig. 6.76, parcursă de un convoi de forțe mobile care la un moment dat ocupă o poziție oarecare. Interesează să se determine pentru această situație valoarea unei anumite mărimi statice S_j dintr-o secțiune fixă j. Prin mărime statică se înțelege un efect al încărcărilor, ca de exemplu, efortul axial N, forța tăietoare T, momentul încovoietor M, deplasarea pe verticală etc.

În baza principiului suprapunerii liniare a efectelor, mărimea statică S_j, produsă de întregul convoi, poate fi evaluată ca sumă a mărimilor statice produse de acțiunea separată a fiecărei forțe în parte, adică:

$$S_j = S_{j(P_1)} + S_{j(P_2)} + \dots + S_{j(P_i)} + \dots + S_{j(P_n)} \tag{6.9}$$

în care, de exemplu, $S_{j(P_i)}$ reprezintă valoarea mărimii statice considerate, dacă structura ar fi acționată numai de forța P_i, în aceeași poziție ca aceea din convoi. Se consideră că în locul forței P_i, pe direcția și în sensul acesteia, acționează o forță convențională $P_i = 1$. Valoarea mărimii statice S_j, pentru această situație de încărcare, este $S_{j(P_i=1)} = s_i$.

Cînd în secțiunea i acționează forța reală P_i, mărimea statică S_j va fi de P_i ori mai mare decît s_i

$$S_{j(P_i)} = s_i P_i.$$

În mod similar, dacă structura se încarcă cu $P_1 = 1$, $P_2 = 1$ pînă la $P_n = 1$ rezultă:

$$S_{j(P_1)} = s_1 P_1$$
$$S_{j(P_2)} = s_2 P_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$S_{j(P_i)} = s_i P_i$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$S_{j(P_n)} = s_n P_n.$$

Valoarea totală a mărimii statice S_j este constituită din suma valorilor produse prin suprapunerea acțiunii forțelor din convoi

$$S_j = s_1 P_1 + s_2 P_2 + \dots + s_i P_i + \dots + s_n P_n = \sum s_i P_i. \tag{6.10}$$

Rezultă că orice mărime statică poate fi exprimată în funcție de încărcări sub forma unei relații liniare.

Coeficienții s_i se numesc *coeficienți de influență* ai forțelor asupra mărimii statice S_j. Coeficientul s_k reprezintă valoarea mărimii statice S_j cînd pe structură acționează în secțiunea k o încărcare convențională unitară ($P_k = 1$). Pentru o anumită mărime statică, coeficienții de influență s_i depind numai de poziția forței unitare (fig. 6.77, *a*). Dacă se consideră forța $P = 1$ într-o succesiune de poziții, iar în dreptul fiecărei secțiuni se raportează, față de o

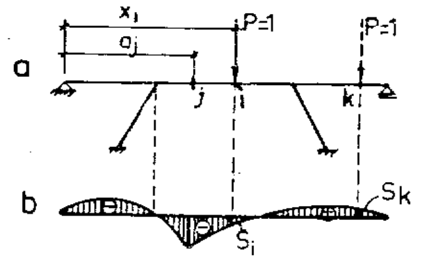


Fig. 6.77.

linie de referință, valorile coeficienților de influență, se obține diagrama din fig. 6.77, *b*, în care ordonata s_i constituie valoarea mărimii statice S_j cînd în secțiunea i acționează forța $P = 1$.

Precizînd poziția forței unitare printr-o coordonată x_i, se obține, așa cum s-a arătat, $s_i = f(x_i)$.

Funcția $s_i = f(x_i)$ se numește *linie de influență* a mărimii statice S_j.

Linia de influență a unei mărimi statice este o diagramă ale cărei ordonate reprezintă valorile mărimii statice dintr-o secțiune fixă, cînd pe structură circulă o forță convențională egală cu unitatea.

O ordonată oarecare s_k a liniei de influență reprezintă deci valoarea mărimii statice S_j, în cazul în care în secțiunea k din dreptul ordonatei considerate acționează forța $P = 1$ (fig. 6.77, *b*).

Dimensiunile coeficienților de influență s_i depind de mărimea statică din a cărei linie de influență fac parte și se determină pornind de la considerentul că produsul $P_i s_i$ are dimensiunea mărimii statice S_j. Considerînd că mărimea statică reprezintă pe rînd eforturile din secțiunea j, se obține

$$N_j = n_1P_1 + n_2P_2 + \ldots + n_iP_i + \ldots + n_nP_n = \sum_{i=1}^{n} n_iP_i$$

$$T_j = t_1P_1 + t_2P_2 + \ldots + t_iP_i + \ldots + t_nP_n = \sum_{i=1}^{n} t_iP_i \qquad (6.11)$$

$$M_j = m_1P_1 + m_2P_2 + \ldots + m_iP_i + \ldots + m_nP_n = \sum_{i=1}^{n} m_iP_i.$$

În aceste relații, variația coeficienților de influență $n = f_1(x)$, $t = f_2(x)$, $m = f_3(x)$ constituie liniile de influență ale forței axiale, forței tăietoare și respectiv momentului încovoietor din secțiunea fixă j.

Produsul n_iP_i fiind o forță axială are dimensiune de forță, deci coeficientul de influență n_i este adimensional. În mod asemănător, se stabilește că t_i este adimensional, iar m_i are dimensiune de lungime.

Între o linie de influență și o diagramă de eforturi există deosebiri esențiale.

Dacă se notează : E — funcția de eforturi ; I — funcția liniei de influență ; x_p^0 — poziția unor încărcări fixe P ; a_j — poziția diverselor secțiuni ale structurii ; a_j^0 — poziția fixă a secțiunii în care se consideră mărimea statică a cărei linie de influență este I ; x — poziția variabilă a forței unitate, atunci :

$$E = f(a_j,\ x_p^0)\ ;\ I = f_1(a_j^0,\ x).$$

La o diagramă de eforturi, încărcările sînt constituite din *forțe fixe*, diagrama reprezentînd variația efortului în diversele secțiuni ale structurii.

Linia de influență exprimă variația unei mărimi statice dintr-o *secțiune fixă*, atunci cînd încărcarea convențională unitară parcurge structura.

Trebuie observat că încărcările mobile nu pot ajunge totuși în orice poziție pe structură. Astfel, la cadrul de pod din fig. 6.78, convoiul circulă numai pe riglă.

Locul geometric al punctelor de aplicare a forțelor mobile se numește *linie de încărcare* (calea).

Linia de influență se trasează numai pentru pozițiile forței unitare pe linia de încărcare. Avînd linia de influență a unei mărimi statice S_j (fig. 6.79, *b*), se poate calcula valoarea acestei mărimi pentru o poziție anumită a convoiului, făcînd suma produselor forțelor convoiului, cu ordonatele corespunzătoare din linia de influență. Astfel, pentru convoiul $P_1, \ldots, P_5$, care ocupă poziția din fig. 6.79, *a*, se obține pentru mărimea S_j

$$S_j = \sum_{1}^{5} P_i\eta_i = -P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + P_3\eta_3 + P_4\eta_4 - P_5\eta_5$$

ordonatele η_1 și η_5 așa cum se vede din linia de influență sînt negative.

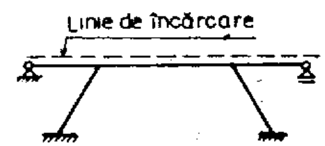


Fig. 6.78.

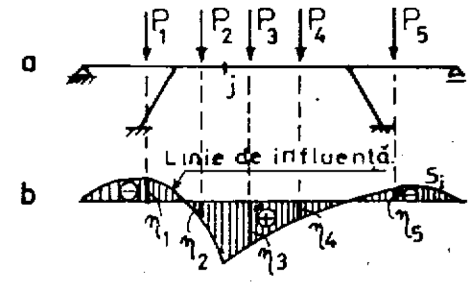


Fig. 6.79.

Liniile de influență pentru structuri static determinate se pot trasa prin două metode :

— *metoda funcțiilor de influență (metoda analitică)*, care are la bază exprimarea echilibrului și a eforturilor dintr-o secțiune pe cale analitică. Se ajunge astfel la funcția de influență care, reprezentată grafic, constituie linia de influență ;

— *metoda cinematică (deplasări virtuale)*, care constă în exprimarea echilibrului cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual. Deplasata căii, la o anumită scară, reprezintă linia de influență.

6.5.3. TRASAREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ PRIN METODA FUNCȚIILOR DE INFLUENȚĂ

Se va exemplifica aplicarea metodei analitice în trasarea liniilor de influență la grinda simplu rezemată, la consolă, la grinda cu console și la cadre. Principiul este același și în cazul altor structuri.

Linii de influență la grinda dreaptă simplu rezemată. Se consideră grinda simplu rezemată din fig. 6.80, *a*, încărcată cu forța $P = 1$, situată într-o poziție variabilă definită de coordonatele x și x'. Ordonatele pozitive ale liniilor de influență se reprezintă în sensul încărcărilor.

Reacțiunile verticale V_A și V_B se deduc din ecuații de moment în raport cu punctele B, respectiv A.

Linia V_A (fig. 6.80, *b*). Expresia funcției de influență este

$$V_A = \frac{1 \cdot x'}{l} = \frac{x'}{l}. \qquad (6.12)$$

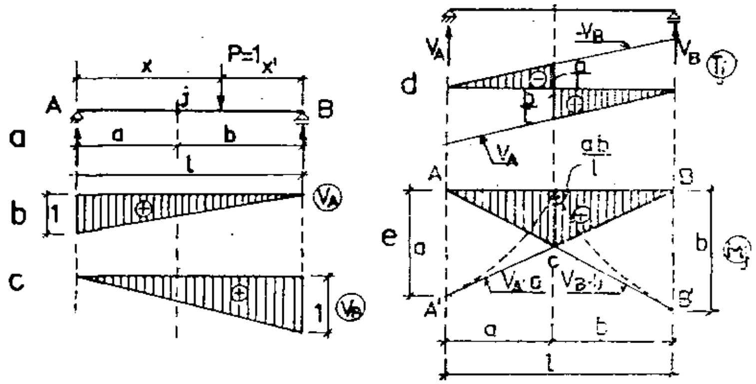


Fig. 6.80.

Linia de influență V_A are deci variație liniară și prezintă următoarele valori caracteristice:

$$x' = 0\,; \quad \eta_B = 0$$
$$x' = l\,; \quad \eta_A = 1.$$

Linia V_B (fig. 6.80, *c*). Expresia funcției de influență este

$$V_B = \frac{1 \cdot x}{l} = \frac{x}{l}$$
$$x = 0\,; \quad \eta_A = 0 \qquad (6.13)$$
$$x = l\,; \quad \eta_B = 1.$$

Liniile de influență ale reacțiunilor au variații liniare, sînt pozitive și au ordonatele egale cu 1 în dreptul reazemului respectiv. Evident,

$$V_A + V_B = \frac{x'}{l} + \frac{x}{l} = \frac{x' + x}{l} = \frac{l}{l} = 1.$$

Linia T_j (fig. 6.80, *d*). Secțiunea j se găsește la distanțele a și b față de reazeme (fig. 6.80, *a*). Pentru obținerea unor funcții de influență cît mai simple, se consideră încărcarea unitară în două situații:

— forța $P = 1$ la dreapta secțiunii j

$$T_j = V_A.$$

Dacă încărcarea unitară este pe zona $j-B$, linia forței tăietoare T_j este identică cu linia V_A. Deci $T_j = V_A$ pentru $0 \leqslant x' \leqslant b$

$$\eta_j^{dr} = \frac{b}{l}\,;$$

— forța $P = 1$ la stînga secțiunii j. În acest caz se exprimă forța tăietoare considerînd forțele de la dreapta secțiunii j, reprezentate prin V_B

$$T_j = -V_B \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant x \leqslant a$$

$$\eta_j^{st} = -\frac{a}{l}.$$

Linia de influență T_j are două zone, una pozitivă și alta negativă și prezintă un salt în dreptul secțiunii respective.

Linia M_j (fig. 6.80, *e*). Procedeul este similar celui de la forța tăietoare T_j:

— forța $P = 1$ la dreapta secțiunii. Momentul încovoietor se calculează ca sumă a momentelor forțelor de la stînga secțiunii j

$$M_j = V_A a \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant x' \leqslant b$$

$$\eta_j = \frac{b}{l} \cdot a = \frac{ab}{l}\,;$$

— forța $P = 1$ la stînga secțiunii j

$$M_j = V_B b \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant x \leqslant b$$

$$\eta_j = \frac{a}{l} \cdot b = \frac{ab}{l}.$$

Linia de influență a momentului încovoietor se prezintă ca o diagramă triunghiulară avînd vîrful în dreptul secțiunii considerate și este în întregime pozitivă.

Așa cum rezultă din expresii, linia de influență se poate construi luînd pe verticala reazemului A (fig. 6.80, *e*) distanța a, obținînd punctul A', iar pe verticala reazemului B, distanța b, obținînd punctul B'. Dreptele AA' și BB' delimitează linia de influență ABC a momentului încovoietor în secțiunea j.

Linii de influență la consolă. Se consideră consola din fig. 6.81, *a*.

Linia V_B (fig. 6.81, *b*). Se obține din ecuația de proiecție pe verticală.

$$\sum Y_i = 0\,; \quad V_B - 1 = 0\,; \quad V_B = 1.$$

Indiferent de poziția încărcării unitare, valoarea reacțiunii V_B este aceeași.

Linia M_B (fig. 6.81, *c*). Scriind ecuația de momente în raport cu secțiunea B, rezultă

$$-1x_B - M_B = 0\,; \quad M_B = -x_B.$$

Variația liniei de influență este liniară, iar ca valori particulare rezultă

$$x_B = 0\,; \qquad \eta_B = 0$$
$$x_B = l\,; \qquad \eta_A = -l.$$

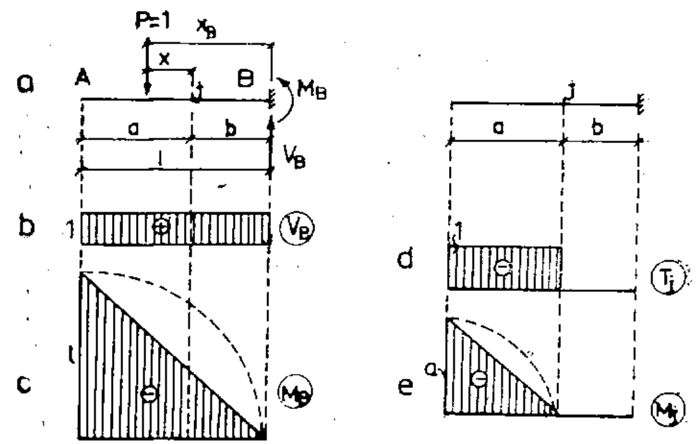


Fig. 6.81.

Linia de influență M_B este definită punînd pe verticala vîrfului consolei ordonata de mărime l.

Linia T_j (fig. 6.81, *d*). Dacă forța $P = 1$ se găsește la dreapta secțiunii, atunci $T_j = 0$, iar cînd forța $P = 1$ este la stînga secțiunii, $T_j = -P$, adică $T_j = -1$.

Linia M_j (fig. 6.81, *e*). Expresia liniei de influență rezultă foarte simplu dacă poziția încărcării unitare se stabilește prin coordonata x, măsurată de la secțiunea j. În acest caz, cît timp forța unitară este la stînga secțiunii j, momentul încovoietor are valoarea

$$M_j = -x$$

deci pentru $x = 0$, $\eta_j = 0$, iar pentru $x = a$, $\eta_A = -a$.

Dacă forța unitară se găsește între secțiunea j și încastrare, momentul M_j este nul deoarece nu există nici o forță la stînga secțiunii j.

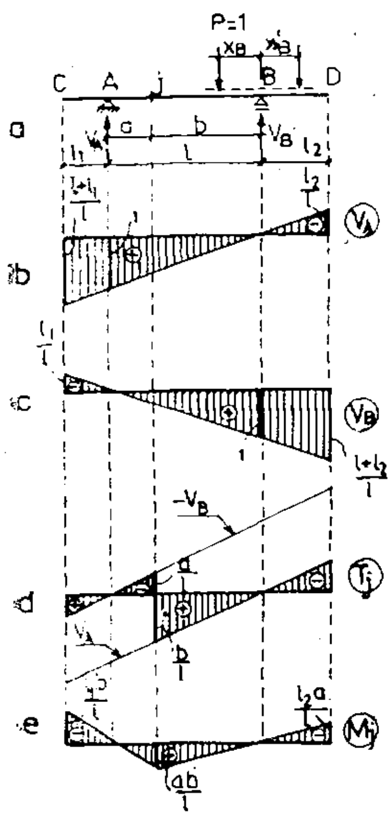


Fig. 6.82.

Linii de influență la grinda cu console. Se procedează ca și la grinda simplu rezemată.

Linia V_A (fig. 6.82, *b*). Se consideră că forța $P = 1$ se găsește la stînga reazemului B la distanța x_B de acesta (fig. 6.82, *a*). Atunci

$$V_A = \frac{1 \cdot x_B}{l}$$

$$x_B = 0; \quad \eta_B = 0$$

$$x_B = l; \quad \eta_A = \frac{l}{l} = 1$$

$$x_B = l + l_1; \quad \eta_C = \frac{l + l_1}{l}.$$

Dacă încărcarea unitară se deplasează la dreapta reazemului B, se obține

$$V_A = -\frac{1 \cdot x'_B}{l}.$$

$$\text{Pentru:} \quad x'_B = 0; \quad \eta_B = 0$$

$$x'_B = l_2; \quad \eta_D = -\frac{l_2}{l}.$$

Linia V_B (fig. 6.82, *c*). Din ecuația de proiecție pe verticală se cunoaște că suma celor două reacțiuni este egală cu 1, deci în orice secțiune, suma ordonatelor celor două linii de influență ($V_A + V_B$) trebuie să fie egală cu 1.

Linia T_j (fig. 6.82, *d*) *și linia* M_j (fig. 6.82, *e*). Se determină considerind încărcarea o dată la dreapta secțiunii j, apoi la stînga acesteia. În prima situație, $T_j = V_A$, deci configurația liniei T_j, de la secțiunea j și pînă la extremitatea din dreapta, este identică cu aceea a liniei V_A, iar $M_j = V_A a$. Cînd forța $P = 1$ se află la stînga secțiunii j, $T_j = -V_B$, iar $M_j = V_B b$.

Dacă secțiunea j se găsește pe una din console, atunci liniile de influență ale eforturilor se trasează așa cum s-a arătat anterior la consolă (v. fig. 6.81, *d*, *e*).

Linii de influență la cadre static determinate. Se consideră cadrul cu trei articulații din fig. 6.83, *a*, pentru care se arată construcția liniilor de influență pentru reacțiunile din reazemele A și B și eforturile din secțiunile *1*, *2* și *3*, folosind metoda (procedeul) funcțiilor de influență.

Metodologia de calcul impune determinarea în prima etapă a liniilor de influență pentru reacțiuni și, în continuare, este posibilă exprimarea funcțiilor de eforturi în secțiunile dorite de pe barele structurii.

Linia V_A (fig. 6.83, *b*). Se definește din ecuația de echilibru $\sum M_B = 0$, și anume

$$V_A = \frac{1 \cdot x'}{l}.$$

Linia V_B (fig. 6.83, *c*). Din ecuația $\sum M_A = 0$ rezultă

$$V_B = \frac{1 \cdot x}{l}.$$

Linia H (fig. 6.83, *d*). Din condiția ca momentul încovoietor în articulația C să fie nul, se obține

$$H_A = \frac{M_C^0}{h}$$

unde M_C^0 este momentul încovoietor produs de încărcările verticale (momentul de la grinda dreaptă simplu rezemată a cărui linie de influență este cunoscută).

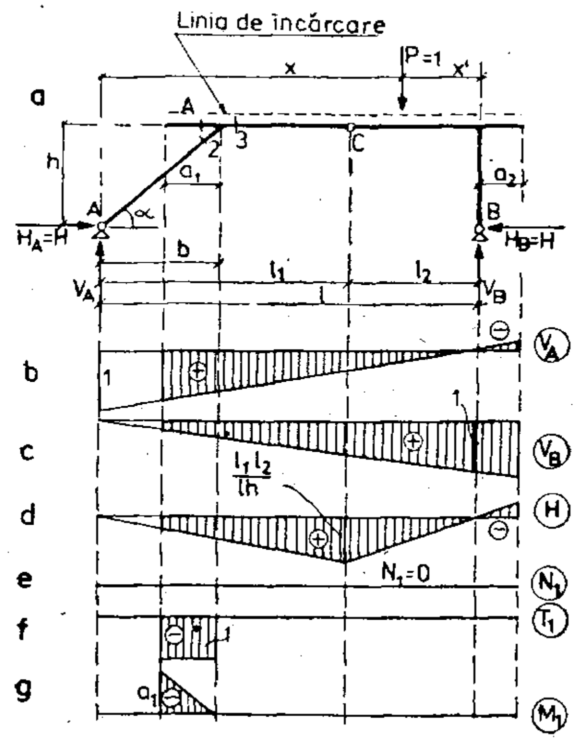


Fig. 6.83.

În fine, din ecuația de proiecție pe orizontală se obține

$$H_B = H_A = H = \frac{M_C^0}{h}\cdot$$

Liniile de influență pentru eforturile din secțiunile 1, 2 și 3 din jurul nodului din stînga (v. fig. 6.83, a) se determină după cum urmează.

Pentru eforturile din secțiunea 1, se găsesc expresiile analizate la consolă

$$N_1 = 0\ ;\quad T_1 = -1$$

$M_1 = 1\cdot x'$ (forța $P = 1$ este acum pe consolă).

Reprezentarea liniilor de influență este dată în fig. 6.83, e, f, g.

Secțiunea 2 este pe stîlpul $A-2$ și nu este plasată pe linia de încărcare ; în consecință, eforturile din această secțiune provin din reacțiunile V_A și $H_A = H$ pentru care se cunosc funcțiile de influență (v. fig. 6.83). Rezultă

$$N_2 = -V_A \sin\alpha - H\cos\alpha$$

$$T_2 = V_A\cos\alpha - H\sin\alpha$$

$$M_2 = V_A b - Hh.$$

În fig. 6.84 s-au reprezentat liniile de influență N_2, T_2, M_2 ; evident, ele se extind pe domeniul liniei de încărcare cu forțe mobile. S-au precizat ordonatele caracteristice din care prin relații de asemănare geometrică se determină oricare din ordonatele liniei de influență. Este de remarcat că la suprapunerea funcțiilor pentru T_2 și M_2 se realizează intersecția acestora pe verticala punctului k, deoarece cînd forța $P = 1$ este în dreptul acestui punct,

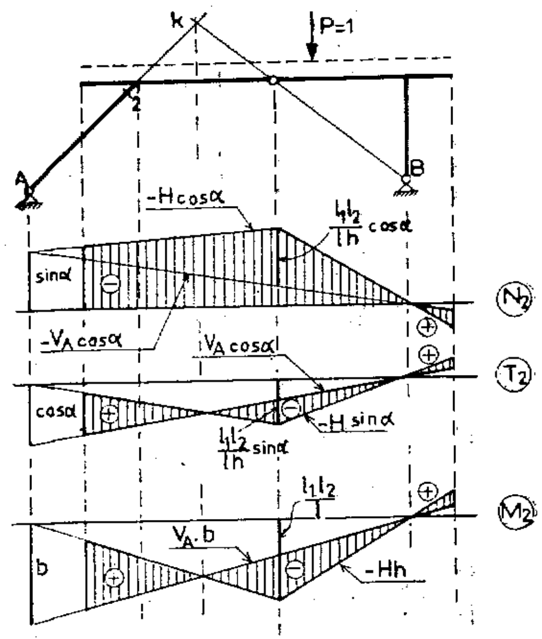


Fig. 6.84.

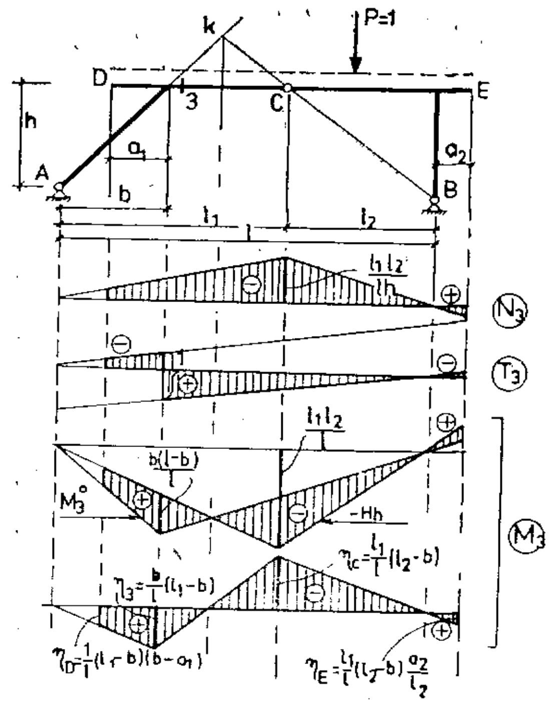


Fig. 6.85.

din condiția de echilibru, reacțiunile din A și B vor trece și ele prin punctul k și, în consecință, valorile pentru T_2 și M_2 sînt nule.

Construcția liniilor de influență pentru eforturile din secțiunea 3 se face pe baza următoarelor expresii (v. fig. 6.83, a)

$$N_3 = -H\ ;\quad T_3 = T_3^0;\quad M_3 = M_3^0 - Hh$$

unde T_3^0 și M_3^0 sînt eforturile din forțele verticale, echivalente cu cele de la grinda dreaptă simplu rezemată în A și B.

În fig. 6.85 sînt reprezentate liniile de influență pentru eforturile din secțiunea 3.

Linia M_3 este dată prin suprapunerea funcțiilor M_3^0 și $-Hh$ și apoi prin raportare la o axă orizontală precizînd ordonatele liniei de influență din ordonatele caracteristice, și anume :

$$\eta_{max}^{+} = \eta_3 = \frac{b(l-b)}{l} - \frac{l_1l_2}{l}\cdot\frac{b}{l_1} = \frac{b}{l}(l-b-l_2) = \frac{b}{l}(l_1-b)$$

$$\eta_{max}^{-} = \eta_C = -\frac{l_1l_2}{l} + \frac{b(l-b)}{l}\cdot\frac{l_1}{l-b} = -\frac{l_1}{l}(l_2-b)$$

$$\eta_D = \eta_3\frac{b-a_1}{b} = \frac{b}{l}(l_1-b)\frac{b-a_1}{b} = \frac{1}{l}(l_1-b)(b-a_1)$$

$$\eta_E = -\eta_C\frac{a_2}{l_2} = \frac{l_1}{l}(l_2-b)\frac{a_2}{l_2}$$

$\eta_k = 0$ din considerentele arătate pentru T_2 și M_2.

6.5.4. TRASAREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ PRIN METODA CINEMATICĂ

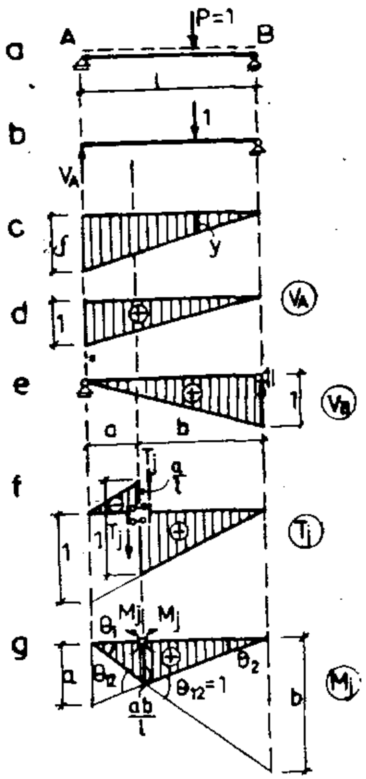


Fig. 6.86.

Metoda cinematică are la bază exprimarea echilibrului cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual pentru cazul particular de încărcare cu o singură forță $P = 1$ a cărei poziție variază de-a lungul liniei de încărcare.

Este necesar ca în prima etapă să se construiască mecanismul cu un grad de libertate, obținut prin suprimarea legăturii pe direcția forței de legătură a cărei linie de influență interesează. Acest mecanism este în echilibru sub acțiunea forței de legătură și a încărcării $P = 1$. Din această condiție se obține linia de influență.

Linii de influență la grinda dreaptă simplu rezemată. Se consideră structura din fig. 6.86, *a*.

Linia V_A. Se suprimă legătura pe direcția reacțiunii V_A și se introduce forța de legătură corespunzătoare. Se obține mecanismul din fig. 6.86, *b* care are un singur grad de libertate, iar din punct de vedere static, este în echilibru. Acestui mecanism i se dă o deplasare compatibilă cu restul legăturilor sale și se construiește epura de deplasări pe direcția forței unitare, adică pe verticală.

Mecanismul acționat de reacțiunea V_A și forța $P = 1$ este în echilibru, deci lucrul mecanic virtual este nul

$$\delta L = 0\,;\quad -V_A\delta + 1\cdot y = 0. \tag{6.14}$$

Deplasarea virtuală s-a dat în sens invers sensului forței de legătură, astfel încît lucrul mecanic produs de aceasta este negativ. Se obține $V_A = y/\delta$, în care δ reprezintă deplasarea pe direcția forței de legătură din reazemul A, iar y este deplasarea pe direcția forței $P = 1$.

Dacă se dă deplasarea $\delta = 1$, atunci $V_A = y$. Deci, epura deplasărilor pe verticală a liniei de încărcare, cu un anumit semn și la o anumită scară, reprezintă tocmai linia de influență (fig. 6.86, *d*).

În concluzie, trasarea liniei de influență a unei mărimi statice prin metoda cinematică necesită parcurgerea următoarelor etape:

1) Suprimarea legăturii pe direcția mărimii statice căutate și introducerea forței de legătură corespunzătoare. Se obține *mecanismul în echilibru*.

2) Se dă mecanismului o deplasare virtuală compatibilă cu restul legăturilor. Se obține *epura deplasărilor*.

3) Epura deplasărilor, cu un anumit semn și la o anumită scară, pe baza condiției de echilibru $\delta L = 0$, reprezintă *linia de influență*.

Dacă deplasarea, în mod convențional, se dă în sens invers mărimii statice, semnul liniei de influență (din analiza ecuației $\delta L = 0$) va fi întotdeauna

același cu semnul lucrului mecanic al forței unitare (plus sub linia de referință și, evident, minus deasupra acesteia).

Scara liniei de influență rezultă din condiția ca ordonatele y ale epurei deplasărilor să aibă aceleași valori cu mărimea statică. Aceasta se realizează dacă deplasarea pe direcția mărimii statice este egală cu unitatea.

Prin suprimarea unei singure legături din structura static determinată, se obține un mecanism cu un grad de libertate, a cărui epură de deplasări este alcătuită din variații liniare. Aceasta înseamnă că liniile de influență în cazul structurilor static determinate sînt diagrame liniare.

Linia V_B (fig. 6.86, *e*). Linia V_B se construiește în mod similar cu cea a liniei V_A.

Linia T_j (fig. 6.86, *f*). După suprimarea legăturii și introducerea forțelor de legătură T_j, se dă deplasarea $\delta = 1$. Cele două fețe ale secțiunii j se vor deplasa pe verticală una față de cealaltă cu cantitatea 1. Această mărime determină scara liniei de influență.

Linia M_j (fig. 6.86, *g*). Pentru obținerea mecanismului se introduce în secțiunea j o articulație, iar ca forță de legătură se consideră aplicată perechea de momente M_j. Deplasarea egală cu unitatea pe direcția mărimii statice este de această dată o rotire relativă $\theta_{12} = 1$ între cele două secțiuni din articulația j, așa cum este arătat în fig. 6.86, *g*. Această scară permite calcularea oricărei ordonate a liniei de influență. Se vede că

$$l\theta_1 = b\theta_{12}\,;\quad \theta_1 = \frac{b}{l}$$

$$l\theta_2 = a\theta_{12}\,;\quad \theta_2 = \frac{a}{l}$$

$$\eta_{max} = a\theta_1 = b\theta_2 = \frac{ab}{l}.$$

Linii de influență la consolă. Se consideră structura din fig. 6.87, *a*.

Linia V_B (fig. 6.87, *b*). Linia de influență are toate ordonatele constante și egale cu 1.

Linia M_B (fig. 6.87, *c*). În secțiunea de încastrare B se introduce o articulație. Rotirea $\theta = 1$ pe direcția forței de legătură M_B produce o diagramă de deplasări de formă triunghiulară prezentînd ordonata maximă în vîrful consolei și avînd mărimea

$$\eta_{max} = \theta l = 1\cdot l = l.$$

Linia T_j (fig. 6.87, *d*). Porțiunea de grindă cuprinsă între secțiunea j și încastrare rămîne fixă. Între secțiunea j și vîrful consolei linia de influență este constantă avînd ordonatele egale cu -1.

Linia M_j (fig. 6.87, *e*). Rotirea relativă a celor două secțiuni din articulația j înseamnă de fapt rotirea absolută a corpului dintre vîrful consolei și articulație cu unghiul $\theta = 1$. Ordonata maximă este în vîrful consolei și are mărimea

$$\eta_{max} = \theta a = a.$$

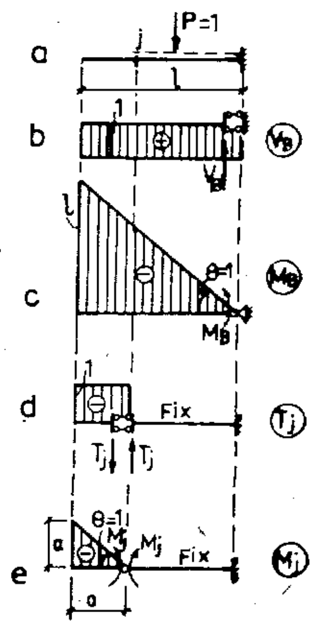


Fig. 6.87.

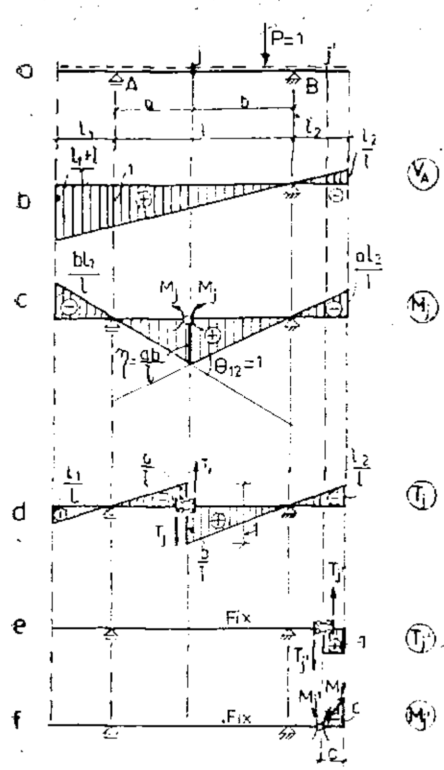


Fig. 6.88.

Linii de influență la grinda cu console (fig. 6.88). Liniile de influență ale reacțiunilor precum și ale eforturilor dintr-o secțiune j dintre reazeme se trasează ca la grinda simplu rezemată. Pentru o secțiune j' de pe console, liniile de influență $T_{j'}$ și $M_{j'}$ se prezintă ca la grinda cu consolă.

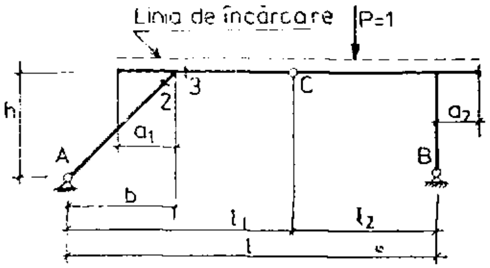


Fig. 6.89.

Linii de influență la cadre static determinate. Construcția liniilor de influență prin metoda cinematică comportă parcurgerea etapelor : mecanism în echilibru, epura deplasărilor, linia de influență, etape ce au fost analizate în detaliu la grinda dreaptă simplu rezemată.

Se va arăta pentru cadrul din fig. 6.89 construcția liniilor de influență pentru reacțiunile V_A, $H_A = H_B = H$ și eforturile N_2, T_2, M_3.

Metodologia de construcție a liniilor de influență va fi detaliată pentru una din mărimile statice (V_A) ; ea va fi aplicată similar pentru celelalte cazuri.

Linia V_A (fig. 6.90). Crearea mecanismului în echilibru este prezentată în fig. 6.90, *a*. S-a obținut un mecanism cu două corpuri (*I, II*). Se trece în continuare la precizarea elementelor de mișcare a mecanismului, respectiv centrele instantanee de rotație. Se cunosc centrul absolut *02*, centrul relativ *12*

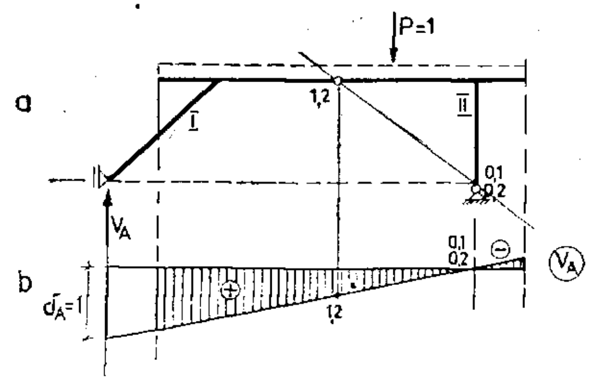


Fig. 6.90.

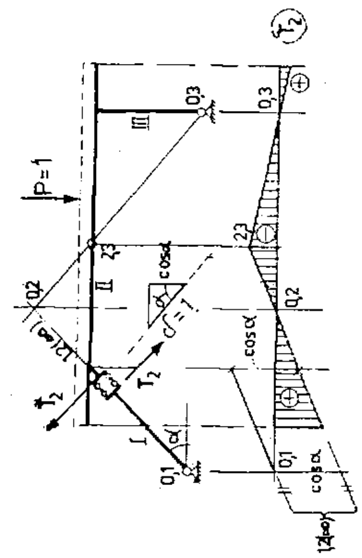


Fig. 6.93.

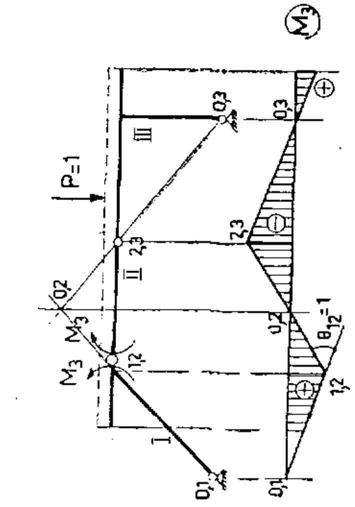


Fig. 6.94.

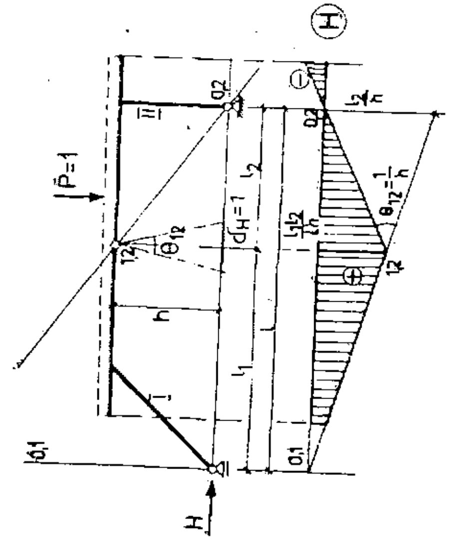


Fig. 6.91.

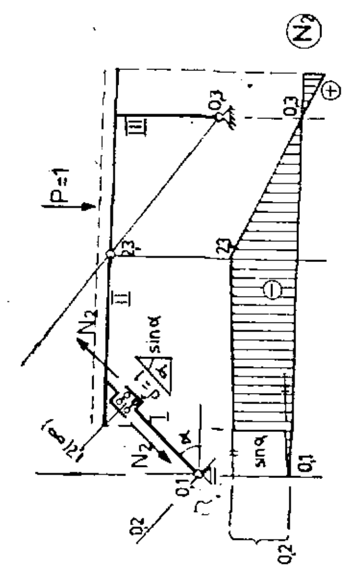


Fig. 6.92.

şi faptul că centrul absolut *01* se află pe normala la reazemul simplu rămas în *A*. În mod practic se va proceda la înscrierea pe schemă a acestor elemente cunoscute din natura şi modul cum sînt amplasate legăturile exterioare şi interioare ale mecanismului. În a doua etapă, se completează celelalte centre de rotaţie prin determinarea lor pe baza teoremelor de coliniaritate a centrelor instantanee. Astfel, centrul *01* se va determina din intersecţia dreptelor *02—12* şi normala la reazemul *A*

$$(01)\left\langle \begin{array}{l} 01-12-02 \\ 01 \text{ pe } \perp \text{ reazem } A. \end{array}\right.$$

Epura deplasărilor pe direcţia încărcării mobile, reprezentată prin încărcarea convenţională unitate $P = 1$, se va construi dînd o deplasare în sens invers sensului mărimii statice V_A. Mecanismul avînd un singur grad de libertate, configuraţia deplasării sale (epura) este determinată de un singur parametru ; acesta poate fi luat arbitrar, dar pentru linii de influenţă se va considera ca fiind deplasarea pe direcţia mărimii statice, deci δ_A. Epura deplasărilor va deveni linie de influenţă, deci se va preciza scara, adică $\delta_A = 1$ şi se vor pune semnele care, conform convenţiei de a da deplasarea în sens invers lui V_A, vor fi plus sub linia de referinţă şi minus deasupra acesteia.

Epura deplasărilor şi respectiv linia de influenţă sînt prezentate în fig. 6.90, *b*. Se observă că linia de influenţă se obţine din deplasata căii pe direcţia forţei $P = 1$, precizînd scara şi semnul.

În fig. 6.91—6.94 se prezintă construcţia liniilor de influenţă pentru H, N_2, T_2 şi M_3 aplicînd metodologia de calcul descrisă mai înainte pentru linia V_A.

6.5.5. UTILIZAREA LINIILOR DE INFLUENŢĂ. EFORTURI MAXIME

Aşa cum s-a arătat, linia de influenţă reprezintă diagrama de variaţie a unei mărimi statice, atunci cînd pe structură circulă o forţă convenţională unitară. Presupunînd cunoscută linia de influenţă, se poate determina mărimea statică respectivă pentru o anumită încărcare cu forţe date.

Se consideră linia de influenţă a mărimii statice E (fig. 6.95). Structura este încărcată cu un sistem de forţe concentrate $P_1, \ldots, P_n$, aflat într-o poziţie dată. Valoarea mărimii statice E produsă de forţele $P_1, \ldots, P_n$ are expresia

$$E = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \ldots + P_i\eta_i + \ldots + P_n\eta_n$$

$$E = \sum P_i\eta_i. \qquad (6.15)$$

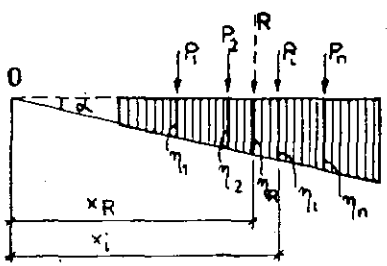


Fig. 6.95.

În cazul unei linii de influenţă cu variaţie liniară, se poate folosi în calcule rezultanta R a grupului de forţe. Într-adevăr, din teorema lui Varignon, aplicată în raport cu punctul O rezultă

$$Rx_R = \sum P_i x_i \quad \text{dar} \quad x_R = \frac{\eta_x}{\operatorname{tg}\alpha}$$

şi

$$x_1 = \frac{\eta_1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad x_2 = \frac{\eta_2}{\operatorname{tg}\alpha}; \ldots; x_i = \frac{\eta_i}{\operatorname{tg}\alpha}; \ldots; x_n = \frac{\eta_n}{\operatorname{tg}\alpha};$$

înlocuind, se obţine

$$\frac{R\eta_R}{\operatorname{tg}\alpha} = \sum P_i \frac{\eta_i}{\operatorname{tg}\alpha} \text{ sau } \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} R\eta_R = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\sum P_i\eta_i.$$

Rezultă $\sum P_i\eta_i = R\eta_R$ adică $E = R\eta_R$. (6.16)

Dacă linia de influenţă are un contur poligonal, atunci se vor folosi rezultantele parţiale ale grupurilor de forţe de pe fiecare variaţie liniară în parte (fig. 6.96). Notînd cu R_1 rezultanta forţelor P_1, P_2, P_3, cu R_2 rezultanta forţelor P_4, P_5, P_6, P_7 şi cu η_{R1}, η_{R2} ordonatele liniei de influenţă din dreptul rezultantelor, atunci $E = R_1\eta_{R1} + R_2\eta_{R2}$.

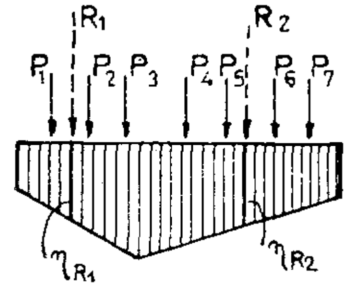


Fig. 6.96.

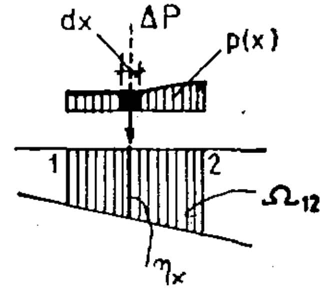


Fig. 6.97.

Pentru încărcări distribuite $p(x)$ se consideră forţele elementare $\Delta P = p(x)\mathrm{d}x$ (fig. 6.97).

Rezultă : $$E = \int_1^2 [p(x)\mathrm{d}x]\eta_x = \int_1^2 p(x)\eta_x\mathrm{d}x. \qquad (6.17)$$

Dacă încărcarea este uniform distribuită, deci $p(x) = p = \text{const}$ (caz frecvent)

$$E = p\int_1^2 \eta_x\mathrm{d}x \qquad (6.18)$$

dar $\int_1^2 \eta_x\mathrm{d}x$ reprezintă aria liniei de influenţă pe lungimea încărcării. Deci

$$E = p\Omega_{12}. \qquad (6.19)$$

Rezultă că mărimea statică E se obţine prin multiplicarea intensităţii încărcării cu aria liniei de influenţă corespunzătoare.

Este de observat că nu s-a făcut nici o ipoteză asupra formei liniei de influenţă, deci relaţia este valabilă pentru orice variaţie a *liniei de influenţă*.

Dacă linia de influenţă are contur poligonal, atunci, ca şi la forţele concentrate, se pot folosi rezultantele parţiale de pe fiecare variaţie liniară, indiferent de modul de distribuţie a încărcării $p(x)$ (fig. 6.98)

$$E = R_{12}\eta_{12} + R_{23}\eta_{23} \qquad (6.20)$$

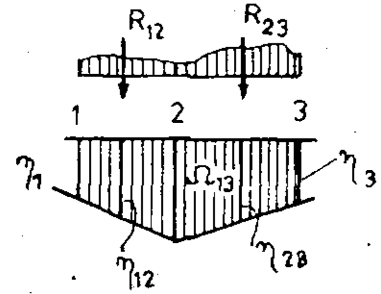


Fig. 6.98.

în care R_{12} reprezintă rezultanta încărcării distribuite între secțiunile 1 și 2, iar R_{23} rezultanta încărcării dintre secțiunile 2 și 3. Cînd $p(x) = p = \text{const}$, rezultă $E = p\Omega_{13}$.

Eforturi maxime. Cu ajutorul liniilor de influență se pot determina efectele cele mai defavorabile pe care un convoi de încărcări mobile le produce într-o secțiune a structurii.

Aspectul liniei de influență permite să se aprecieze care este poziția cea mai dezavantajoasă a convoiului iar apoi să se calculeze efortul maxim. În cazul unei linii de influență de formă oarecare, determinarea unui efort maxim necesită mai multe încercări.

Se consideră o linie de influență cu contur poligonal, care se încarcă cu un convoi de forțe mobile (fig. 6.99).

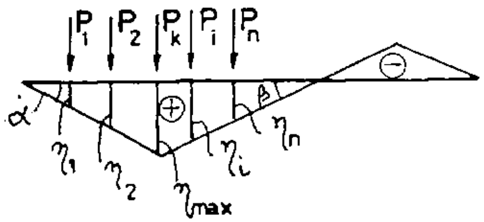


Fig. 6.99.

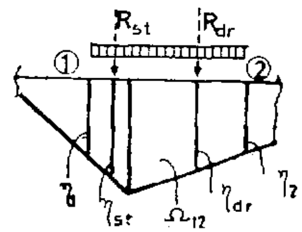


Fig. 6.100.

Pentru obținerea efortului maxim pozitiv va trebui să se încarce numai zona pozitivă a liniei de influență

$$E_{max} = (\Sigma P_i \eta_i)_{max}.$$

Pentru reducerea numărului de încercări sînt de observat următoarele:

— în dreptul vîrfului liniei de influență (η_{max}) trebuie să calce în mod obligatoriu o forță, și anume una dintre cele mai mari forțe din mijlocul convoiului;

— dacă $\alpha > \beta$, este necesar să se amplaseze convoiul astfel încît să cuprindă mai multe forțe pe zona liniei de influență ce descrește mai lent, adică la dreapta forței P_k.

Din cîteva încercări se poate stabili care este poziția convoiului pentru efortul maxim, precum și valoarea acestuia.

În mod asemănător se determină efortul maxim negativ, încărcînd de această dată zona negativă a liniei de influență.

Pentru o încărcare uniform distribuită s-a arătat că

$$E = p\Omega_{12} \quad \text{deci} \quad E_{max} = (p\Omega_{12})_{max} = p(\Omega_{12})_{max}.$$

Se poate arăta că aria este maximă atunci cînd ordonatele liniei de influență de la capetele încărcării distribuite sînt egale, adică $\eta_1 = \eta_2$ (fig. 6.100). Pentru această poziție a convoiului poate fi calculat efortul maxim și în funcție de rezultantele forței distribuite

$$E_{max} = R_{st}\eta_{st} + R_{dr}\eta_{dr}.$$

Aplicația 6.8. Să se determine momentul maxim în secțiunea j a grinzii simplu rezemate din fig. 6.101. Se vor considera două tipuri de convoaie (I, II).

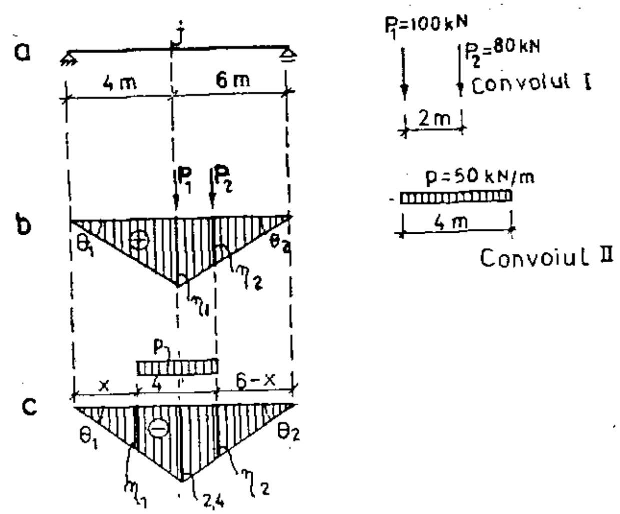


Fig. 6.101.

Linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea j are forma din fig. 6.101, b

$$\eta_{max} = \eta_1 = \frac{4\cdot 6}{10} = 2{,}4$$

$$\theta_1 = \frac{6}{10} = 0{,}6\ ; \quad \theta_2 = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Convoiul I (fig. 6.101, *b*). Forța cea mai mare $P_1 = 100$ kN se amplasează în dreptul ordonatei maxime. Deoarece $\theta_2 < \theta_1$, forța P_2 trebuie să se găsească pe zona liniei de influență cu înclinare mai mică, deci la dreapta forței P_1

$$M^{I}_{j\,max} = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 = 100\cdot 2{,}4 + 80\cdot 1{,}6 = 368 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Convoiul II (fig. 6.101, *c*). Poziția convoiului trebuie astfel aleasă încît $\eta_1 = \eta_2$

$$\eta_1 = x\theta_1 = 0{,}6x$$

$$\eta_2 = (6 - x)0{,}4 = 2{,}4 - 0{,}4x\ ;$$

egalînd

$$0{,}6x = 2{,}4 - 0{,}4x$$

se obține

$$x = 2{,}4 \text{ m} \quad \text{și} \quad \eta_1 = \eta_2 = 1{,}44$$

$$\Omega_{max} = \Omega_{12} = 1{,}44\cdot 4 + \frac{1}{2}(2{,}40 - 1{,}44)\cdot 4 = 7{,}68$$

$$M^{II}_{j\,max} = p\Omega_{12} = 50\cdot 7{,}68 = 384 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

6.5.6. MOMENT MAXIM ABSOLUT (MAXIMUM MAXIMORUM)

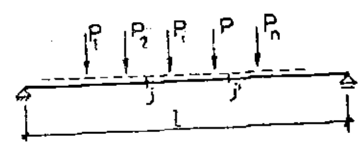


Fig. 6.102.

Se consideră o grindă simplu rezemată parcursă de un convoi de forțe concentrate $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ (fig. 6.102). Pentru deter-

minarea momentului încovoietor $M_{j\ max}$ se construiește linia de influență M_j și se amplasează convoiul în poziția de maxim.

Pentru altă secțiune j' a grinzii se procedează în mod similar; construind linia $M_{j'}$, și încărcînd-o corespunzător cu convoiul de forțe se obține $M_{j'\ max}$.

Dacă se presupune că se determină momentele încovoietoare maxime din toate secțiunile grinzii produse de convoiul de forțe considerat, este evident că una dintre valorile momentelor maxime este cea mai mare. Acest moment se numește moment maximum maximorum și se notează $M_{max\ max}$.

Procedeul general pentru determinarea momentului $M_{max\ max}$, aplicabil oricărei structuri, este cel arătat mai înainte: se determină liniile de influență ale momentului încovoietor într-un număr suficient de secțiuni ale structurii, linii care încărcate fiecare în mod corespunzător cu convoiul de forțe conduc la calcularea momentelor maxime. Cel mai mare dintre acestea este $M_{max\ max}$.

Pentru grinda simplu rezemată parcursă de un convoi de forțe concentrate, se poate calcula $M_{max\ max}$ fără construcția liniilor de influență.

Problema determinării momentului $M_{max\ max}$ presupune două necunoscute:

— secțiunea grinzii în care apare $M_{max\ max}$;
— poziția convoiului pentru obținerea lui $M_{max\ max}$.

Grinda din fig. 6.103, *a* este parcursă de un convoi de forțe $P_1 \dots P_n$. Se presupune cunoscută poziția convoiului pentru care se obține $M_{max\ max}$ și se consideră că acesta se produce în secțiunea k, situată sub forța P_k. Această poziție a convoiului este stabilită prin distanța x_k măsurată de la reazemul A, distanță ce trebuie determinată.

Momentul încovoietor din secțiunea k are valoarea

$$M_k = V_A x_k - M_{st(k)};$$

$M_{st(k)}$ reprezintă momentul în raport cu secțiunea k al tuturor forțelor din convoi situate la stînga forței P_k. Această valoare este constantă deoarece distanțele dintre forțele convoiului sînt invariabile.

Din ecuația de momente în raport cu punctul B se obține

$$V_A = \frac{R}{l}(l - x_k - c)$$

deci

$$M_k = \frac{R}{l}(l - x_k + c)x_k - M_{st(k)}.$$

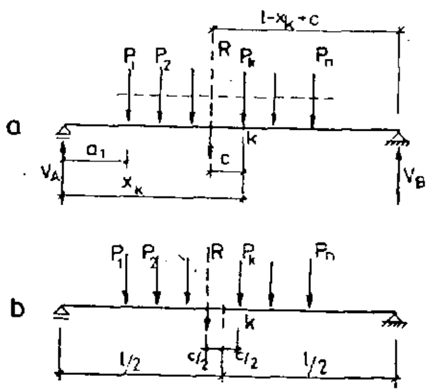


Fig. 6.103.

Condiția de $M_{k\ max}$ este

$$\frac{dM_k}{dx_k} = \frac{R}{l}(l - 2x_k + c) = 0$$

sau

$$l - 2x_k + c = 0; \quad x_k = \frac{l + c}{2}. \qquad (6.21)$$

În concluzie, dacă se presupune că $M_{max\ max}$ se produce sub forța P_k din convoi, trebuie așezat convoiul astfel încît *mijlocul grinzii să împartă în părți egale distanța dintre rezultanta convoiului de forțe și forța* P_k.

În acest fel s-a stabilit poziția convoiului în ipoteza că forța P_k, sub care se produce $M_{max\ max}$, este cunoscută. În realitate, forța P_k nu este inițial cunoscută, de aceea trebuie apreciată inițial care este această forță. Pe baza celor discutate la determinarea momentului maxim dintr-o secțiune, rezultă că forța P_k trebuie să fie una din forțele cele mai mari din vecinătatea rezultantei. De aceea, se va încerca pe rînd cu fiecare din cele două forțe din vecinătatea rezultantei. În situația că forța cea mai apropiată de rezultantă este cea mai mare, atunci sub aceasta se produce sigur $M_{max\ max}$.

După stabilirea forței P_k și a poziției convoiului, se calculează $M_{max\ max}$ ca moment încovoietor în secțiunea k

$$M_{max\ max} = \frac{R}{l}(l - x_k + c)x_k - M_{st(k)} =$$

$$= \frac{R}{l}\left(l - \frac{l}{2} - \frac{c}{2} + c\right)\left(\frac{l}{2} + \frac{c}{2}\right) - M_{st(k)} =$$

$$= \frac{R}{l}\left(\frac{l}{2} + \frac{c}{2}\right)^2 - M_{st(k)}.$$

Deoarece rezultanta poate fi la stînga sau la dreapta forței P_k, atunci formula devine

$$M_{max\ max} = \frac{R}{4l}(l \pm c)^2 - M_{st(k)}. \qquad (6.22)$$

Semnul plus se ia atunci cînd rezultanta R este la stînga forței P_k (fig. 6.103, *b*), iar semnul minus, atunci cînd R este la dreapta forței P_k.

Aplicația 6.9. Să se afle $M_{max\ max}$ produs de convoiul din fig. 6.104, la o grindă simplu rezemată de 10 m deschidere.

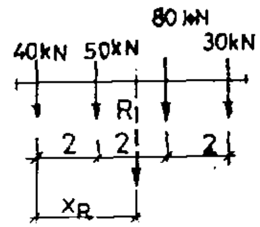


Fig. 6.104.

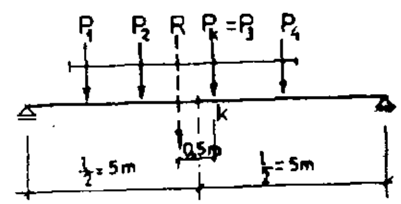


Fig. 6.105.

Fie R rezultanta sistemului de forțe și x_R distanța acesteia față de suportul forței P_1. Se obține

$$R = 40 + 50 + 80 + 30 = 200 \text{ kN}$$

$$x_R = \frac{50 \cdot 2 + 80 \cdot 4 + 30 \cdot 6}{200} = 3 \text{ m}.$$

Rezultanta se găsește între forțele P_2 și P_3, la distanțe egale de acestea. $M_{max\ max}$ se produce sub cea mai mare forță dintre acestea, adică sub P_3. Poziția convoiului este cea din fig. 6.105

$$x_k = \frac{l}{2} + \frac{c}{2} = \frac{10}{2} + \frac{1}{2} = 5{,}5 \text{ m}$$

$$M_{max\ max} = M_k = \frac{R}{4l}(l + c)^2 - M_{st(k)} =$$

$$= \frac{200}{4 \cdot 10}(10 + 1)^2 - (40 \cdot 4 + 50 \cdot 2) = 345 \text{ kN·m}.$$

Determinarea acoperitoare a momentului maxim într-o secțiune a grinzii simplu rezemate. Pentru dimensionarea economică a unei grinzi simplu rezemate, supusă acțiunii unui convoi de forțe concentrate, este necesar a se determina momentul maxim într-un număr suficient de secțiuni, ceea ce este destul de laborios. Pentru simplificarea calculelor, în special la poduri, se permite determinarea acoperitoare a momentului maxim într-o secțiune, în funcție de momentul maximum maximorum. În mod acoperitor, se poate considera că variația momentelor maxime este dată de două arce de parabolă racordate între ele la mijlocul grinzii cu o dreaptă de lungime 0,12 l (l fiind deschiderea grinzii). Ordonata maximă are valoarea momentului maximum maximorum (fig. 6.106). Expresia momentului maxim în secțiunea situată la distanța x de reazem este

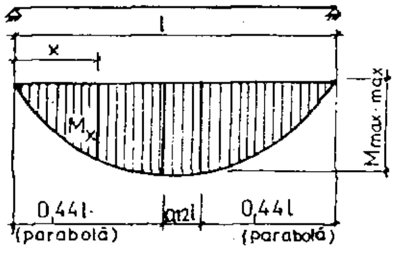


Fig. 6.106.

$$M_x = \frac{1}{0{,}1936}\left(0{,}88\,\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l}\right) M_{max\ max}$$

sau

$$M_x = \nu M_{max\ max}.$$

Coeficientul ν este dat în tabelul 6.1 în funcție de raportul $\xi = \frac{x}{l}$ care precizează poziția secțiunii în care interesează momentul maxim.

Tabelul 6.1

Coeficientul ν

$\xi = \frac{x}{l}$	ν	$\xi = \frac{x}{l}$	ν	$\xi = \frac{x}{l}$	ν	$\xi = \frac{x}{l}$	ν
0,05	0,214	0,30	0,899	0,55	1,000	0,80	0,703
0,10	0,403	0,35	0,958	0,60	0,992	0,85	0,566
0,15	0,566	0,40	0,952	0,65	0,958	0,90	0,403
0,20	0,703	0,45	1,000	0,70	0,899	0,95	0,214
0,25	0,813	0,50	1,000	0,75	0,813	1,00	0,000

La o grindă simplu rezemată, pentru un anumit tip de convoi, se calculează momentul maximum maximorum, iar momentele maxime se obțin prin multiplicarea momentului $M_{max\ max}$ cu coeficientul corespunzător fiecărei secțiuni.

Aplicația 6.10. Să se determine valorile maxime ale eforturilor M_k și T_j din convoiul dat (fig. 6.107).

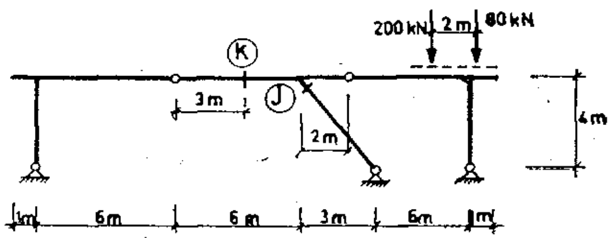


Fig. 6.107.

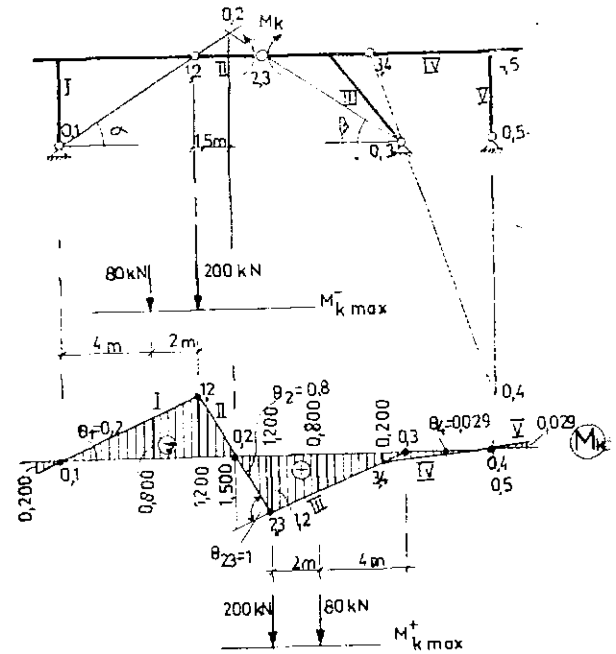


Fig. 6.108.

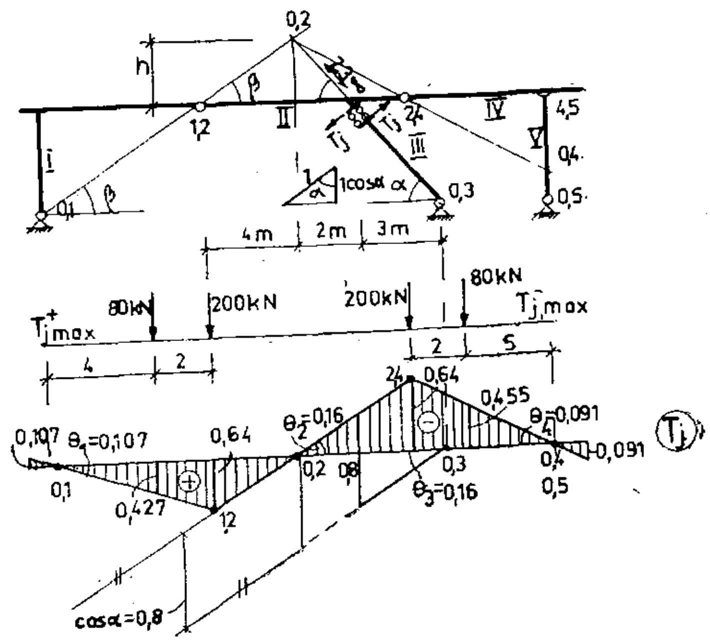


Fig. 6.109.

Se va utiliza metoda cinematică care conduce la aflarea directă şi independentă a liniei de influenţă pentru oricare dintre eforturi.

Pentru M_k construcţia liniei de influenţă, valorile ordonatelor şi poziţiile de maxim ale convoiului sînt date în fig. 6.108. Rezultă

$$M^{+}_{k\ max} = 200\cdot1,20 + 80\cdot0,800 = 304\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M^{-}_{k,\ max} = 200(-1,200) + 80(-0,800) = -304\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

Pentru forţa tăietoare T_j construcţia liniei de influenţă, valorile ordonatelor şi poziţiile de maxim ale convoiului sînt date în fig. 6.109. Rezultă

$$T^{+}_{j\ max} = 200\cdot0,640 + 80\cdot0,427 = 162,16\ \text{kN}$$

$$T^{-}_{j\ max} = 200(-0,640) + 80(-0,455) = -164,4\ \text{kN}.$$

7. Structuri particulare static determinate

7.1. GRINZI CU CONSOLE ŞI ARTICULAŢII

Grinzile cu console şi articulaţii sînt sisteme de grinzi drepte legate între ele. În fig. 7.1 sînt arătate 3 scheme pentru asemenea structuri tip grinzi cu console şi articulaţii.

7.1.1. CRITERII DE INVARIABILITATE GEOMETRICĂ ŞI DETERMINARE STATICĂ. SISTEM PURTAT ŞI SISTEM PURTĂTOR

O grindă rezemată continuu pe n reazeme, dintre care un reazem articulat şi $n-1$ reazeme simple, va prezenta $n+1$ necunoscute.

Pentru ca sistemul să fie static determinat este deci necesar să se suprime $n-2$ legături interioare, lucru ce se realizează prin introducerea a $n-2$ articulaţii interioare. Se observă că numărul de articulaţii coincide cu numărul reazemelor intermediare ale grinzii, atunci cînd nu există încastrări (fig. 7.1, *a*, *b*). În cazul în care există o încastrare, numărul articulaţiilor introduse este egal cu numărul celorlalte reazeme, exclusiv încastrarea (fig. 7.1, *c*).

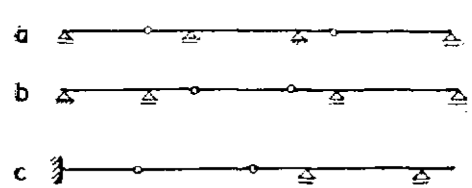


Fig. 7.1.

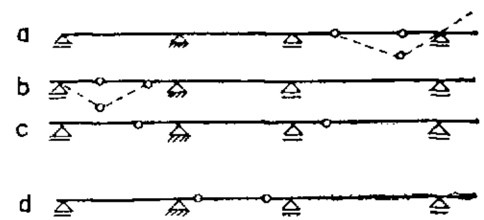


Fig. 7.2.

Este de reţinut faptul că fixarea la deplasări în lungul axei structurii se poate realiza fie cu un reazem articulat la teren fie cu o încastrare.

Pentru ca sistemul să fie strict invariabil geometric, este necesar ca poziţia articulaţiilor să fie judicios aleasă. Astfel, este posibil ca pe ansamblu sistemul să îndeplinească condiţia cantitativă de invariabilitate geometrică, dar anumite porţiuni să fie mecanisme, iar celelalte să rămînă static nedeterminate. Acest lucru este ilustrat în fig. 7.2, *a*, *b*. Toate grinzile din fig. 7.2 au cîte două

articulații, ceea ce le asigură satisfacerea condiției cantitative de determinare statică și invariabilitate geometrică.

Analizate pe zone, se observă că sistemele din fig. 7.2, *a*, *b* nu sînt strict geometric invariabile deoarece prezintă părți ce sînt mecanisme (cu linie întreruptă sînt reprezentate posibilitățile de deplasare), restul structurilor fiind static nedeterminate. Grinzile din fig. 7.2, *c*, *d* sînt corect alcătuite, articulațiile avînd o poziție corespunzătoare pentru ca structurile să fie efectiv geometric invariabile.

Ca regulă generală privind poziția articulațiilor, este de observat că în cazul în care grinda nu prezintă încastrări, în deschiderile marginale poate fi introdusă cel mult o articulație, iar în celelalte deschideri cel mult două articulații. În cazul existenței unei încastrări la una din extremități, în deschiderea marginală respectivă se pot introduce două articulații (fig. 7.3).

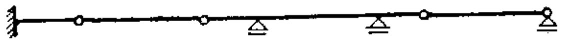


Fig. 7.3.

Datorită particularităților de rezemare, diferitele părți de structură au roluri diferite în ceea ce privește preluarea încărcărilor care le acționează. Sistemele cu invariabilitate geometrică proprie preiau singure toate încărcările care le acționează direct. Aceste sisteme se numesc sisteme *purtătoare* sau sisteme *principale*. Încărcările aplicate unui sistem purtător nu au nici un efect asupra restului structurii, ele sînt preluate de acest sistem și apoi transmise terenului de fundare. Celelalte părți din structură care au asigurată invariabilitatea numai datorită legăturilor pe care le au cu sistemele purtătoare se numesc sisteme *purtate*. Aceste sisteme transmit încărcările lor sistemelor purtătoare pe care reazemă și ca atare, încărcările lor proprii produc eforturi și în sistemele principale.

În cazul grinzilor cu console și articulații, grinzile purtate se numesc grinzi independente (grinzile *3—4* și *7—8* din fig. 7.4, *a*) iar celelalte grinzi se numesc dependente. Sistemul de grinzi cu console și articulații, la care grinzile independente alternează cu cele dependente, este cunoscut și sub numele de sistem *alternant* sau sistem Gerber (fig. 7.4, *a*), iar celelalte sisteme, cu o singură grindă dependentă, reprezintă un sistem purtător *în serie* sau sistem Cantilever (fig. 7.4, *b*).

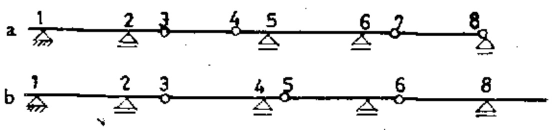


Fig. 7.4.

7.1.2. DETERMINAREA REACȚIUNILOR ȘI A FORȚELOR DE LEGĂTURĂ

Calculul reacțiunilor și al forțelor de legătură din articulații se face izolînd corpurile și introducînd forțele de legătură corespunzătoare în locul legăturilor suprimate. Se exprimă mai întîi echilibrul grinzilor independente pentru determinarea necunoscutelor acestor corpuri, trecîndu-se apoi la echilibrul grinzilor dependente.

Sistemul alternant (fig. 7.5). Pentru forțe verticale, grinzile *1—3* și *4—7* sînt dependente iar grinzile *3—4* și *7—8* sînt independente. S-au izolat corpurile și s-au introdus în locul articulațiilor forțele de legătură iar reazemele au fost înlocuite prin reacțiunile corespunzătoare. Pentru fiecare corp se pot scrie trei ecuații de echilibru. Grinda *7—8* prezintă numai trei forțe necunoscute (H_7, V_7, V_8); acestea pot fi determinate din ecuațiile de echilibru ale acestui corp.

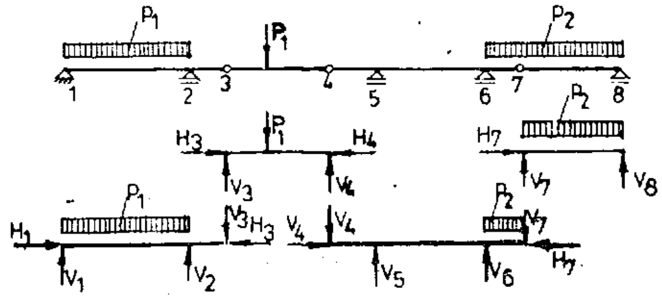


Fig. 7.5.

Ecuațiile de proiecție pe orizontală conduc la stabilirea succesivă a valorilor necunoscutelor H_4, H_3, H_1.

În această situație, pentru fiecare corp se mai pot scrie numai cîte două ecuații de echilibru. Se calculează reacțiunile V_3, V_4 ale grinzii independente *3—4*, care se aplică ca încărcări asupra grinzilor dependente *1—3*, respectiv *4—7*. Se poate trece apoi la scrierea ecuațiilor de echilibru pentru grinzile *1—3* și *4—7* determinîndu-se necunoscutele V_1, V_2 și V_5, V_6.

Sistemul în serie (fig. 7.6). Determinarea necunoscutelor se face succesiv începînd cu exprimarea echilibrului grinzii *6—7*, apoi pe rînd la celelalte grinzi în ordinea *4—6*, *2—4* și *1—2*. Grinda încastrată *1—2* reprezintă sistemul purtător al întregii structuri. O altă grindă din sistem, de exemplu *4—6*, constituie sistemul purtător al grinzii *6—8* (care se găsește la dreapta ei) fiind sistem purtat în raport cu grinzile *2—4* și *1—2*.

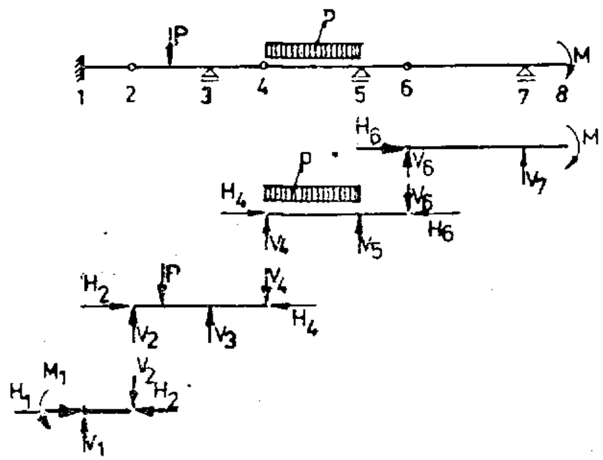


Fig. 7.6.

După determinarea reacțiunilor, trasarea diagramelor de eforturi se face ca la grinzile drepte. În fig. 7.7 este arătat un exemplu. În dreptul unei articulații, diagrama T nu prezintă salturi; ea se închide cu forța de legătură de pe grinda din stînga și se deschide, în aceeași secțiuni cu aceeași forță de legătură, dar care acționează pe corpul din dreapta. În cazul că în articulație acționează o forță concentrată P, diagrama T va avea un salt de valoare P. Diagrama de momente se va anula în dreptul articulațiilor, iar momentele maxime se vor înregistra în secțiunile în care forța tăietoare este nulă sau schimbă de semn. Valorile forței tăietoare și momentele încovoietoare în diverse secțiuni se calculează după regulile cunoscute.

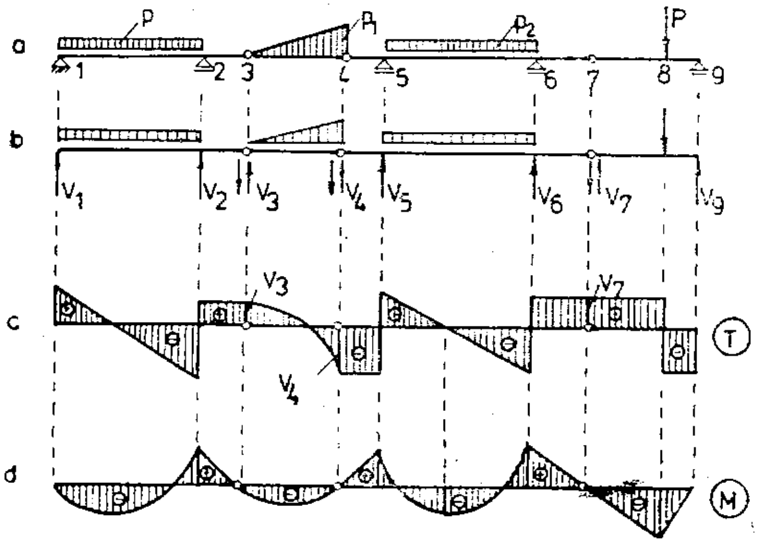


Fig. 7.7.

Aplicația 7.1. Se cer diagramele T și M la grinda cu console și articulații din fig. 7.8, *a*. În fig. 7.8, *b* sînt reprezentate forțele de legătură după izolarea corpurilor.

Grinzile *1—2* și *5—6* sînt grinzi independente.

Grinda 1—2. Din ecuația de proiecție pe orizontală se obține $H_2 = 0$ iar din ecuațiile de momente în raport cu punctul *1*, respectiv *2*, rezultă

$$V_2 = \frac{24 \cdot 2}{4} = 12 \text{ kN}; \quad V_1 = \frac{24 \cdot 6}{4} = 36 \text{ kN}.$$

Grinda 5—6. Se scriu ecuații de momente față de capete

$$V_5 = \frac{57 \cdot 4 + 30 \cdot 2}{6} = 48 \text{ kN}; \quad V_6 = \frac{57 \cdot 2 + 30 \cdot 4}{6} = 39 \text{ kN}.$$

Ecuația de proiecție pe orizontală, scrisă pentru fiecare din grinzile *6—8*, *5—6* și *2—5* conduce la $H_6 = H_5 = H_4 = 0$.

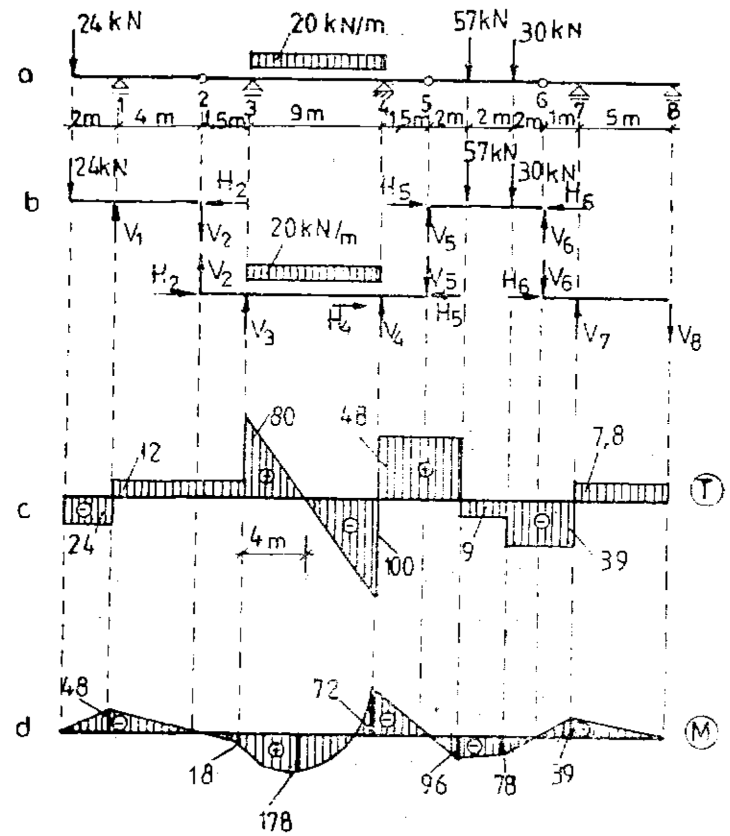


Fig. 7.8.

Se pot determina acum reacțiunile verticale ale grinzilor purtătoare *6—8* și *2—5*, din ecuații de momente față de reazeme

$$V_4 = \frac{20 \cdot 9 \cdot 4,5 + 48 \cdot 10,5 + 12 \cdot 1,5}{9} = 148 \text{ kN}$$

$$V_3 = \frac{20 \cdot 9 \cdot 4,5 - 12 \cdot 10,5 - 48 \cdot 1,5}{9} = 68 \text{ kN}$$

$$V_7 = \frac{39 \cdot 6}{5} = 46,8 \text{ kN}; \quad V_8 = \frac{39 \cdot 1}{5} = 7,8 \text{ kN}.$$

Verificarea calculului reacțiunilor verticale se poate face prin scrierea ecuației de proiecție pe verticală pentru întreaga grindă, considerînd legăturile din articulații solidificate

$$\Sigma Y_i = -24 - 20 \cdot 9 - 57 - 30 + V_1 + V_3 + V_4 + V_7 - V_8$$

sau

$$\Sigma Y_i = -291 + 36 + 68 + 148 + 468 - 78 = 0.$$

Diagramele T și M se construiesc ca la o grindă dreaptă folosind relațiile de recurență și relațiile diferențiale.

7.1.4. LINII DE INFLUENȚĂ LA GRINZI CU CONSOLE ȘI ARTICULAȚII

La *grinzile cu console și articulații* construcția liniilor de influență pe cale analitică este mai laborioasă. În cele ce urmează se folosește metoda cinematică, principiul general de trasare fiind același ca la grinzile drepte (fig. 7.9).

Trebuie observat că linia de influență este dată de epura deplasării pe verticală a liniei de încărcare.

În cazul transmiterii indirecte, linia de încărcare este constituită din lonjeroni rezemați pe antretoaze, acestea la rîndul lor fiind așezate pe grinzile principale; pentru linia de influență interesează deci epura de deplasări a lonjeronilor.

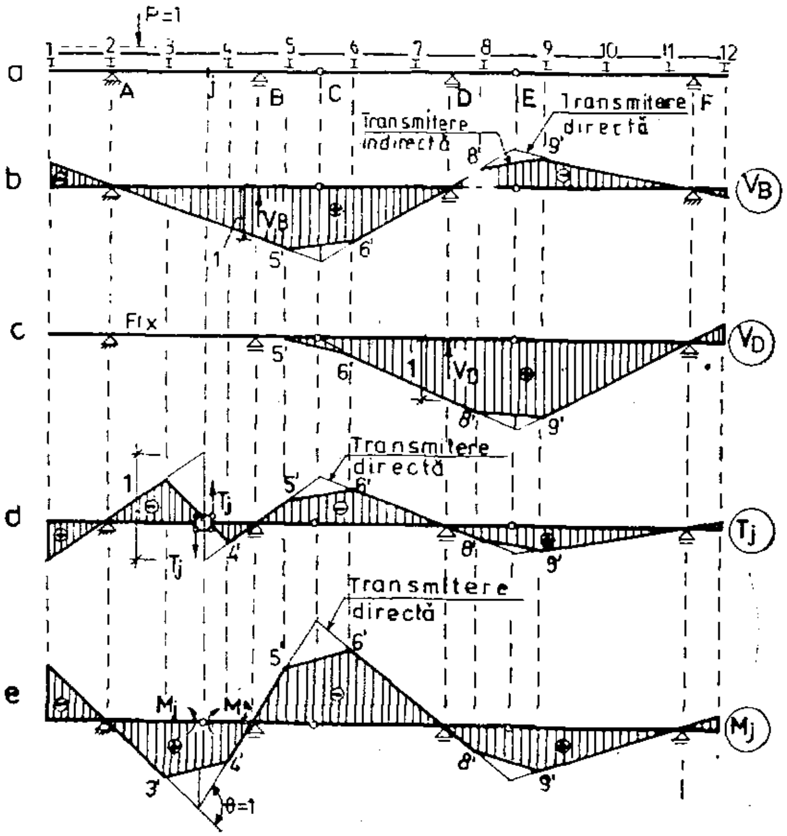


Fig. 7.9.

Astfel, în cazul liniei V_B (fig. 7.9, *b*), lonjeronul *5—6* are un reazem pe grinda *ABC*, iar celălalt reazem pe grinda *CDE*.

În epura de deplasări pe verticală, sînt cunoscute două puncte (*5'* și *6'*) ale acestuia, prin unirea lor stabilindu-se epura de deplasări pe verticală a lonjeronului, adică linia de influență. Aceeași corecție trebuie făcută și pentru lonjeronul *8—9*.

În fig. 7.9, *c*, *d*, *e* sînt arătate liniile de influență ale reacțiunii V_D și ale eforturilor T_j și M_j pentru ambele cazuri de transmitere a încărcărilor.

Deosebirile dintre cele două situații de transmitere a încărcărilor se constată numai pe lungimile lonjeronilor care reazemă pe corpuri diferite. Este cazul lonjeronilor *5'—6'* și *8'—9'* (linia V_D), *3'—4'*, *5'—6'*, *8'—9'* (liniile T_j și M_j).

Scara fiecărei linii de influență se stabilește, după cum se știe, pornind de la deplasarea impusă, deplasare ce se dă pe direcția forței de legătură și are mărimea 1.

7.2. GRINZI CU ZĂBRELE

7.2.1. DEFINIȚIE. IPOTEZE DE CALCUL

Grinzile cu zăbrele sînt sisteme alcătuite din bare drepte, articulate perfect între ele în punctele de intersecție și asupra cărora acționează încărcări aplicate numai în noduri (fig. 7.10). Articulațiile în care se întîlnesc barele se numesc noduri.

Ipotezele admise la calculul grinzilor cu zăbrele sînt:

— barele au axa dreaptă și sînt centrate în noduri;
— la noduri se consideră articulații perfecte (fără frecări);
— forțele se aplică numai la nodurile structurii.

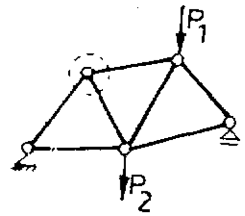


Fig. 7.10.

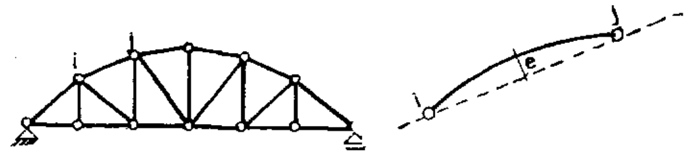


Fig. 7.11.

În realitate, aceste ipoteze sînt numai parțial realizate. De exemplu, bara *i — j* din fig. 7.11 are formă curbă, astfel că prima ipoteză nu este îndeplinită cu strictețe. De asemenea, realizarea constructivă a nodurilor face imposibilă crearea unor articulații care să funcționeze perfect, în sensul de a permite rotirea relativă a barelor din nod.

Un exemplu de alcătuire a unui nod este arătat în fig. 7.12. Barele care se intersectează în nodul *i* sînt formate din corniere. Prinderea acestora se realizează cu nituri prin intermediul unei piese numită guseu, ceea ce conferă nodului o anumită rigiditate.

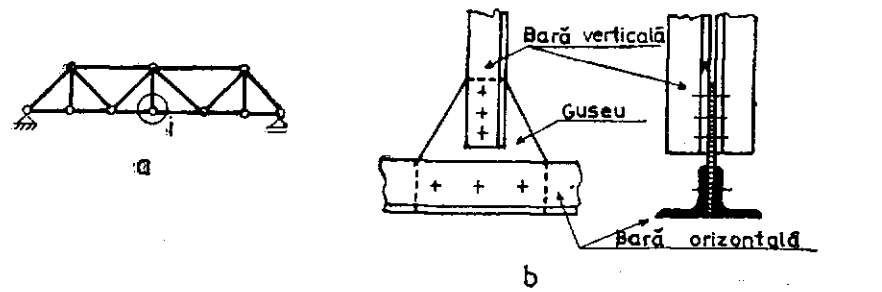


Fig. 7.12.

Ipoteza încărcărilor aplicate numai la noduri se realizează în bună măsură. Fiind elemente principale de susținere, transmiterea forțelor la grinzile cu zăbrele se face indirect, prin intermediul unor elemente secundare care vor rezema numai la noduri.

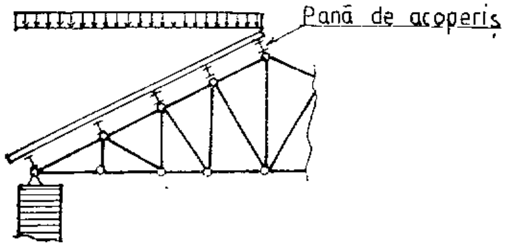


Fig. 7.13.

La o fermă de acoperiș (fig. 7.13), elementele transversale se numesc pane și sînt amplasate numai la nodurile grinzii cu zăbrele. În mod similar se transmit forțele la grinzile cu zăbrele ale unui pod de cale ferată (fig. 7.14). Aici, prin rețeaua de elemente secundare (lonjeroni și antretoaze), încărcările se transmit la noduri.

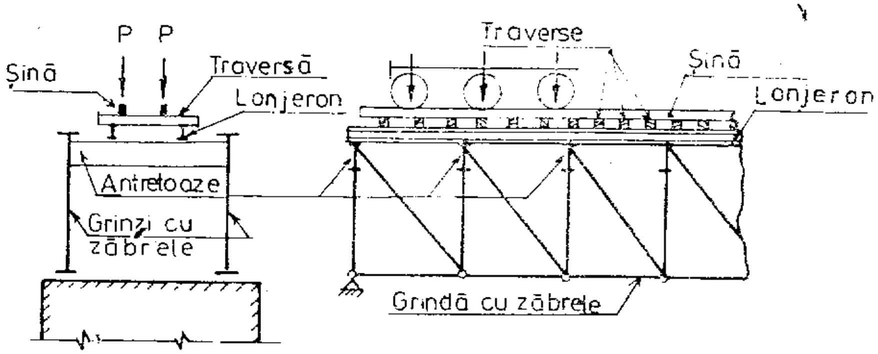


Fig. 7.14.

Există și încărcări de mai mică importanță care sînt însă aplicate pe lungimea barei, cum ar fi de exemplu greutatea proprie a barelor, presiunea vîntului și altele.

Diferența dintre comportarea reală a construcției și cea rezultată din admiterea ipotezelor simplificatoare este în general neglijabilă. Eforturile din bare, determinate pe baza ipotezelor de calcul date mai înainte se numesc eforturi principale. În cazul unui calcul exact sau atunci cînd nu mai apar ca justificate simplificările amintite (în special în ceea ce privește ipoteza articulațiilor perfecte), trebuie determinate și eforturile secundare, datorate în principal rigidității nodurilor.

Fie o bară oarecare $i - j$ dintr-o grindă cu zăbrele (fig. 7.15, *a*). Încărcările fiind aplicate numai la noduri, rezultă că bara $i - j$ nu este încărcată în lungul ei. În locul articulațiilor din i și j se introduc forțele de legătură R_i și R_j

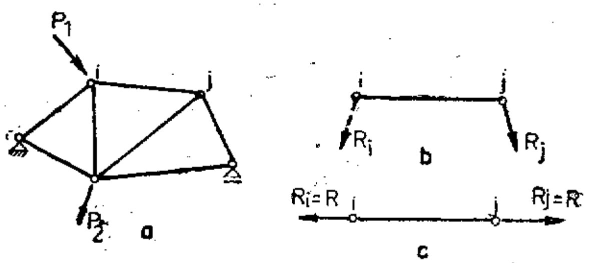


Fig. 7.15.

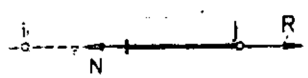


Fig. 7.16.

de mărime și direcție necunoscute, suportul lor trecînd prin punctul i, respectiv j (fig. 7.15, *b*). Bara $i - j$ a fost izolată dintr-un sistem în echilibru, deci și ea trebuie să fie în echilibru. Singurele forțe care sînt aplicate barei sînt R_i și R_j. Condiția de echilibru, exprimată vectorial, este $R_i + R_j = 0$. Aceasta înseamnă că forțele R_i și R_j trebuie să aibă același suport, aceeași mărime și să fie de sensuri contrare. Trebuind să treacă prin punctele i, respectiv j, rezultă că suportul forțelor R_i și R_j este chiar bara $i - j$ (fig. 7.15, *c*).

Pentru determinarea eforturilor într-o secțiune oarecare a barei se reduc forțele de la stînga secțiunii. Singura forță de la stînga este forța $R_i = R$ avînd ca suport axa barei $i - j$. Aceasta înseamnă că în orice secțiune $N = R$, $T = 0$ și $M = 0$ (fig. 7.16).

În concluzie, dacă se admit ipotezele simplificatoare enunțate mai înainte, în barele grinzilor cu zăbrele vor apărea numai eforturi axiale (numite eforturi principale). Forța axială în bară este constantă.

7.2.2. CLASIFICARI

Barele grinzii cu zăbrele care delimitează la partea superioară grinda alcătuiesc talpa superioară. Partea inferioară a grinzii se numește talpa inferioară. Barele verticale se numesc montanți iar cele înclinate diagonale. Ansamblul de diagonale și montanți constituie zăbrelele grinzii. În fig. 7.17 se prezintă nomenclatura folosită în general la grinzile cu zăbrele obișnuite.

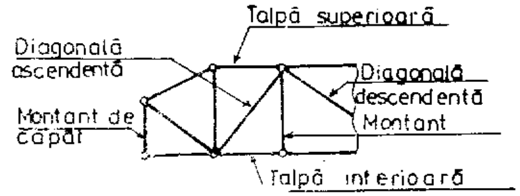


Fig. 7.17.

Clasificarea grinzilor cu zăbrele se face după mai multe criterii, și anume:

După materialele din care sînt confecționate:
- grinzi cu zăbrele metalice;
- grinzi cu zăbrele din beton armat;
- grinzi cu zăbrele din lemn.

După geometria grinzii:

a) geometria conturului grinzii cu zăbrele:
- grinzi de formă triunghiulară (fig. 7.18, *a*);
- grinzi de formă dreptunghiulară (fig. 7.18, *b*);

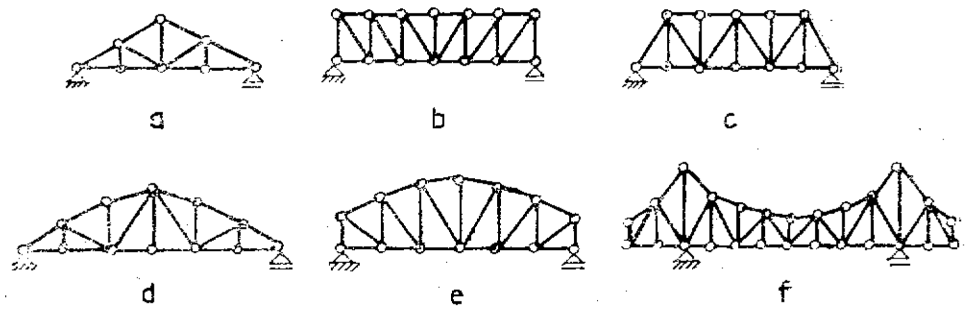


Fig. 7.18.

— grinzi de formă trapezoidală (fig. 7.18, *c*);
— grinzi de formă parabolică (fig. 7.18, *d*);
— grinzi de formă semiparabolică (fig. 7.18, *e*);
— grinzi de formă poligonală (fig. 7.18, *f*).

La grinzile parabolice şi semiparabolice barele sînt în general drepte, nodurile fiind dispuse după o parabolă;

b) geometria (distribuţia) zăbrelelor:
— sistem triunghiular (fig. 7.19, *a*);
— sistem N (fig. 7.19, *b*);
— sistem K (fig. 7.19, *c*).

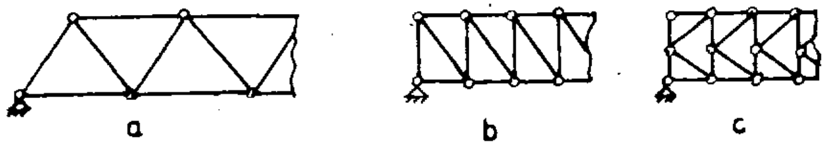


Fig. 7.19.

Clasificarea din punct de vedere al schemei statice:

— grinzi cu zăbrele simple, formate prin juxtapuneri de triunghiuri (sistemul triunghiular, sistemul N, sistemul K);

— grinzi cu zăbrele compuse concepute din suprapunerea unor grinzi cu zăbrele simple (fig. 7.20, *a*). Acestea pot fi descompuse într-un sistem fundamental (fig. 7.20, *b*) şi mai multe sisteme suplimentare localizate în panouri (fig. 7.20, *c*) care reazemă pe sistemul fundamental;

— grinzi cu zăbrele multiple (complexe) la care zăbrelele se întretaie fără ca intersecţiile să formeze noduri (fig. 7.21).

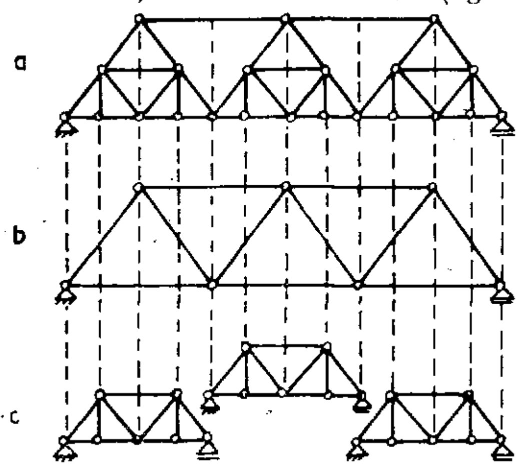


Fig. 7.20.

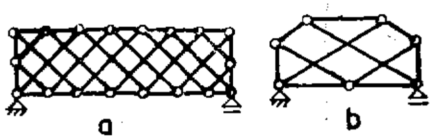


Fig. 7.21.

7.2.3. CONDIŢIA DE INVARIABILITATE GEOMETRICĂ ŞI DETERMINARE STATICĂ

Ca şi celelalte structuri, grinzile cu zăbrele trebuie să fie geometric invariabile iar legăturile lor exterioare să le asigure fixarea la teren.

Cea mai simplă figură geometric invariabilă este triunghiul, format din 3 bare legate prin articulaţii la noduri (fig. 7.22, *a*). La această figură numărul de bare este $b' = 3$ iar numărul de noduri este $n' = 3$.

Pentru obţinerea unui nou nod legat invariabil de prima figură sînt necesare două bare. Astfel se obţine nodul *4* prin legarea barelor *2—4* şi *3—4* la figura iniţială (fig. 7.22, *b*). Se observă că pentru fiecare nod nou sînt necesare două bare.

Se notează: b'' — numărul de bare ataşate ulterior triunghiului iniţial *1—2—3*; n'' — numărul de noduri formate cu barele b''; b — numărul total de bare din structură; n — numărul total de noduri.

Rezultă:

$$b = b' + b''; \quad n = n' + n'' \quad \text{sau} \quad b'' = b - b'; \quad n'' = n - n'.$$

Dar: $b'' = 2n''$; $b - b' = 2(n - n')$.

Deoarece $b' = 3$ şi $n' = 3$ se obţine:

$$b - 3 = 2(n - 3);$$

$$b = 2n - 3.$$

Relaţia $b = 2n - 3$ stabileşte legătura dintre numărul de bare şi numărul de noduri pentru ca o grindă cu zăbrele plană să fie geometric invariabilă. Ea reprezintă o condiţie de ordin cantitativ, deci o condiţie necesară, dar nu suficientă. Trebuie ca dispunerea barelor să asigure o invariabilitate efectivă a structurii, adică trebuie ca sistemul să nu fie critic.

Invariabilitatea grinzilor cu zăbrele prezintă două aspecte. Există structuri care au invariabilitate proprie. La aceste structuri, poziţia relativă a barelor nu se modifică chiar dacă se suprimă legăturile cu terenul. Întreaga grindă formează un singur corp căruia îi sînt necesare pentru fixarea cu terenul trei legături simple. Relaţia este cea stabilită înainte, adică $b = 2n - 3$. Este cazul structurii din fig. 7.22, *b*.

Alte grinzi cu zăbrele prezintă invariabilitate numai dacă se iau în considerare şi legăturile cu terenul. Notînd cu r, numărul de legături simple cu terenul, relaţia de invariabilitate geometrică devine

$$b = 2n - r \quad \text{sau} \quad 2n = b + r.$$

Aceasta este forma cea mai generală a relaţiei, grinzile cu invariabilitate proprie constituind un caz particular, cînd $r = 3$.

În fig. 7.23, *a* se arată o grindă cu zăbrele (la poduri) cu invariabilitate proprie iar în fig. 7.23, *b* o grindă cu zăbrele (la turnuri) care are invariabilitate numai datorită legăturilor cu terenul.

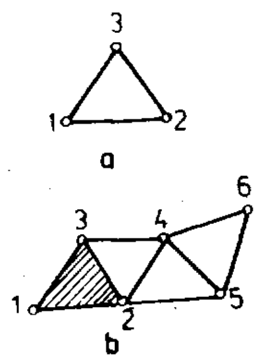


Fig. 7.22.

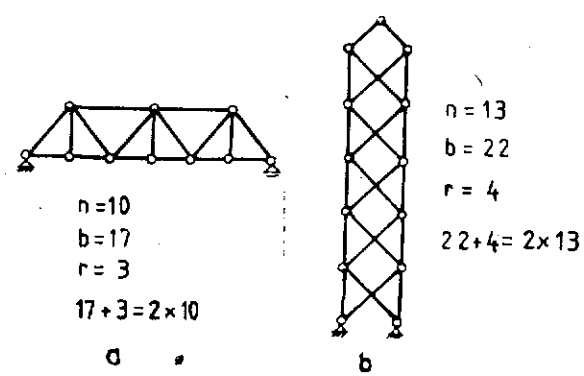


Fig. 7.23.

Relația $b + r = 2n$ furnizează numai o condiție de ordin statistic, cantitativ, de aceea este necesar a se verifica și aspectul calitativ, al modului de dispunere a barelor și legăturilor cu terenul. La ambele grinzi din fig. 7.24 relația cantitativă este verificată : $b = 9$; $n = 6$; $r = 3$ deci $b + r = 2n$.

În fig. 7.24, *a* dispoziția barelor asigură invariabilitatea sistemului. Grinda din fig. 7.24, *b* reprezintă un sistem în care partea *1—3—4—2* are un surplus de legături, în timp ce barele *3—5, 5—6, 4—6* formează împreună cu corpul *1—3—4—2* un mecanism. Barele nu sînt dispuse deci în mod judicios iar sistemul nu este corect alcătuit.

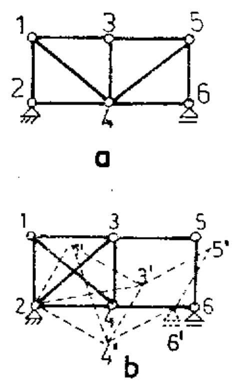


Fig. 7.24.

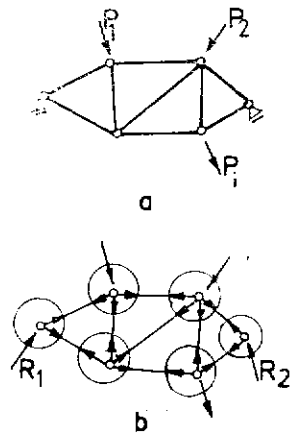


Fig. 7.25.

La o grindă cu zăbrele, necunoscutele sînt constituite din eforturile în bare (b) și de reacțiuni (r). Considerînd că se fac secțiuni în jurul tuturor nodurilor iar barele secționate se înlocuiesc prin eforturile din ele, fiecare nod reprezintă un sistem de forțe concurente în echilibru (fig. 7.25, *a*, *b*).

Echilibrul unui sistem de forțe plane concurente se exprimă prin două ecuații. Pentru o grindă cu zăbrele la care n este numărul de noduri și b numărul de bare rezultă :

— număr de necunoscute $N = b + r$;

— număr de ecuații $E = 2n$.

Dacă $N = E$, adică $b + r = 2n$, sistemul este static determinat. Așadar, relația de determinare statică este identică cu relația cantitativă de invariabilitate geometrică.

7.2.4. PROCEDEE PENTRU DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN BARELE GRINZILOR CU ZABRELE

La structurile static determinate metoda generală de determinare a eforturilor este metoda secțiunilor. Particularitățile de aplicare a acestei metode depind de tipul de structură. În cazul grinzilor cu zăbrele, metoda se prezintă sub două forme : procedeul secțiunilor oarecare și procedeul secțiunilor particulare (izolării nodurilor).

Procedeul secțiunilor oarecare. Procedeul are la bază exprimarea echilibrului unei părți din structură, acționată de încărcările exterioare cunoscute și de forțele de legătură din barele secționate.

Fie grinda din fig. 7.26 căreia i s-au determinat reacțiunile. Secțiunea *a—a* separă grinda cu zăbrele în două tronsoane. Se consideră înlăturat tronsonul II, iar în locul barelor secționate *1—3, 1—4* și *2—4* se introduc forțele axiale S_{13}, D_{14} și I_{21} (fig. 7.27).

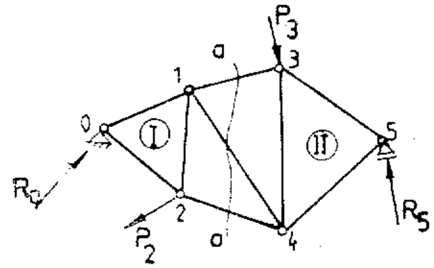


Fig. 7.26.

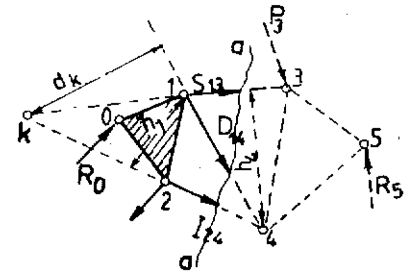


Fig. 7.27.

Se exprimă echilibrul tronsonului *I*. Forțele care își fac echilibrul formează un sistem de forțe plane oarecare. Se pot scrie în acest caz trei ecuații, din rezolvarea cărora se obțin cele trei eforturi necunoscute. Forma cea mai avantajoasă de scriere a ecuațiilor este aceea care conduce la determinarea cît mai simplă a necunoscutelor. În cazul de față, eforturile necunoscute rezultă din ecuațiile de momente în raport cu punctele *1, 2* și *k*

$$\sum_{i=1}^{n} M_{1i} = 0 ; \quad -I_{12}h_1 + M_1 = 0 ; \quad I_{12} = M_1/h_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{4i} = 0 ; \quad S_{13}h_4 + M_4 = 0 ; \quad S_{13} = -M_4/h_4 \qquad (7.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ki} = 0 ; \quad D_{14}d_k + M_k = 0 ; \quad D_{14} = - M_k/d_k.$$

Prin M_1, M_2 și M_k s-au notat momentele forțelor exterioare care acționează pe tronsonul *I*, deci de la stînga secțiunii *a—a*, în raport cu punctele *1, 2* și respectiv *k*.

Această modalitate de scriere a ecuațiilor de echilibru sub forma a trei ecuații de momente în raport cu punctul de intersecție al cîtor două din barele secționate este cunoscută sub numele de metoda Ritter. Din aceste ecuații rezultă expresii directe pentru eforturile din bare.

Exprimarea echilibrului uneia din părțile obținute prin secționare se poate face și pe cale grafică (metoda Culmann). Procedeul constă în descompunerea rezultantei forțelor exterioare ce acționează pe tronson, după cele trei direcții ale barelor secționate.

Deoarece în cazul forțelor oarecare coplanare se dispune de trei ecuații de echilibru, secțiunea *a—a* poate să taie cel mult trei bare cu efort necunoscut. Aceste bare nu trebuie să fie nici paralele și nici concurente în același punct.

Expresiile eforturilor, obținute mai înainte, se pot particulariza pentru grinda cu tălpi paralele, acționată de încărcări verticale (fig. 7.28, *a*).

Eforturile din barele panoului *i*, $i + 1$ se determină prin secționarea *a—a* și exprimarea echilibrului părții din stînga. Din ecuația de momente în raport cu nodul $i + 1$, rezultă

$$S_{i,i+1} = - M^0_{i+1}/h.$$

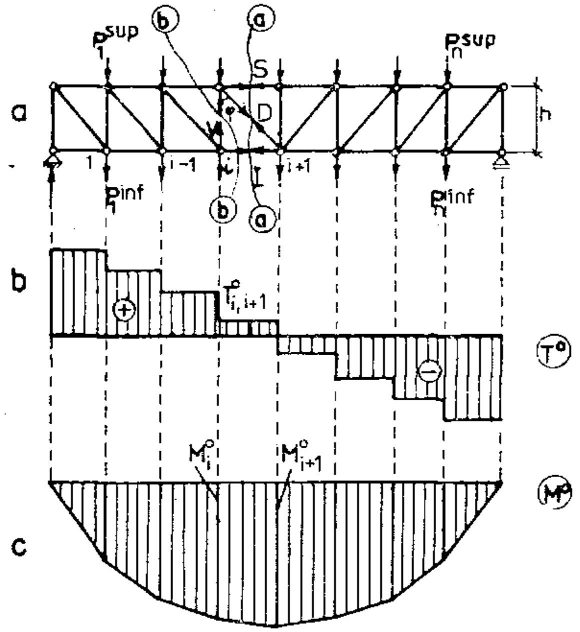


Fig. 7.28.

În mod similar, scriind ecuația de momente în raport cu nodul i rezultă

$$I_{i,i+1} = M_i^0/h.$$

Prin M_i^0 și M_{i+1}^0 s-au notat momentele tuturor forțelor de la stînga în raport cu punctul i, respectiv punctul $i+1$. Considerînd o grindă dreaptă, simplu rezemată, de aceeași deschidere și încărcată cu aceleași forțe ca și grinda cu zăbrele, atunci M_i și M_{i+1} reprezintă de fapt momentele încovoietoare din secțiunea i, respectiv $i+1$ ale acestei grinzi (fig. 7.28, *c*).

Pentru calculul efortului din diagonală $D_{i,\,i+1}$, se utilizează ecuația de proiecție pe verticală

$$-D_{i,\,i+1}\cos\varphi + T_{i,\,i+1}^0 = 0$$

$$D_{i,\,i+1} = T_{i,\,i+1}^0/\cos\varphi \qquad (7.2)$$

unde $T_{i,\,i+1}^0$ reprezintă suma proiecțiilor pe verticală a tuturor forțelor de la stînga secțiunii $a-a$, adică este forța tăietoare din panoul i, $i+1$.

Printr-o altă secțiune $b-b$ se determină efortul în montantul i, folosind ecuația de proiecții pe verticală a forțelor de la stînga secțiunii $b-b$. Această secțiune trece prin panoul i, $i+1$ la talpa inferioară și prin panoul i, $i-1$ la talpa superioară.

Se obține

$$V_i = -\,(T_{i,\,i+1}^{0,\,inf} + T_{i-1,\,i}^{0,\,sup}) \qquad (7.3)$$

unde $T_{i,\,i+1}^{0,\,inf}$ este forța tăietoare din panoul i, $i+1$, dacă ar acționa numai forțele P^{inf}; $T_{i-1,\,i}^{0,\,sup}$ — forța tăietoare din panoul $i-1$, i produsă de forțele P^{sup}.

Expresiile obținute mai înainte dau posibilitatea calculării eforturilor în barele grinzii cu zăbrele direct din diagramele T^0 și M^0 ale grinzii drepte corespunzătoare.

Procedeul izolării nodurilor. Acest procedeu reprezintă un caz particular al metodei secțiunilor și constă în izolarea tuturor nodurilor prin secțiuni ce taie toate barele din jurul fiecărui nod (fig. 7.29). Barele suprimate se înlocuiesc cu eforturile axiale necunoscute. Prin aceasta, o grindă cu zăbrele cu n noduri, conduce la n sisteme de forțe independente.

Din punct de vedere mecanic se obțin n sisteme de forțe concurente în plan, fiecare sistem fiind în echilibru.

Pentru un sistem de forțe plane concurente se pot scrie două ecuații de echilibru, și anume ecuații de proiecții pe două axe ($\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$; $\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$). Aceasta înseamnă că pentru toate cele n sisteme de forțe concurente se dispune de $2n$ ecuații. Necunoscutele fiind eforturile în bare (b) și reacțiunile cu terenul (r), sistemul de ecuații poate fi rezolvat dacă $2n = b + r$.

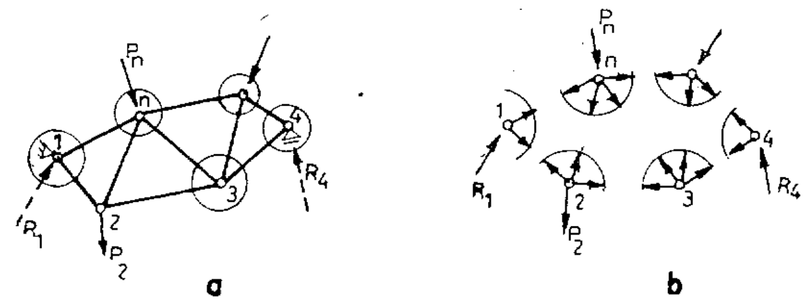


Fig. 7.29.

Teoretic, orice grindă cu zăbrele static determinată poate fi rezolvată prin această metodă. Practic, metoda este aplicabilă numai dacă este posibil ca sistemul de $2n$ ecuații să fie scindat în n sisteme de cîte două ecuații, fiecare sistem avînd numai două necunoscute. În acest fel, necunoscutele sînt determinate succesiv prin rezolvarea de la nod la nod a sistemului de ecuații. Această necesitate impune condiția de a găsi o astfel de succesiune de izolare a nodurilor, încît la fiecare nod să apară numai două bare cu efort necunoscut. În prealabil se determină reacțiunile r prin ecuații de echilibru pentru ansamblul grinzii.

La grinda din fig. 7.29, se poate începe cu izolarea nodului *1* sau *4*, deoarece aici apar numai două bare cu efort necunoscut, continuînd apoi cu celelalte noduri.

Ecuațiile de echilibru au forma :

$$\text{nodul } 1:\begin{cases}\sum_1 X_i = 0\\ \sum_1 Y_i = 0\end{cases};\ \text{nodul } 2:\begin{cases}\sum_2 X_i = 0\\ \sum_2 Y_i = 0\end{cases};\ \ldots;\ \text{nodul } n:\begin{cases}\sum_n X_i = 0\\ \sum_n Y_i = 0.\end{cases} \qquad (7.4)$$

Cele n sisteme de cîte două ecuații se rezolvă succesiv, obținîndu-se eforturile în bare.

Deoarece reacțiunile au fost determinate în prealabil, ecuațiile de echilibru de la ultimul nod vor constitui niște relații de verificare a calculului.

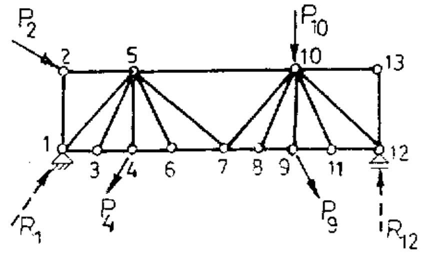


Fig. 7.30.

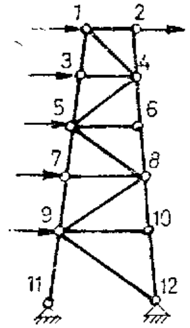


Fig. 7.31.

În fig. 7.30 și 7.31 se prezintă două exemple de grinzi cu zăbrele la care este posibilă aplicarea acestei metode, indicîndu-se și succesiunea de izolare a nodurilor. La grinda din fig. 7.30, reacțiunile se determină din echilibrul întregii grinzi, iar apoi izolarea nodurilor se face în ordinea : *2—1—3—4—6—5—7—8—9—11—10—12—13.*

În acest caz, o ecuație de la izolarea nodului *12* și ambele ecuații de la nodul *13* reprezintă relații de verificare.

Calculul poate fi condus în mod similar începînd cu nodul *13* și încheind cu nodul *2.*

Dacă numărul de legături simple cu terenul (r) este mai mare de 3, reacțiunile nu mai pot fi determinate înainte de izolarea nodului. Este situația din fig. 7.31. Ordinea de izolare a nodurilor și de scriere a ecuațiilor de echilibru este : *2—1—3—4—6—5—7—8—10—9.*

Din ultimele ecuații se obțin reacțiunile.

În unele cazuri, metoda izolării nodurilor trebuie aplicată împreună cu metoda secțiunilor oarecare. La ferma de acoperiș tip Polonceau (fig. 7.32), se pot determina eforturile în bare prin izolarea nodurilor, în succesiunea : *1—3—4—5—2—6—8—9—7—10—11.*

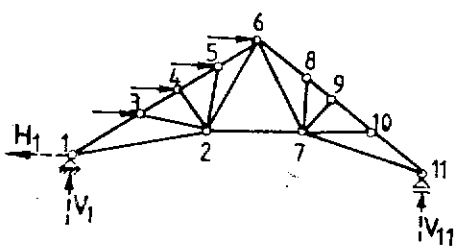


Fig. 7.32.

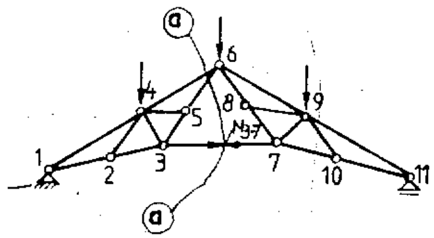


Fig. 7.33.

Acest lucru nu mai este posibil dacă ferma are zăbrelele dispuse ca în fig. 7.33. După izolarea nodurilor *1—2* și *11—10*, restul nodurilor au mai mult de două bare cu efort necunoscut. De aceea se face secțiunea *a—a* și se determină efortul N_{37} dintr-o ecuație de momente în raport cu punctul *6*, considerîndu-se forțele de pe partea din stînga (sau dreapta).

După calcularea efortului N_{37} devine posibilă aplicarea în continuare a metodei izolării nodurilor.

Bare cu efort nul. La o grindă cu zăbrele, datorită situației particulare a anumitor bare și a încărcărilor, unele bare au efort nul. Aceste bare pot fi identificate fără a utiliza ecuațiile de echilibru.

Astfel, la structura din fig. 7.34, izolînd nodul *2* și scriind ecuația de proiecție pe axa Oy, se obține $N_{21} = 0$.

În mod similar se constată că și eforturile N_{34} și $N_{1'2'}$ sînt nule.

Se vor analiza în continuare cazurile în care efortul axial dintr-o bară este nul.

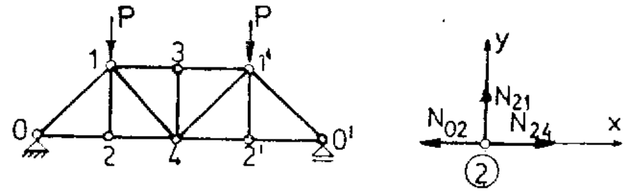


Fig. 7.34.

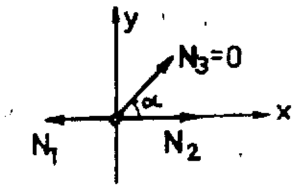


Fig. 7.35.

1) Dacă la un nod neîncărcat alcătuit din trei bare, două bare sînt în prelungire iar a treia are o direcție oarecare, efortul din această bară este nul (fig. 7.35). Ecuația de proiecție pe direcția normală la barele în prelungire conduce la $N_3 = 0$. Ecuația a doua furnizează condiția $N_1 = N_2$, adică eforturile din barele în prelungire sînt egale.

2) Eforturile în barele unui nod alcătuit din două bare sînt nule dacă nodul este neîncărcat (fig. 7.36). Direcțiile pe care se proiectează forțele N_1 și N_2 se aleg normale pe direcțiile eforturilor. Se obține :

— proiecție pe Δ_1: $N_2 = 0$;

— proiecție pe Δ_2: $N_1 = 0$.

3) Dacă rezultanta forțelor exterioare care acționează într-un nod alcătuit din două bare are direcția uneia din bare, atunci efortul din această bară are valoarea rezultantei, iar cealaltă bară are efort nul. Cazul este prezentat în fig. 7.37.

Astfel :

$$\Sigma Y_i = 0\ ;\ N_2 \sin\alpha = 0 \text{ și } N_2 = 0$$
$$\Sigma X_i = 0\ ;\ P + N_1 + N_2 \cos\alpha = 0$$

deci $N_1 = -P$.

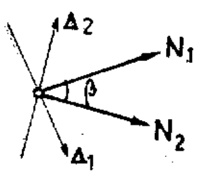


Fig. 7.36.

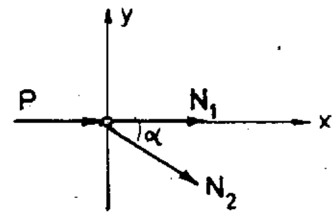


Fig. 7.37.

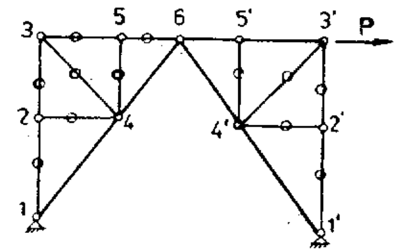


Fig. 7.38.

Pentru o situație de încărcare cu forțe fixe, se poate deci preciza de la început care sînt barele cu efort nul. La structura din fig. 7.38, o serie de bare nu au efort. Astfel : nodurile *2, 2', 5, 5'* fiind neîncărcate și alcătuite din cîte trei bare, două fiind în prelungire, se găsesc în situația din cazul 1), deci $N_{24} = N_{2'4'} = N_{45} = N_{4'5'} = 0$. Nodurile *4* și *4'* pot fi și ele considerate în cazul 1), deoarece barele cu efort nul pot fi omise din alcătuirea nodului ; deci $N_{34} = N_{4'3'} = 0$. Se vede că nodul *3* se găsește în cazul 2), deci $N_{35} = N_{23} = 0$, iar nodul *3'* în cazul 3), deci $N_{2'3'} = 0$. Revenind la nodurile

5, 2 și *2'*, cunoscînd că efortul este nul într-una din barele în prelungire rezultă $N_{56} = N_{21} = N_{2'1'} = 0$.

Din întreaga grindă, pentru încărcarea dată vor lucra numai 6 bare (fig. 7.38).

Epura Cremona. S-a arătat că prin izolarea nodurilor unei grinzi cu zăbrele se obțin sisteme de forțe plane concurente, cărora li se aplică condițiile de echilibru exprimate prin ecuații de proiecții pe două direcții oarecare, coplanare cu forțele.

Exprimarea echilibrului unui sistem de forțe concurente se poate realiza și pe cale grafică. Condiția de echilibru în acest caz este ca poligonul de forțe să fie închis. Fiecărui nod al grinzii cu zăbrele trebuie să-i corespundă deci un poligon de forțe închis.

Dacă la fiecare nod există numai două bare cu eforturi necunoscute, acestea se pot determina din condiția de închidere a poligonului de forțe din nodul respectiv. Efortul din fiecare bară intră în compunerea a două poligoane de forțe, corespunzătoare nodurilor de la extremitățile barei.

Sistematizînd operațiile și folosind o notație corespunzătoare (notația Bow) se poate construi o singură figură pentru întreaga grindă.

Se consideră grinda cu zăbrele din fig. 7.39. Determinarea reacțiunilor R_A și R_E pe cale grafică se face cu ajutorul poligonului de forțe și al poligonului funicular.

Se determină mărimea, direcția și sensul rezultantei R a forțelor exterioare P_1 și P_2, construind poligonul de forțe (fig. 7.39, *b*).

Poziția rezultantei se stabilește ducînd paralele prin punctul K (intersecția laturilor extreme ale poligonului funicular) la direcția rezultantei (fig. 7.39, *a*).

Pentru echilibru, rezultanta R și reacțiunile R_A și R_E trebuie să fie concurente. Punctul de concurență Q se găsește la intersecția rezultantei cu reacțiunea R_A a cărei direcție este cunoscută fiind normală la reazemul A.

Cunoscînd direcțiile Δ_A și Δ_E ale celor două reacțiuni, se determină în poligonul de forțe mărimile R_A și R_E ducînd paralele prin extremitățile rezultantei la direcțiile Δ_A și Δ_E.

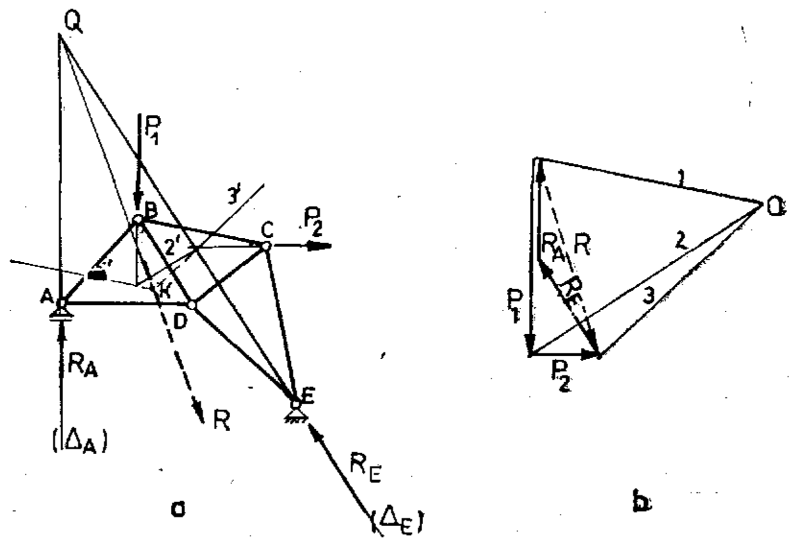


Fig. 7.39.

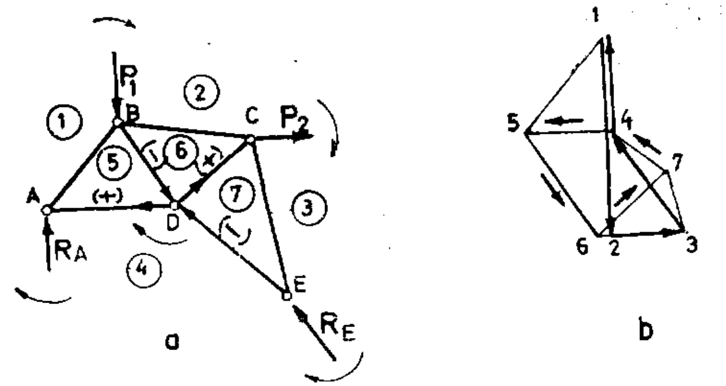


Fig. 7.40.

Grinda cu zăbrele este acționată de forțele cunoscute P_1, P_2, R_A și R_E (fig. 7.40, *a*). Notația Bow constă în atribuirea unui indice (cifră sau literă) fiecărui spațiu exterior dintre două forțe cît și spațiilor interioare. În acest fel s-au notat cele șapte spații din fig. 7.40, *a*, prin cifre de la 1 la 7.

O forță sau un efort dintr-o bară vor fi definite prin cele două cifre aferente spațiilor pe care le separă, așa cum s-a procedat în poligonul forțelor exterioare (fig. 7.40, *b*). Ordinea în care se înscriu cifrele în poligonul de forțe rezultă din parcurgerea (izolarea) nodurilor într-un sens arbitrar, de exemplu în sensul orar.

Parcurgînd astfel nodul A, rezultă că originea forței R_A trebuie notată cu cifra 4, iar vîrful cu cifra 1. În continuare, forța F_1 va avea indicii 12, deoarece desparte cîmpurile *1* și *2*. Analog se notează și forțele P_2 și R_E, obținîndu-se poligonul închis *4—1—2—3—4*. Avînd realizat echilibrul exterior, determinarea eforturilor în bare pornește totdeauna de la un nod care are numai două bare cu efort necunoscut, de exemplu nodul A. În acest nod își fac echilibru forțele *4—1, 1—5* și *5—4*.

După cum se vede în fig. 7.40, *b*, forța *4—1* este cunoscută. Cunoscînd direcțiile eforturilor *1—5* și *5—4*, se determină punctul *5* ducînd paralele din punctul *1*, respectiv din punctul *4*, la aceste direcții. Poligonul *4—1—5—4* reprezintă echilibrul nodului A, iar segmentele *4—5* și *5—1* măsurate la scara forțelor sînt tocmai eforturile căutate.

Trecînd la nodul B, se cunosc forțele *5—1* și *1—2* și urmează să se determine eforturile *2—5* și *6—5*. Prin punctul *2* se duce o paralelă la bara BC iar prin punctul *5* la bara BD, la intersecția lor aflîndu-se punctul *6*. Urmează să se stabilească punctul *7* din echilibrul nodului C sau D. Pentru verificare, poligonul *7—3, 3—4* și *4—7* trebuie să fie închis, deoarece reprezintă echilibrul nodului E.

Mărimile eforturilor se obțin măsurînd la scara forțelor segmentele corespunzătoare. Este important însă de precizat semnul eforturilor și anume, dacă o bară este întinsă sau comprimată. Pentru aceasta se parcurge nodul, în poligonul forțelor, în sensul orar adoptat și se transpune sensul efortului

pe schema grinzii. Dacă sensul efortului este dirijat către nod, bara este comprimată ; în caz contrar, ea este întinsă.

De exemplu, poligonul corespunzător nodului D trebuie parcurs în sensul $5-6-7-4-5$, deoarece astfel sînt dispuse cîmpurile din jurul acestui nod, corespunzător sensului orar adoptat.

Transpunînd aceste sensuri la barele ce alcătuiesc nodul D, se vede că eforturile $5-6$ și $7-4$ sînt de compresiune, iar eforturile $4-5$ și $6-7$ sînt de întindere.

Aplicația 7.2. Se cer eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 7.41. Reacțiunile au valorile : $V_o = 126{,}25$ kN ; $H_o = 40$ kN ; $V_o' = 133{,}75$ kN.

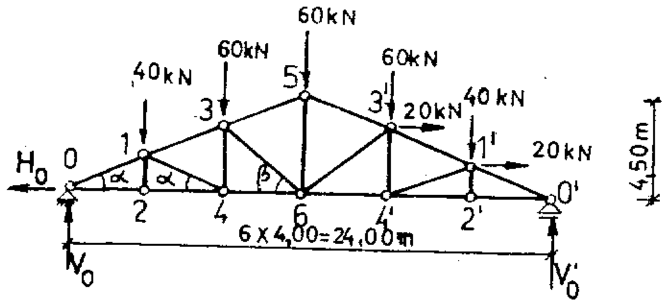


Fig. 7.41.

Eforturile din barele situate la stînga montantului $5-6$ se vor determina prin metoda izolării nodurilor.

Barele $1-2$ și $1'-2'$ au efort nul.

Nodul 0 (fig. 7.42)

Ecuațiile de echilibru sînt :

$$\Sigma Y_i = 126{,}25 + N_{01} \sin\alpha = 0$$

$$N_{01} = -\frac{126{,}25}{0{,}351} = -360 \text{ kN} ;$$

$$\Sigma X_i = N_{02} + N_{01} \cos\alpha - 40 = 0$$

$$N_{02} = 40 - (-360)\cdot 0{,}937 = 377{,}5 \text{ kN}.$$

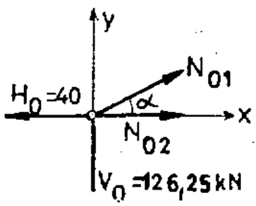


Fig. 7.42.

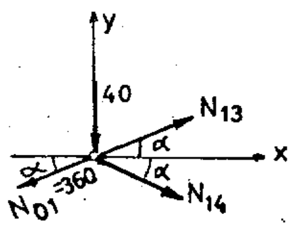


Fig. 7.43.

Nodul 1 (fig. 7.43)

$$\Sigma X_i = N_{13}\cos\alpha + N_{14}\cos\alpha - N_{01}\cos\alpha = 0$$

$$N_{13} + N_{14} + 360 = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_{13}\sin\alpha - N_{14}\sin\alpha - N_{01}\sin\alpha - 40 = 0$$

$$0{,}351\ N_{13} - 0{,}351\ N_{14} + 360\cdot 0{,}351 - 40 = 0.$$

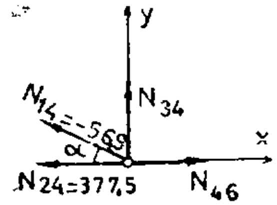


Fig. 7.44.

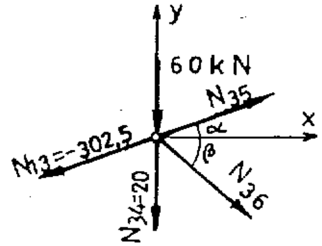


Fig. 7.45.

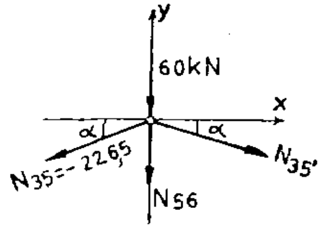


Fig. 7.46.

Din rezolvarea sistemului de ecuații se obțin valorile $N_{14} = -56{,}9$ kN ; $N_{13} = -302{,}5$ kN.

Din echilibrul nodului 2 rezultă că $N_{02} = N_{24} = 377{,}5$ kN.

Nodul 4 (fig. 7.44)

$$\Sigma X_i = N_{46} - N_{24} - N_{14}\cos\alpha = 0$$

$$N_{46} = 377{,}5 - 56{,}9\cdot 0{,}937 \doteq 323{,}3 \text{ kN} ;$$

$$\Sigma Y_i = N_{34} + N_{14}\sin\alpha = 0$$

$$N_{34} = 56{,}9\cdot 0{,}351 = 20 \text{ kN}.$$

Nodul 3 (fig. 7.45)

$$\Sigma X_i = N_{35}\cos\alpha - N_{13}\cos\alpha + N_{36}\cos\beta = 0$$

$$0{,}937\ N_{35} + 0{,}800\ N_{36} + 302{,}5\cdot 0{,}937 = 0$$

$$\Sigma Y_i = N_{35}\sin\alpha - N_{13}\sin\alpha - N_{34} - N_{36}\sin\beta - 60 = 0$$

$$0{,}351\ N_{35} - 0{,}600\ N_{36} + 302{,}5\cdot 0{,}351 - 60 - 20 = 0$$

$$N_{36} = -80 \text{ kN} ;\ N_{35} = -226{,}5 \text{ kN}.$$

Nodul 5 (fig. 7.46)

$$\Sigma X_i = N_{35}\cos\alpha - N_{35'}\cos\alpha = 0$$

$$N_{35'} = N_{35} = -226{,}5 \text{ kN} ;$$

$$\Sigma Y_i = -N_{56} - N_{35'}\sin\alpha - N_{35}\sin\alpha - 60 = 0$$

$$N_{56} = (226{,}5 + 226{,}5)\cdot 0{,}351 - 60 = 99 \text{ kN}.$$

Metoda secțiunilor oarecare va fi aplicată pentru determinarea eforturilor în barele panourilor $6-4'$ și $4'-2'$.

Secțiunea I—I (fig. 7.47)

Echilibrul părții din dreapta secțiunii $I-I$ se exprimă prin trei ecuații de momente în raport cu punctele $0'$, $3'$ și 6.

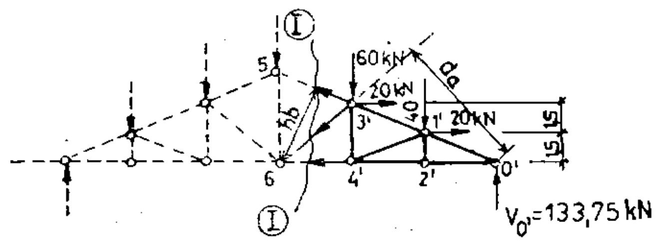


Fig. 7.47.

Se obține:

$$-N_{63'} d_{o'} - 60 \cdot 8 + 20 \cdot 3 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$d_{o'} = 12 \sin \beta = 12 \cdot 0{,}6 = 7{,}20 \text{ m}$$

$$N_{63'} = -\frac{550}{7{,}20} = -76{,}4 \text{ kN}$$

$$N_{64'} \cdot 3 + 40 \cdot 4 - 20 \cdot 1{,}5 - 133{,}75 \cdot 8 = 0$$

$$N_{64'} = \frac{940}{3} = 313{,}3 \text{ kN}$$

$$N_{53'} h_5 - 60 \cdot 4 - 20 \cdot 3 - 40 \cdot 8 - 20 \cdot 1{,}5 + 133{,}75 \cdot 12 = 0$$

$$N_{53'} = -\frac{955}{45 \cos \alpha} = -226{,}5 \text{ kN}.$$

Aceeași valoare a efortului $N_{53'}$ a fost găsită și din izolarea nodului 5.

Secțiunea II—II (fig. 7.48)

Se scriu ecuațiile de momente în raport cu punctul *4'* și respectiv *0'*, rezultînd:

$$N_{1'3'} h_{4'} - 40 \cdot 4 - 20 \cdot 1{,}5 + 133{,}75 \cdot 8 = 0$$

$$N_{1'3'} = -\frac{880}{3 \cos \alpha} = -313 \text{ kN}$$

$$N_{4'3'} \cdot 8 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$N_{4'3'} = \frac{130}{8} = 16{,}2 \text{ kN}.$$

Secțiunea III—III (fig. 7.49)

Ecuațiile de momente în raport cu punctele *1'*, respectiv *0'* conduc la:

$$N_{2'4'} \cdot 1{,}5 - 133{,}75 \cdot 4 = 0$$

$$N_{2'4'} = \frac{133{,}75 \cdot 4}{1{,}5} = 357 \text{ kN}$$

$$-N_{1'4'} d_{o'} - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$N_{1'4'} = -\frac{130}{8 \sin \alpha} = -46{,}3 \text{ kN}.$$

Eforturile $N_{1'0'}$ și $N_{2'0'}$ se obțin din izolarea nodului *0'* și au valorile

$$N_{1'0'} = -380{,}7 \text{ kN}; \quad N_{0'2'} = 357 \text{ kN}.$$

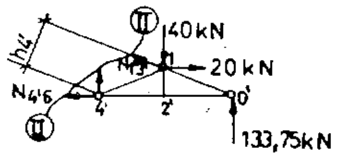


Fig. 7.48.

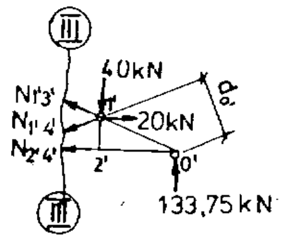


Fig. 7.49.

Aplicația 7.3. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din fig. 7.50. Grinda are tălpile paralele și este încărcată cu forțe verticale.

Sînt cunoscute: $N_{00} = N_{0I} = N_{2II} = N_{2'II'} = N_{0'0'} = N_{1'0'} = 0$

În fig. 7.50, *b*, *c* s-au trasat diagramele T^0 și M^0 pentru grinda dreaptă corespunzătoare.

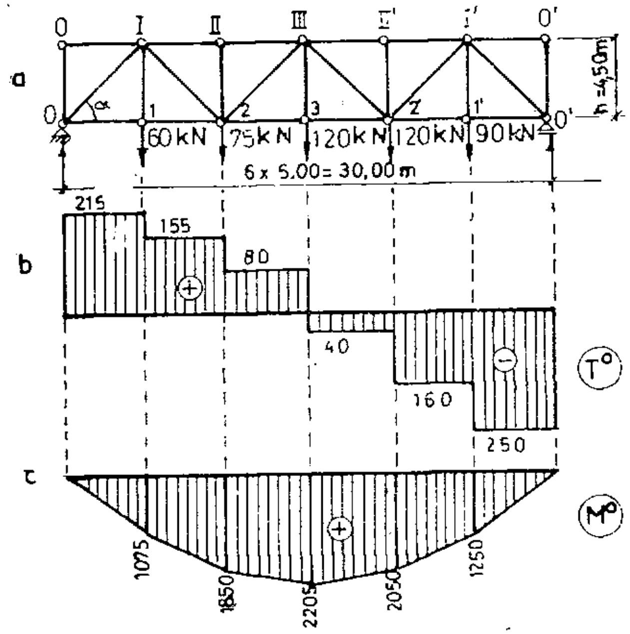


Fig. 7.50.

Se obține:

$$S_{I,II} = S_{II,III} = -\frac{M_2}{h} = -\frac{1\,850}{4{,}5} = -411 \text{ kN}$$

$$S_{III,II'} = S_{II',I'} = -\frac{M_{2'}}{h} = -\frac{2\,050}{4{,}5} = -456 \text{ kN}$$

$$I_{01} = I_{12} = \frac{M_I}{h} = \frac{1\,075}{4{,}5} = 239 \text{ kN}$$

$$I_{23} = I_{32'} = \frac{M_{III}}{h} = \frac{2\,205}{4{,}5} = 490 \text{ kN}$$

$$I_{2'1'} = I_{1'0'} = \frac{M_{I'}}{h} = \frac{1\,250}{4{,}5} = 278 \text{ kN}$$

$$D_{0I} = -\frac{T_{01}}{\sin \alpha} = -\frac{215}{0{,}669} = -332 \text{ kN}$$

$$D_{I2} = \frac{T_{12}}{\sin \alpha} = \frac{155}{0{,}669} = 232 \text{ kN}$$

$$D_{2III} = -\frac{T_{23}}{\sin \alpha} = -\frac{80}{0{,}669} = -119{,}5 \text{ kN}$$

$$D_{III\,2'} = \frac{T_{32'}}{\sin\alpha} = \frac{-40}{0{,}669} = -\,59{,}7 \text{ kN}$$

$$D_{2'1'} = -\frac{T_{2'1'}}{\sin\alpha} = -\frac{-160}{0{,}669} = 239 \text{ kN}$$

$$D_{1'0'} = \frac{T_{1'0'}}{\sin\alpha} = \frac{-250}{0{,}669} = -\,374 \text{ kN}$$

şi direct de la noduri: $V_{11} = 60$ kN; $V_{3III} = 120$ kN; $V_{1'1'} = 90$ kN.

7.2.5. LINII DE INFLUENŢA LA GRINZI CU ZĂBRELE

Metoda funcţiilor de influenţă (metoda analitică). Se consideră grinda cu zăbrele din fig. 7.51, încărcată cu forţa $P = 1$ mobilă. Pentru determinarea liniilor de influenţă S, I, D, se va secţiona grinda şi se va exprima echilibrul părţii din stînga (fig. 7.51, *a*).

Echilibrul se va exprima prin ecuaţii care să conţină fiecare numai cîte o necunoscută. Aceasta este posibil dacă, pentru fiecare bară cu efort necunoscut, se scrie o ecuaţie de momente în raport cu punctul de intersecţie al celorlalte două.

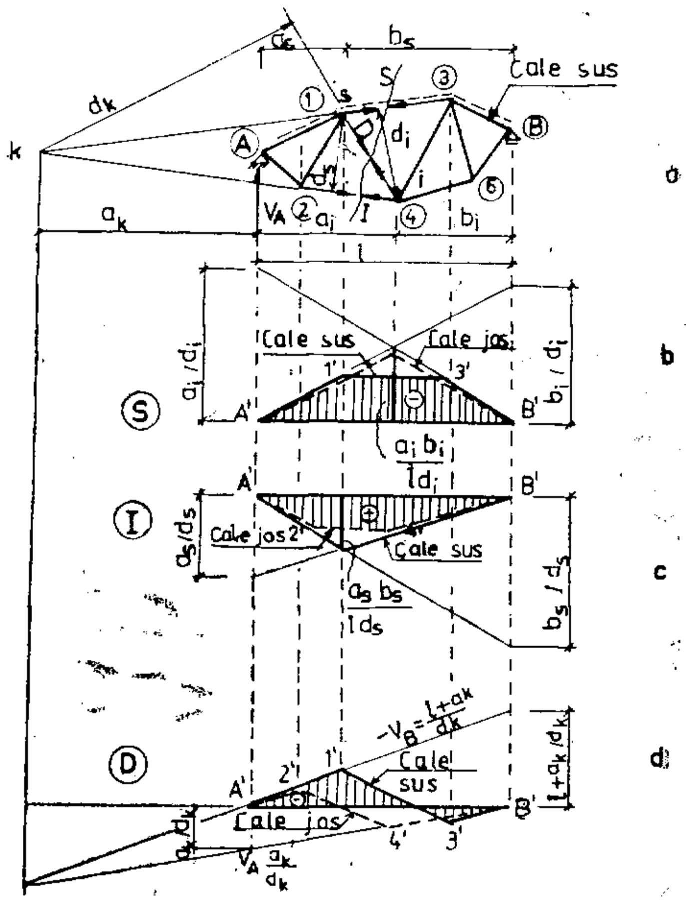


Fig. 7.51.

Linia de influenţă a efortului S (fig. 7.51, *b*)

Scriind: $\Sigma M_i^{st} = 0$ rezultă $Sd_i + M_i = 0$ şi expresia funcţiei de influenţă

$$S = -\frac{M_i}{d_i}. \tag{7.5}$$

Prin M_i s-a notat suma momentelor tuturor forţelor de la stînga secţiunii, exclusiv momentul efortului S. Cînd forţa $P = 1$ parcurge linia de încărcare, M_i reprezintă linia de influenţă a momentului încovoietor în secţiunea i a unei grinzi drepte, simplu rezemate, de aceeaşi deschidere. Pentru obţinerea liniei de influenţă a efortului S, trebuie deci ca ordonatele liniei de influenţă M_i să fie împărţite la cantitatea d_i.

Cînd calea este la talpa inferioară, linia de influenţă este de formă triunghiulară, iar ordonata maximă are valoarea $\frac{a_i b_i}{l d_i}$, înregistrîndu-se în dreptul nodului i.

Dacă grinda cu zăbrele este cu calea sus, atunci încărcările se transmit la nodurile tălpii superioare (nodurile A, 1, 3, B) şi linia de influenţă a efortului S are forma A', $1'$, $3'$, B' (fig. 7.51*b*, linia continuă).

Linia de influenţă a efortului I (fig. 7.51, *c*). Ecuaţia de momente în raport cu punctul $s(I)$ este de forma

$$\Sigma M_s^{st} = 0;\; Id_s + M_s = 0;\; I = -\frac{M_s}{d_s} \tag{7.6}$$

unde M_s este linia de influenţă a momentului încovoietor în secţiunea s a grinzii drepte simplu rezemate, de aceeaşi deschidere.

Ordonata maximă se înregistrează dacă grinda are calea sus $\left(\eta_{max} = = \frac{a_s b_s}{l d_s}\right)$.

În cazul transmiterii încărcărilor la talpa inferioară (cale jos), linia de influenţă I are variaţia A', $2'$, $4'$, B) şi este reprezentată punctat în fig. 7.51, *c*.

Linia de influenţă a efortului D (fig. 7.51, *d*). Tălpile I şi S se intersectează în punctul k, faţă de care se scrie ecuaţia de momente pentru fiecare din cele două corpuri obţinute prin secţionare

$$\Sigma M_k = 0;\quad Dd_k + M_k = 0. \tag{7.7}$$

Se obţine $D = -\frac{M_k}{d_k}$.

Se consideră că forţa $P = 1$ se găseşte la dreapta secţiunii. În acest caz, este convenabil de exprimat echilibrul părţii din stînga secţiunii, deoarece pe această parte acţionează, în afara efortului D, numai reacţiunea V_A. Deci $M_k = -V_A a_k$. Înlocuind această valoare se obţine

$$D = V_A \frac{a_k}{d_k}.$$

Aceasta înseamnă că la dreapta secţiunii, linia de influenţă a efortului D se obţine din linia de influenţă V_A, prin multiplicarea acesteia cu $\frac{a_k}{d_k}$.

Dacă forța $P = 1$ se află la stînga secțiunii, din echilibrul corpului din dreapta rezultă

$$M_k = -[-V_B(l + a_k)] = V_B(l + a_k)$$

adică : $$D = -V_B \frac{l + a_k}{d_k}$$

ceea ce înseamnă că din linia de influență a reacțiunii V_B multiplicată cu $\frac{l + a_k}{d_k}$ se reține ca fiind linia D, porțiunea de la stînga secțiunii.

Se observă că

$$\frac{\frac{a_k}{d_k}}{a_k} = \frac{\frac{l + a_k}{d_k}}{l + a_k}$$

deci cele două drepte, reprezentînd linia de influență D la stînga și respectiv la dreapta nodurilor vecine secțiunii, se intersectează pe verticala punctului k. Pentru calc sus, nodurile vecine secțiunii sînt nodurile 1 și 3, iar linia de influență este $A'1'3'B'$. În celălalt caz (cale jos), nodurile vecine secțiunii sînt nodurile 2 și 4 și linia de influență a efortului D va fi reprezentată de variația $A'2'4'B'$ (fig. 7.51, *d*, linia punctată).

Foarte frecvent sînt întîlnite grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele. Pentru acest caz particular, s-a arătat anterior că la forțe verticale eforturile în bare pot fi calculate în funcție de eforturile T și M într-o grindă dreaptă simplu rezemată, de aceeași deschidere, încărcată cu aceleași forțe. Astfel, printr-o secționare $1-1$ a grinzii (fig. 7.52, *a*) se pun în evidență eforturile S, I, D. Pentru determinarea lor se scriu ecuațiile de echilibru ale părții din stînga și se obține

$$S = -\frac{M_i}{h}; \quad I = \frac{M_s}{h}; \quad D = \frac{T_{11}}{\sin\alpha}.$$

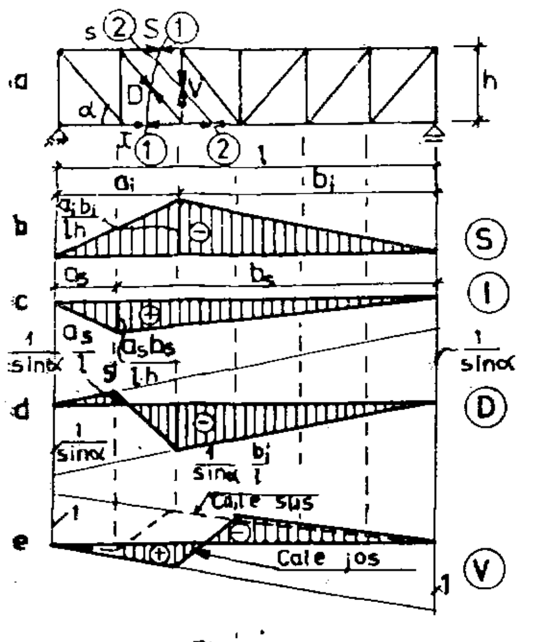


Fig. 7.52.

În mod similar, secționînd după $2-2$ se determină efortul V din ecuația de proiecție pe verticală a tuturor forțelor de la stînga secțiunii $2-2$.

$$V = -T_{22}.$$

Secțiunea $2-2$ trece prin panouri diferite la nivelul celor două tălpi, de aceea forța tăietoare trebuie considerată pentru fiecare poziție a căii în panoul prin care trece secțiunea $2-2$.

Dacă încărcarea grinzii este constituită dintr-o singură forță $P = 1$ care parcurge linia de încărcare, atunci M_i, M_s și T reprezintă liniile de influență ale eforturilor respective în secțiunea corespunzătoare a grinzii simplu rezemate.

Linia S (fig. 7.52, *b*) se obține din linia de influență a momentului M_i prin schimbarea semnului și împărțirea acesteia la înălțimea h a grinzii.

Ordonata maximă se înregistrează în dreptul secțiunii i și are valoarea $\eta_{max} = \frac{a_i b_i}{lh}$. Atunci cînd nodurilor de la talpa superioară le corespund pe verticală noduri la talpa inferioară, linia de influență are același aspect, indiferent de poziția căii pe grindă.

Linia I (fig. 7.52, *c*) rezultă asemănător liniei S, prin împărțirea liniei M_s la înălțimea grinzii, deci ordonata maximă va fi $\eta_{max} = \frac{a_s b_s}{lh}$.

Linia D (fig. 7.52, *d*). Datorită transmiterii indirecte a încărcărilor la noduri, nu se poate vorbi de forță tăietoare într-o anumită secțiune ci de forță tăietoare dintr-un panou.

În cazul liniei de influență a efortului D, trebuie considerată linia de influență a forței tăietoare din panoul diagonalei, multiplicată cu cantitatea $\frac{1}{\sin\varphi}$. La dreapta și la stînga panoului diagonalei D, linia de influență are același aspect ca cel al liniei $\frac{T}{\sin\varphi}$. Deși se obține din linia de influență a forței tăietoare dintr-o secțiune a unei grinzi simplu rezemate, linia efortului D nu prezintă discontinuitate (salturi), aceasta datorindu-se transmiterii indirecte a încărcărilor.

Aplicația 7.4. La grinda cu zăbrele din fig. 7.53, *a* să se traseze liniile de influență ale eforturilor N_{A1}, N_{12}, N_{1I}.

Reacțiunilor V_A și V_B li se atribuie sensurile din fig. 7.53, *a*. Din ecuația de proiecție pe orizontală rezultă : $H_A = 0$.

Se izolează nodul A și se scriu ecuațiile de echilibru, obținîndu-se (fig. 7.54)

$$\Sigma X_i = (-N_{A1} + N_{A3}) \sin\alpha = 0$$

$$N_{A1} = N_{A3}$$

$$\Sigma Y_i = V_A + (N_{A1} + N_{A3}) \cos\alpha = 0$$

$$V_A + 2N_{A1} \cos\alpha = 0$$

$$N_{A1} = -\frac{1}{2\cos\alpha} V_A.$$

Linia V_A fiind cunoscută, se poate obține deci linia N_{A1} din aceasta prin schimbarea semnului și multiplicarea cu $\frac{1}{2\cos\alpha}$.

$$\eta_A = \frac{1}{2\cos\alpha} 1 = \frac{1}{2\cos\alpha}; \quad \eta_1 = -\frac{1}{2\cos\alpha} \cdot \frac{7}{6} = -\frac{7}{12\cos\alpha};$$

$$\eta_{1'} = -\frac{1}{2\cos\alpha}\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12\cos\alpha}.$$

Pentru obținerea liniilor N_{12} și N_{1I} se izolează nodul 1 (fig. 7.55)

$$\Sigma X_i = N_{12} + N_{1A} \sin\alpha = 0$$

$$N_{12} = -N_{1A} \sin\alpha = -\left(-\frac{V_A}{2\cos\alpha}\right) \sin\alpha = \frac{V_A}{2} \operatorname{tg}\alpha.$$

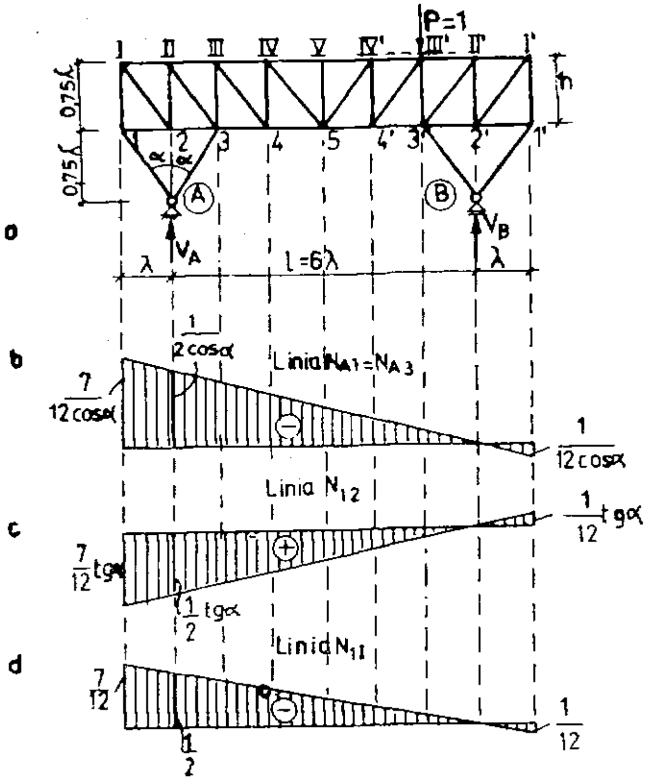


Fig. 7.53.

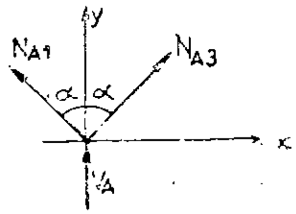


Fig. 7.54.

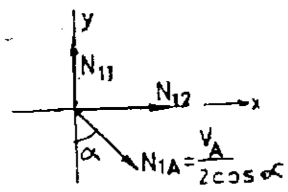


Fig. 7.55.

Linia N_{12} este reprezentată în fig. 7.53, *c* și are următoarele ordonate caracteristice

$$\eta_A = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,; \quad \eta_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{7}{12}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\eta_{1'} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{12}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\Sigma Y_i = N_{1I} - N_{1A}\cos\alpha = 0$$

$$N_{1I} = N_{1A}\cos\alpha = -\frac{V_A}{2\cos\alpha}\cos\alpha = -\frac{V_A}{2}.$$

În fig. 7.53, *d* este arătată linia N_{1I}

$$\eta_A = -\frac{1}{2}; \quad \eta_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6} = -\frac{7}{12}$$

$$\eta_{1'} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}.$$

În mod similar se pot determina liniile de influență și ale eforturilor din celelalte bare.

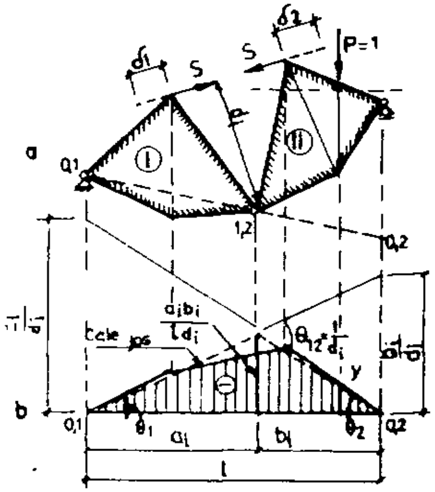


Fig. 7.56.

Metoda cinematică (deplasări virtuale). Construcția liniilor de influență pe baza principiului lucrului mecanic virtual se face asemănător celor arătate la grinda dreaptă. În barele grinzii cu zăbrele apar numai eforturi axiale, de aceea suprimarea legăturii pe direcția forței axiale este echivalentă cu secționarea completă a barei și introducerea efortului N. Se obține astfel un mecanism cu un singur grad de libertate.

Epura de deplasări a liniei de încărcare pe verticală, măsurată la o anumită scară, reprezintă linia de influență a efortului considerat.

Linia S. Se consideră grinda cu zăbrele din fig. 7.56, *a*. Se suprimă bara introducându-se efortul S. Mecanismul are un grad de libertate și este alcătuit din două corpuri (*I, II*). Centrele de rotație *0, 1* și *1, 2* se cunosc iar centrul absolut *0, 2* se determină pe baza teoremei coliniarității.

Se dă o deplasare pe direcția efortului S, în sens contrar acestuia. Aceasta înseamnă că nodurile de la extremitățile barei suprimate trebuie să se depărteze unul față de celălalt.

Deplasările celor două noduri, măsurate pe direcția efortului S, se notează cu δ_1 respectiv δ_2. Forța $P = 1$ se găsește pe linia de încărcare într-o poziție oarecare.

Sistemul fiind în echilibru $\delta L = 0$

$$\delta L = -S(\delta_1 + \delta_2) - 1\cdot y = 0\,; \quad S = -\frac{y}{\delta_1 + \delta_2}. \tag{7.8}$$

Pentru toate pozițiile încărcării $P = 1$, mărimile y reprezintă deplasările pe verticală corespunzătoare, adică tocmai epura de deplasare pe verticală a liniei de încărcare. Alegînd deplasarea relativă $(\delta_1 + \delta_2)$ de mărime unitară se obține

$$S = -y.$$

Linia de influență este identică valoric cu epura de deplasări pe verticală a liniei de încărcare, dacă deplasarea dată pe direcția legăturii suprimate are mărimea unitară.

Scara liniei de influență se stabilește găsind o corelație între deplasarea $(\delta_1 + \delta_2) = 1$ și un element al epurei de deplasări pe verticală. Se observă că

$$\delta_1 = \theta_1 d_i\,; \quad \delta_2 = \theta_2 d_i$$

$$\delta_1 + \delta_2 = d_i(\theta_1 + \theta_2) = d_i\theta_{12} = 1$$

$$\theta_{12} = \frac{1}{d_i}$$

unde θ_{12} reprezintă unghiul de rotație relativă dintre cele două corpuri iar d_i este distanța de la centrul de rotație relativ *(1, 2)* la bara suprimată.

Cunoscînd pe θ_{12}, se poate calcula orice altă mărime a liniei de influență.

Astfel :

$$\theta_{12} b_i = \theta_1 l ; \quad \theta_1 = \frac{b_i}{l} \cdot \frac{1}{d_i}$$

$$\theta_{12} a_i = \theta_2 l ; \quad \theta_2 = \frac{a_i}{l} \cdot \frac{1}{d_i}$$

$$\eta_{max} = \theta_1 a_i = \frac{b_i}{l} \cdot \frac{1}{d_i} a_i = \frac{a_i b_i}{l d_i}$$

sau

$$\eta_{max} = \theta_2 b_i = \frac{a_i}{l} \cdot \frac{1}{d_i} b_i = \frac{a_i b_i}{l d_i} .$$

Trebuie avut în vedere că linia de influență este dată de epura de deplasări pe verticală a liniei de încărcare. Cînd grinda cu zăbrele este cu cale sus, se consideră în epura de deplasări nodurile de la talpa superioară, iar în cazul căii jos, nodurile de la talpa inferioară.

Linia de influență S este prezentată în fig. 7.56, b cu linie întreruptă pentru cale jos și cu linie continuă pentru cale sus.

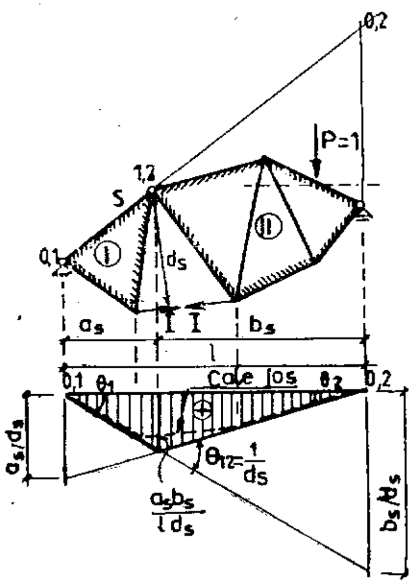


Fig. 7.57.

Linia I (fig. 7.57). Se procedează ca și la linia de influență S. Scara liniei de influență rezultă din relația

$$\theta_{12} = \frac{1}{d_s} .$$

Dar,

$$\theta_{12} b_s = \theta_1 l ; \quad \theta_1 = \frac{b_s}{l} \cdot \frac{1}{d_s}$$

$$\theta_{12} a_s = \theta_2 l ; \quad \theta_2 = \frac{a_s}{l} \cdot \frac{1}{d_s}$$

$$\eta_{max} = \theta_1 a_s = \frac{a_s b_s}{l d_s}$$

Linia D (fig. 7.58). Prin suprimarea diagonalei se obține un lanț cinematic format din patru corpuri.

Se cunosc următoarele centre de rotație *(0,1)*, *(1,4)*, *(2,4)*, *(1,3)* și *(2,3)*. Celelalte centre se determină în succesiunea următoare :

$$(1,2)\begin{cases} 2,3 - 3,4 - 1,2 \\ 2,4 - 1,4 - 1,2 \end{cases} \qquad (0,2)\begin{cases} \perp \text{ reazem corp } II \\ 0,1 - 1,2 - 0,2 \end{cases}$$

$$(0,3)\begin{cases} 0,1 - 1,3 - 0,3 \\ 0,2 - 2,3 - 0,3 \end{cases} \qquad (0,4)\begin{cases} 0,1 - 1,4 - 0,4 \\ 0,2 - 2,4 - 0,4. \end{cases}$$

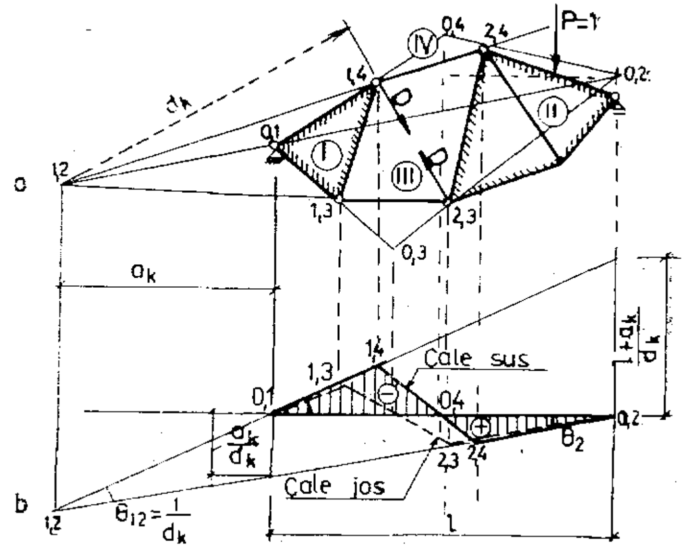


Fig. 7.58.

Deplasarea se dă astfel încît punctele *(1,4)* și *(2,3)* să se depărteze cu cantitatea $\delta = 1$. Corpurile I și II se rotesc relativ în jurul centrului *(1,2)*, deci :

$$\theta_{12} = \frac{\delta}{d_k} = \frac{1}{d_k}$$

de unde rezultă

$$\theta_1 = \frac{l + a_k}{d_k} \cdot \frac{1}{l} ; \quad \theta_2 = \frac{a_k}{d_k} \cdot \frac{1}{l} .$$

Aplicația 7.5. Să se traseze liniile de influență ale eforturilor S, I, D, V din barele grinzii cu zăbrele din fig. 7.59, a. Se va utiliza metoda cinematică.

Linia S. Mecanismul obținut după suprimarea barei este arătat în fig. 7.59, b iar linia de influență în fig. 7.59, c

$$\theta_{12} = \frac{1}{h} = \frac{1}{3}$$

$$16\theta_{12} = 24\theta_1$$

$$\theta_1 = \frac{16}{24} \theta_{12} = \frac{16}{24} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$8\theta_{12} = 24\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{8}{24} \theta_{12} = \frac{8}{24} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\eta_{max} = \theta_1 \cdot 8 = \frac{2}{9} \cdot 8 = \frac{16}{9} .$$

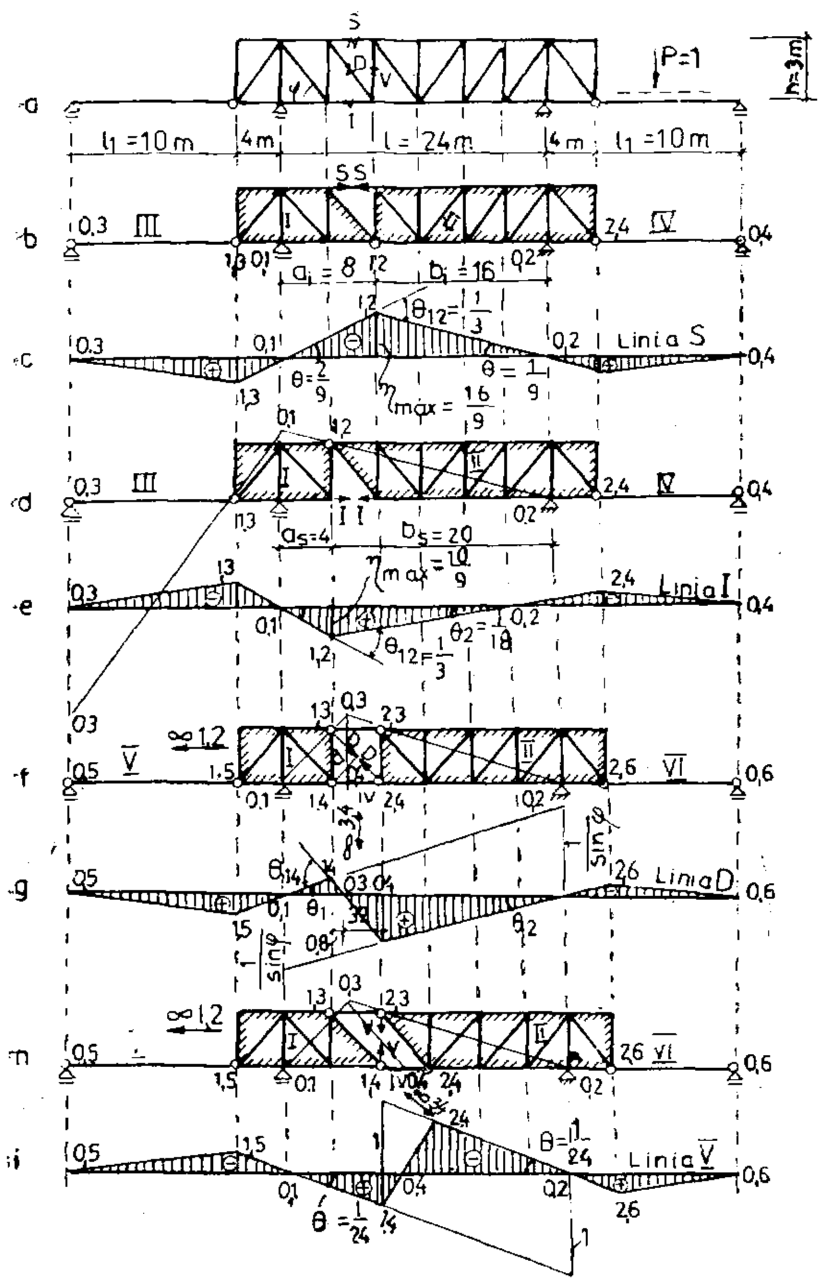


Fig. 7.59.

Linia I (fig. 7.59, *d, e*)

$$\theta_{12} = \frac{1}{h} = \frac{1}{3}$$

Se obține apoi

$$20\theta_{12} = 24\theta_1$$

$$\theta_1 = \frac{20}{24}\,\theta_{12} = \frac{20}{24}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

$$4\theta_{12} = 24\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{4}{24}\,\theta_{12} = \frac{4}{24}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

$$\eta_{I\,max} = \theta_2\cdot 20 = \frac{1}{18}\cdot 20 = \frac{10}{9}.$$

Linia D. Mecanismul din fig. 7.59, *f* este alcătuit din 6 corpuri. Centrul de rotație relativă (*1, 2*) se obține din condițiile următoare:

$$(1,2)\begin{cases} 1,3 - 2,3 - 1,2 \\ 1,4 - 2,4 - 1,2. \end{cases}$$

Cele două drepte care determină centrul (*1, 2*) sînt paralele, deci centrul (*1, 2*) se găsește la infinit pe direcția orizontală.

Cunoscîndu-se poziția centrului (*1, 2*) se poate trece la determinarea centrului (*0, 1*) astfel:

$$(0,1)\begin{cases} \perp \text{ reazem simplu} \\ 0,2 - 1,2 - 0,1. \end{cases}$$

Cea de a doua dreaptă rezultă ducînd o orizontală prin punctul (*0,2*). Celelalte centre de rotație se determină astfel:

$$(3,4)\begin{cases} 1,4 - 1,3 - 3,4 \\ 2,4 - 2,3 - 3,4. \end{cases}$$

Centrul relativ *3, 4* se găsește la infinit pe direcția verticală

$$(0,3)\begin{cases} 0,1 - 1,3 - 0,3 \\ 0,2 - 2,3 - 0,3 \end{cases} \qquad (0,4)\begin{cases} 0,1 - 1,4 - 0,4 \\ 0,3 - 3,4 - 0,4 \end{cases}$$

$$(0,5)\begin{cases} \perp \text{ reazem simplu} \\ 0,1 - 1,5 - 0,5 \end{cases} \qquad (0,6)\begin{cases} \perp \text{ reazem simplu} \\ 0,2 - 2,6 - 0,6 \end{cases}$$

Notînd cu *d*, distanța de la centrul (*1,4*) pînă la diagonala *D*, se obține

$$\theta_{14} = \frac{1}{d};\quad d = 4\sin\varphi;\quad \theta_{14} = \frac{1}{4\sin\varphi}$$

$$0.8\theta_{14} = 4{,}8\theta_1;\quad \theta_1 = \frac{0{,}8}{4{,}8}\,\theta_{14} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4\sin\varphi} = \frac{1}{24\sin\varphi}.$$

Deoarece centrul (*1.2*) se găsește la infinit, corpurile *I* și *II* sînt paralele, adică $\theta_1 = \theta_2$.

Linia V. Prin suprimarea barei se obține mecanismul din fig. 7.59, *h*. Relațiile cu care se determină centrele de rotație au aceeași formă ca la linia de influență a efortului *D*.

Montantul fiind vertical, deplasarea virtuală unitară se va da pe direcția verticală. Punctele de la extremitățile montantului vor avea o deplasare relativă pe verticală de mărime 1. Această cantitate apare direct în epura de deplasări verticală determinind scara liniei de influență

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{l} = \frac{1}{2l}.$$

7.3. ARCE STATIC DETERMINATE

7.3.1. DEFINIȚII. NOMENCLATURĂ. CLASIFICARE

Arcele sînt bare cu axa după o curbă plană și sînt încărcate în planul curbei. În general, încărcările acționează în sens invers convexității arcului ceea ce face să se dezvolte în rezemări (în afară de arcul simplu rezemat). împingeri laterale (componente orizontale ale reacțiunilor, fig. 7.60, *a*). De aceea, în secțiunile transversale ale arcelor se dezvoltă eforturi axiale de compresiune cu efecte mai importante decît momentele încovoietoare și forțele tăietoare.

În alcătuirea structurilor de rezistență pentru construcții se folosesc arce cu curbură mică, $1/\rho < 1/8$ (v. fig. 7.60, *a*), caz în care se poate admite ipoteza secțiunilor plane a lui Bernoulli și formula lui Navier pentru calculul eforturilor unitare σ din momente încovoietoare. Secțiunile transversale ale arcului sînt solicitate la compresiune excentrică.

La arce, nomenclatura obișnuită este următoarea (fig. 7.60, *b*):

Punctele de rezemare la teren (A și B) se numesc nașterile arcului, linia AB se numește linia nașterilor. Punctul cel mai depărtat de linia nașterilor C se numește cheia arcului, care la arcul cu trei articulații coincide cu articulația interioară.

Distanța pe orizontală între nașterile arcului (l) se numește deschiderea arcului iar distanța pe verticală între cheie și linia nașterilor (f) se numește săgeata arcului. Raportul dintre săgeată și deschidere (f/l) se numește coeficient de înălțare.

Fața exterioară (convexă) poartă numele de extrados, iar cea interioară (concavă) poartă numele de intrados.

Secțiunile transversale ale arcelor pot fi constante sau pot varia după anumite legi. Arcele pot avea secțiune plină sau discontinuă cum este în cazul arcelor cu zăbrele (grinzi cu zăbrele cu nodurile tălpilor așezate pe curbe, fig. 7.60, *c*).

Arcele la care înălțimea secțiunii este mai mică decît lățimea se mai numesc și bolți (plăci groase curbe). În general, în construcții se folosesc arce la care înălțimea secțiunii $h < 1/10\rho$.

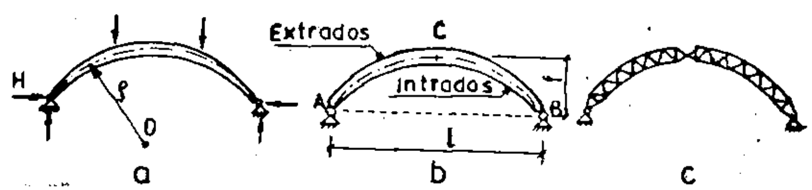


Fig. 7.60.

Clasificarea arcelor din punctul de vedere al schemei statice, adică după numărul de legături și modul de rezemare, este următoarea:

— arce static determinate: arcul simplu rezemat (fig. 7.61, *a*), arcul cu trei articulații (fig. 7.61, *b*), la care împingerile sînt preluate de reazeme, arcul cu tirant (fig. 7.61, *c*), care se folosește cînd reazemele nu pot prelua împingerile;

— arce static nedeterminate: arcul dublu articulat (fig. 7.61, *d*), arcul cu tirant (fig. 7.61, *e*), arcul dublu încastrat (fig. 7.61, *f*).

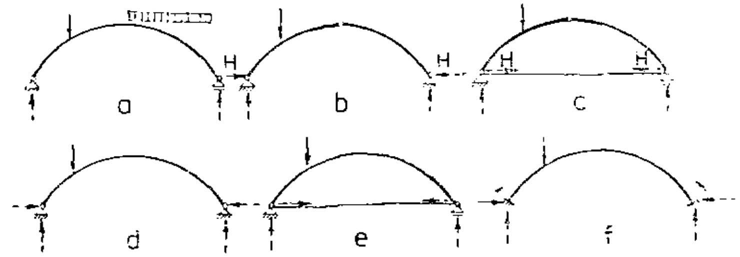


Fig. 7.61.

Bare curbe se mai întîlnesc ca elemente componente în diverse structuri de rezistență, cadre cu bare curbe (fig. 7.62, *a*), arce continue (fig. 7.62, *b*) etc.



Fig. 7.62.

7.3.2. RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE EFORTURI ȘI ÎNCĂRCĂRI

Eforturile într-o secțiune se definesc față de un sistem de axe propriu secțiunii formate din tangenta la arc, normala în planul arcului și normala pe planul arcului (fig. 7.63, *a*). În raport cu acest sistem de axe eforturile N, T și M se definesc ca la bara dreaptă, cu observația că la arce direcțiile lor variază de la o secțiune la alta.

Pentru stabilirea relațiilor diferențiale între încărcări și eforturi, se scriu condițiile de echilibru pentru un element infinitezimal de arc, ds (fig. 7.63, *b*). Pe acest element, rezultanta încărcării distribuite pds se descompune în componenta normală $p_n ds$ și tangențială $p_t ds$.

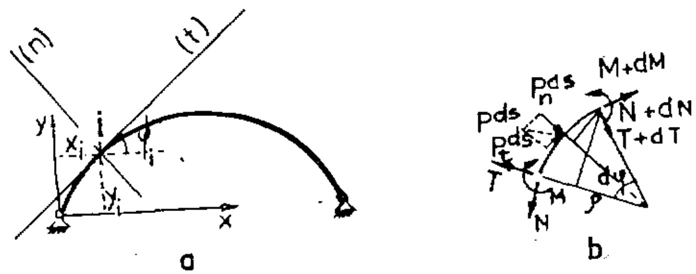


Fig. 7.63.

La capetele elementului vor acționa eforturile N, T, M și respectiv $N + dN$, $T + dT$ și $M + dM$, unde dN, dT și dM reprezintă variațiile eforturilor pe lungimea elementului ds. Ecuațiile de echilibru, proiecțiile pe normala și tangenta corespunzătoare feței din dreapta și momentul în raport cu centrul de greutate al acestei fețe sînt

$$N + dN - N \cos d\varphi - T \sin d\varphi + p_t \, ds \cos d\varphi/2 + p_n \, ds \sin d\varphi/2 = 0$$

$$T + dT - T \cos d\varphi + N \sin d\varphi + p_n \, ds \cos d\varphi/2 - p_t \, ds \sin d\varphi/2 = 0$$

$$M - M - dM + T\rho \sin d\varphi - N\rho(1 - \cos d\varphi) - p_n \, ds \, \rho \sin d\varphi/2 + \\ + p_t \, ds \, \rho(1 - \cos d\varphi/2) = 0.$$

Cum $ds = \rho \, d\varphi$ (ρ fiind raza de curbură considerată constantă pentru elementul ds), $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $\cos d\varphi \approx 1$ și neglijînd infiniții mici de ordin superior, rezultă

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho}; \qquad \frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho}; \qquad \frac{dM}{ds} = T. \qquad (7.9)$$

Particularizînd aceste relații pentru $\rho = \infty$, se regăsesc relațiile diferențiale de la bara dreaptă.

Utilizarea acestor relații la trasarea diagramelor de eforturi la bare curbe este incomodă datorită intervenției razei de curbură și raportării la elementul ds de pe curbă. De aceea, în general, la arce diagramele de eforturi se trasează calculînd eforturile într-un număr suficient de secțiuni ale arcului (10–20 secțiuni).

7.3.3. EXPRESIILE GENERALE ALE EFORTURILOR

La arce static determinate, reacțiunile se determină ca la cadre pe baza ecuațiilor de echilibru static. Convenția de semne pentru eforturi adoptată la bare drepte se folosește și la arce.

Presupunînd reacțiunile determinate, se pot stabili expresiile generale ale eforturilor într-o secțiune oarecare j prin reducerea forțelor din stînga secțiunii în centrul de greutate al secțiunii (fig. 7.64). O forță oarecare F_i acționînd în punctul de coordonate (x_i, y_i) se consideră prin componentele ei P_{ix} și P_{iy}. Expresiile eforturilor într-o secțiune oarecare j de coordonate (x_j, y_j) și înclinare φ_j sînt

$$N_j = -V_A \sin \varphi_j + (\sum_A^j P_{iy}) \sin \varphi_j - H_A \cos \varphi_j - (\sum_A^j P_{ix}) \cos \varphi_j$$

$$T_j = V_A \cos \varphi_j - (\sum_A^j P_{iy}) \cos \varphi_j - H_A \sin \varphi_j - (\sum_A^j P_{ix}) \sin \varphi_j \qquad (7.10)$$

$$M_j = V_A x_j - \sum_A^j P_{iy}(x_j - x_i) - H_A y_j - \sum_A^j P_{ix}(y_j - y_i).$$

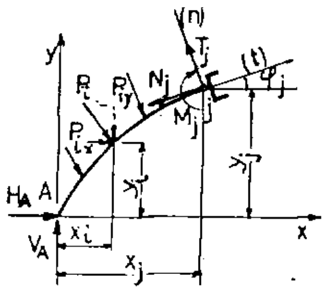


Fig. 7.64.

Aceste eforturi pot fi exprimate în funcție de eforturile T_j^0 și M_j^0 ca la o grindă dreaptă simplu rezemată avînd aceeași deschidere cu arcul și aceleași încărcări

$$N_j = -T_j^0 \sin \varphi_j - (H_A + \sum_A^j P_{ix}) \cos \varphi_j$$

$$T_j = T_j^0 \cos \varphi_j - (H_A + \sum_A^j P_{ix}) \sin \varphi_j \qquad (7.11)$$

$$M_j = M_j^0 - H_A y_j - \sum_A^j P_{ix}(y_j - y_i).$$

Aceste expresii generale se vor particulariza în continuare pentru arcul simplu rezemat și arcul cu trei articulații supuse la încărcări verticale.

7.3.4. ARCUL SIMPLU REZEMAT

Pentru arcul simplu rezemat cu încărcări verticale (fig. 7.65) componentele orizontale ale reacțiunilor sînt nule ($H_A = H_B = 0$).

Reacțiunile verticale se obțin din ecuații de momente în raport cu nașterile A și B

$$V_A = \sum_A^B P_i b_i/l; \quad V_B = \sum_A^B P_i a_i/l.$$

Expresiile eforturilor într-o secțiune oarecare j a arcului vor fi ($H_A = 0$, $P_{ix} = 0$ în expresiile generale)

$$N_j = -T_j^0 \sin \varphi_j; \; T_j = T_j^0 \cos \varphi_j; \quad M_j = M_j^0$$

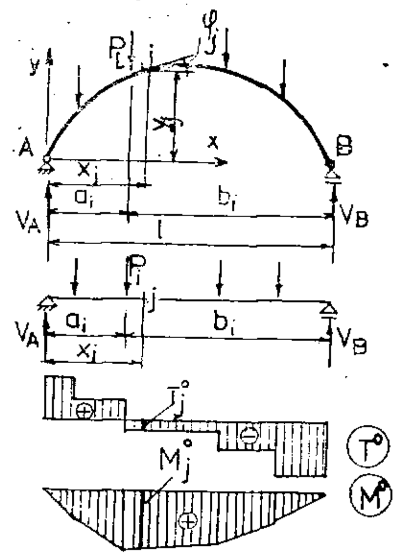


Fig. 7.65.

în care T_j^0 și M_j^0 sînt eforturile în secțiunea j pe grinda simplu rezemată echivalentă (fig. 7.65).

Din aceste expresii se vede că pe arcul simplu rezemat cu încărcări verticale se dezvoltă aceleași momente încovoietoare ca pe grinda simplu rezemată. Deci arcul simplu rezemat, neavînd împingeri, din punctul de vedere al momentelor încovoietoare nu lucrează mai avantajos decît grinda simplu rezemată. Diferența este că în arc apar și eforturi axiale, forța tăietoare de pe grinda simplu rezemată fiind egală cu rezultanta eforturilor N_j și T_j din arc: $(T_j^0)^2 = N_j^2 + T_j^2$.

7.3.5. ARCUL CU TREI ARTICULAȚII

Pentru arcul cu trei articulații avînd nașterile la același nivel și încărcări verticale (fig. 7.66, *a*) reacțiunile verticale se determină din ecuații de momente în raport cu nașterile, iar împingerile, din ecuația de moment încovoietor nul în articulația de la cheie (pentru forțe din stînga sau din dreapta)

$$V_A = \Sigma P_i b_i/l; \; V_B = \Sigma P_i a_i/l; \; H_A = H_B = H = M_c^0/f.$$

Expresiile eforturilor într-o secțiune oarecare a arcului în funcție de eforturile pe grinda simplu rezemată, sînt:

$$N_j = -T_j^0 \sin \varphi_j - H \cos \varphi_j$$

$$T_j = T_j^0 \cos \varphi_j - H \sin \varphi_j$$

$$M_j = M_j^0 - H y_j.$$

Momentul încovoietor într-o secțiune a arcului rezultă din diferența între momentul pe grinda dreaptă și momentul produs de împingerea arcului (v. fig. 7.66, *a*).

De aici rezultă că arcul cu trei articulații (la care apar împingeri) lucrează mai favorabil decît grinda dreaptă, avînd momente încovoietoare mai mici.

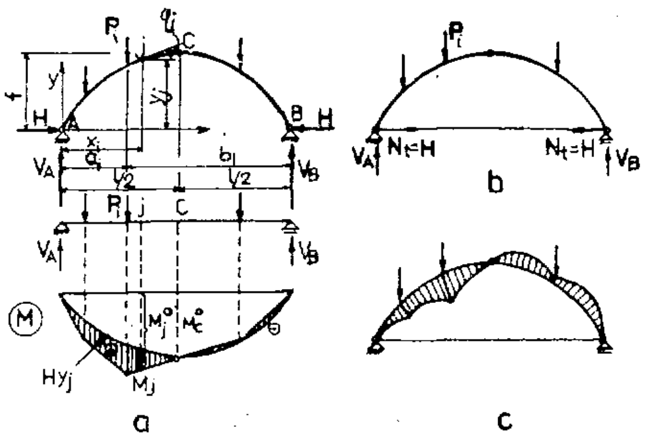


Fig. 7.66.

Pentru arcul static determinat cu tirant (fig. 7.66, *b*) încărcat cu forțe verticale se obțin aceleași eforturi ca la arcul cu trei articulații deoarece efortul în tirant N_t preia rolul împingerii.

În fig. 7.66, *c* este reprezentată diagrama de momente încovoietoare raportată la axa arcului.

7.3.6. CALCULUL GRAFIC AL ARCULUI CU TREI ARTICULAȚII

Determinarea reacțiunilor și eforturilor pe cale grafică se face cu ajutorul poligonului de forțe și a poligonului funicular, așa cum se explică pe fig. 7.67.

În fig. 7.67 *b* se prezintă la scară poligonul de forțe care pentru forțe active ($P_1, \ldots, P_4$) verticale, este o linie verticală. Pentru echilibru, forțele active

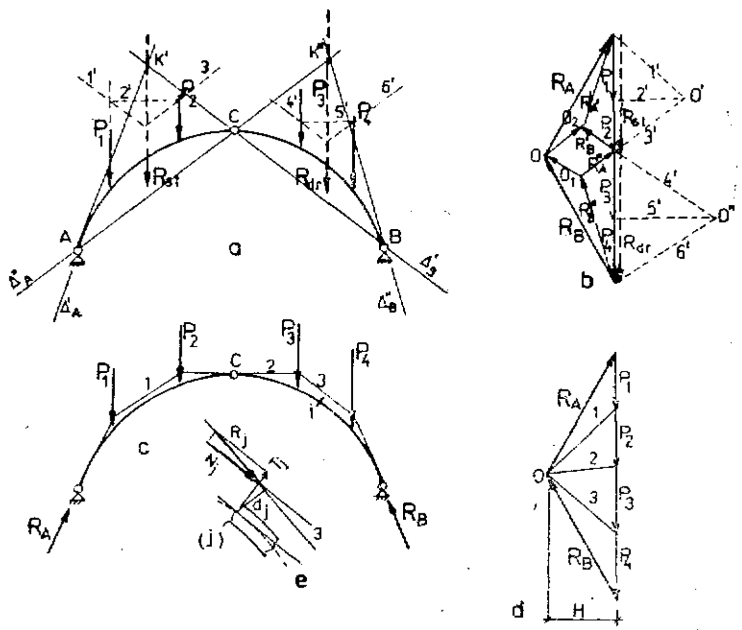


Fig. 7.67.

trebuie să se închidă cu reacțiunile R_A și R_B. La determinarea grafică a reacțiunilor se aplică principiul suprapunerii efectelor considerînd arcul încărcat numai pe partea stîngă și apoi numai pe partea dreaptă. Cu ajutorul a doi poli arbitrari O' și O'' se determină (fig. 7.67, *a*) cu ajutorul poligoanelor funiculare (1', 2', 3') și (4', 5', 6') pozițiile rezultantelor forțelor de pe partea stîngă (R_{st}) și a forțelor de pe partea dreaptă a arcului (R_{dr}). Mărimile și direcțiile (verticale) acestor rezultante rezultă în poligonul de forțe. Cînd este încărcată numai partea $A-C$ a arcului, rezultanta R_{st}, fiind în echilibru cu reacțiunile R'_A și R'_B pe care le dă în A și B, trebuie să se întîlnească în același punct K'. Reacțiunea R'_B în acest caz va trece prin articulația C deoarece ramura $B-C$ este neîncărcată. La intersecția ei cu suportul rezultantei R_{st} rezultă punctul K' prin care va trece și R'_A (găsindu-i astfel direcția). În poligonul de forțe se duc prin extremitățile rezultantei R_{st} paralele la BCK' și AK', rezultînd mărimile și sensurile pentru R'_A și R'_B prin închiderea gonului de forțe R_{st}, R'_B și R'_A (condiția grafică de echilibru).

Asemănător, considerînd numai partea $C-B$ încărcată, se determină reacțiunile R''_A și R''_B din rezultanta R_{dr}.

Rămîn acum de compus aceste reacțiuni parțiale pentru a găsi reacțiunile totale corespunzătoare încărcării arcului pe ambele părți. Aceasta se face ducînd paralele prin O_2 la R'' și prin O_1 la R'_B la intersecția cărora se obține punctul O.

Unind O cu originea poligonului de forțe se obține R_A și unind extremitatea poligonului de forțe cu O se obține R_B.

Poligonul închis R_A, $P_1, \ldots, P_4$, R_B exprimă echilibrul arcului. În poligonul de forțe rezultă și reacțiunea R_C la cheie.

Luînd ca pol punctul O, se duc razele polare corespunzătoare forțelor active; prima rază este chiar R_A, iar ultima rază polară este R_B. Se construiește poligonul funicular ducînd paralele la aceste raze, poligon ce trece prin A, C și B (obligat) datorită poziției particulare a polului O (fig. 7.67, *c*).

Cu ajutorul poligonului de forțe cu polul în O și a poligonului funicular corespunzător (poligonul prin trei puncte) se pot determina și eforturile în orice secțiune (fig. 7.67, *d*).

Poligonul de forțe respectiv are proprietatea că orice rază polară reprezintă ca mărime și direcție rezultanta forțelor exterioare (inclusiv reacțiunea R_A) de la stînga, iar latura corespunzătoare din poligonul funicular dă suportul acestei rezultante. Deci, cu ajutorul lor se cunoaște pentru orice secțiune mărimea și poziția rezultantei forțelor din stînga secțiunii care determină eforturile în secțiune. Astfel, în fig. 7.67, *e* se prezintă determinarea eforturilor într-o secțiune j aflată între P_3 și P_4. Latura de funicular cuprinsă între P_3 și P_4 reprezintă suportul rezultantei R_j a forțelor din stînga secțiunii j. În punctul j de pe raza arcului se duce normala pe R_j și se descompune R_j după tangenta la arc în j și normală, determinînd eforturile N_j și T_j. Momentul încovoietor $M_j = R_j d_j = N_j e_j$, unde d_j se măsoară pe normala din j la latura poligonului funicular, iar e_j pe normala la arc și reprezintă excentricitatea forței normale.

Deoarece componenta principală a lui R este forța normală de compresiune N_j, poligonul funicular particular ale cărui laturi reprezintă suportul rezultantei forțelor din stînga unei secțiuni pe arc se numește *poligon de presiune*.

În cazul încărcărilor distribuite, poligonul funicular devine o curbă numită *curbă de presiune*.

Pentru încărcări verticale, momentul încovoietor în secţiunea j se obţine mai simplu descompunînd rezultanta R_j în componente verticală V_j şi orizontală H, aceeaşi pentru orice secţiune (egală cu împingerea arcului determinată în poligonul de forţe, fig. 7.67, *d*). Rezultă $M_j = \overline{jj'} \cdot H$, adică diagrama de momente încovoietoare este dată de suprafaţa cuprinsă între arc şi poligonul funicular cu ordonate măsurate pe verticală şi multiplicate cu împingerea H.

7.3.7. FORMA OPTIMĂ A AXEI ARCULUI. ARCE DE COINCIDENŢĂ

Calculele de rezistenţă pentru secţiunile unui arc se fac la solicitarea de încovoiere cu forţă axială (compresiune excentrică)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y.$$

Din această formulă se vede importanţa reducerii momentelor încovoietoare pentru dimensionarea economică a arcelor. Din cele arătate în paragraful anterior rezultă că momentele sînt cu atît mai mici cu cît curba de presiune este mai aproape de axa arcului. Cum curba de presiune nu depinde de forma arcului ci numai de încărcări şi de poziţia celor trei articulaţii, axa arcului se poate lua între articulaţii cît mai aproape de curba de presiune a forţelor date. Cînd axa arcului coincide cu curba de presiune, momentele încovoietoare sînt nule şi secţiunile arcului sînt solicitate numai la eforturi axiale. Aceste arce se numesc *arce de coincidenţă*.

Pentru încărcări permanente, care nu depind de forma axei arcului, coincidenţa se poate realiza simplu luînd ca axă a arcului curba de presiune care trece prin cele trei articulaţii.

Astfel, pentru arcul simetric cu trei articulaţii supus la o încărcare uniform distribuită verticală pe toată deschiderea (fig. 7.68, *a*) punînd condiţia de coincidenţă

$$M_x = M_x^0 - Hy = 0$$

$$M_x^0 = V_x - \frac{px^2}{2} = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2} \text{ şi } H = \frac{M_c^0}{f} = \frac{pl^2}{8f};$$

rezultă :

$$y = \frac{M_x^0}{H} = \frac{\frac{px}{2}(l-x)}{\frac{pl^2}{8f}} \text{ sau } y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

deci arcul de coincidenţă este arcul parabolic.

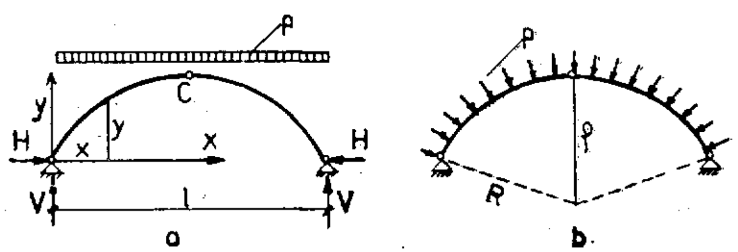


Fig. 7.68.

Axa de coincidenţă la arcul cu trei articulaţii, pentru încărcare uniform distribuită radial (fig. 7.68, *b*), rezultă mai simplu plecînd de la relaţiile diferenţiale între încărcări şi eforturi

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho}; \quad \frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho}; \quad \frac{dM}{ds} = T$$

în care, introducînd $p_t = 0$, $p_n = p$ şi condiţia de coincidenţă $M = 0$ ($T = 0$), rezultă : $N = \text{const}$ şi $\rho = -N/p = \text{const}$ şi deci forma de coincidenţă este arcul circular ($\rho = R$).

Pentru încărcări permanente care depind de forma arcului (umplutura la podeţe boltite, pereţii pentru susţinerea tablierului, greutatea proprie a arcului), forma optimă a axei arcului se determină prin încercări succesive. Se pleacă de la o formă iniţială cunoscută (parabolă, de exemplu) pe baza căreia se determină încărcările permanente concentrate pe tronsoane de arc numite bolţari. Se construieşte curba de presiune corespunzătoare. Cu această curbă luată ca axă se determină noi încărcări permanente şi o nouă curbă de presiune. Se continuă înlocuirea axei cu noua curbă pînă la realizarea coincidenţei.

7.3.8. LINII DE INFLUENŢĂ LA ARCUL SIMPLU REZEMAT

Metoda funcţiilor de influenţă. Liniile de influenţă pentru reacţiuni şi eforturi la arcul simplu rezemat se obţin uşor din liniile de influenţă de la grinda dreaptă simplu rezemată pe baza relaţiilor stabilite la încărcări fixe (fig. 7.69).

Reacţiunile pe arcul simplu rezemat (V_A, V_B), avînd aceleaşi funcţii de influenţă cu cele pe grinda dreaptă simplu rezemată (V_A^0, V_B^0), vor avea şi aceleaşi linii de influenţă

$$V_A = \frac{1 \cdot x'}{l} = V_A^0 \text{ şi } V_B = \frac{1 \cdot x}{l} = V_B^0.$$

Liniile de influenţă ale eforturilor N_j şi T_j se obţin din linia de influenţă a forţei tăietoare T_j^0 de la grinda dreaptă simplu rezemată prin multiplicare cu o constantă

$$N_j = -T_j^0 \sin \varphi_j; \; T_j = T_j^0 \cos \varphi_j.$$

Linia de influenţă a momentului încovoietor M_j coincide cu linia de influenţă a momentului în aceeaşi secţiune pe grinda dreaptă simplu rezemată, deoarece $M_j = M_j^0$.

Metoda cinematică. Se aplică la fel ca la bare şi sisteme de bare drepte. Se suprimă legătura pe direcţia mărimii statice pentru care se determină linia de influenţă, în locul legăturii suprimate introducîndu-se mărimea statică respectivă. Se obţine un mecanism cu un grad de libertate acţionat de un grup de două forţe în echilibru : $P = 1$, mobilă pe linia de încărcare

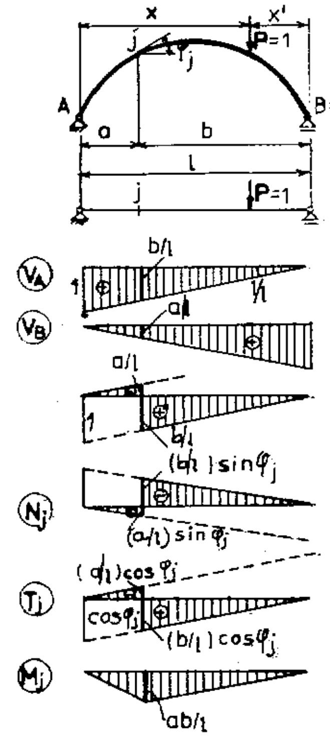


Fig. 7.69.

(axa arcului), şi mărimea statică S de determinat. Scriind condiţia de echilibru pe baza principiului lucrului mecanic virtual

$$S\Delta_S + Py = 0$$

în care Δ_S este deplasarea pe direcţia mărimii statice respective şi y deplasarea pe direcţia forţei mobile $P = 1$, rezultă

$$S = y \text{ pentru } \Delta_S = -1.$$

Deci, linia de influenţă a unei mărimi statice se obţine ca o diagramă de deplasări (y) pe direcţia forţei mobile $P = 1$ (verticală) produsă de o deplasare unitară dată în sens invers pe direcţia necunoscutei respective.

Aplicarea acestei metode pentru reacţiuni şi eforturi la arcul simplu rezemat se poate urmări pe fig. 7.70.

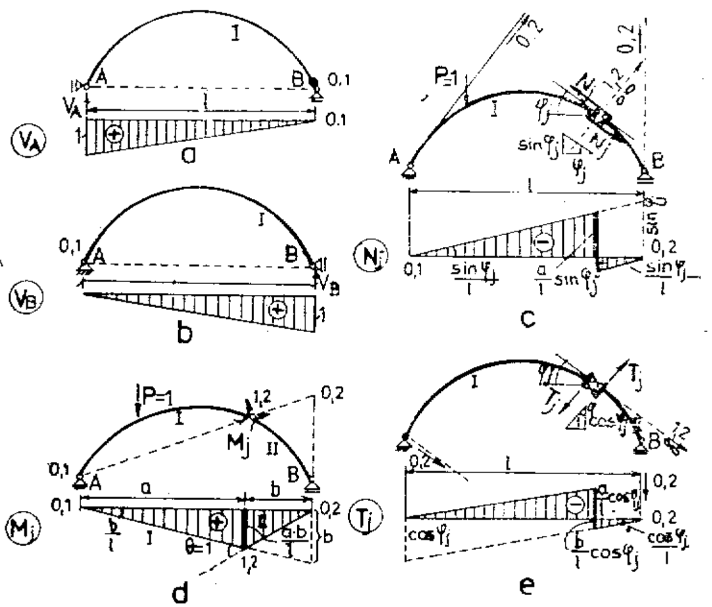


Fig. 7.70.

Pentru linia de influenţă a reacţiunii V_A (fig. 7.70, *a*) se suprimă legătura pe verticală în articulaţia A, unde rămîne un reazem simplu şi se introduce forţa V_A. Se obţine mecanismul în echilibru. Se dă o deplasare în sens invers sensului forţei V_A şi se obţine epura deplasărilor. Această epură, la o anumită scară şi cu un anumit semn, constituie linia de influenţă. Deplasările fiind sub linia de referinţă, forţa $P = 1$ efectuează lucru mecanic pozitiv şi deci semnul liniei de influenţă este pozitiv. Orice ordonată poate fi calculată plecînd de la scara liniei de influenţă care este dată de deplasarea unitară pe direcţia necunoscutei V_A, deci ordonata din dreptul reazemului A este egală cu unitatea.

La fel se procedează pentru determinarea liniei de influenţă a reacţiunii V_B (fig. 7.70, *b*).

Pentru linia de influenţă a efortului axial N_j, mecanismul secţionat are doi penduli paraleli, perpendiculari pe bară, care permit deplasarea relativă

între cele două feţe ale secţiunii după tangenta la arc (fig. 7.70, *c*). Se obţine un mecanism format din două corpuri pentru care se determină centrele instantanee de rotaţie. Diagrama de deplasări se obţine dînd o rotaţie corpului I în sens invers efortului N_j, adică antiorar. Luînd deplasarea egală cu unitatea pe direcţia necunoscutei (după tangenta la arc în secţiune), rezultă o deplasare relativă pe verticală egală cu sin φ_j care reprezintă scara liniei de influenţă. Deoarece deplasarea a fost dată în sens invers necunoscutei, partea din linia de influenţă de deasupra liniei de referinţă are semnul minus iar partea de sub linia de referinţă are semnul plus.

Pentru linia de influenţă a forţei tăietoare T_j (fig. 7.70, *d*) se procedează analog ca la efortul axial. Suprimînd o legătură în secţiune rămîn doi penduli paraleli cu tangenta la arc. Scara liniei de influenţă este dată de deplasarea relativă, pe verticală, între cele două feţe ale secţiunii (cos φ_j).

Pentru linia de influenţă a momentului încovoietor M_j, suprimînd legătura corespunzătoare, în secţiune rămîne o articulaţie care permite deplasarea pe direcţia momentului (rotire relativă) (fig. 7.70, *e*). Pentru obţinerea diagramei de deplasări, se dă o rotire corpului I în sens invers momentului M_j (deci orar). Diagrama de deplasare fiind sub linia de referinţă, linia de influenţă are semnul plus. Scara liniei de influenţă este dată de rotirea relativă unitară între corpurile I şi II ($\theta_{1,2} = 1$). Plecînd de la această scară, se obţine ordonata de vîrf a liniei de influenţă (ab/l), din dreptul secţiunii, cu ajutorul căreia se poate determina în continuare orice din ordonate.

7.3.9. LINII DE INFLUENŢĂ LA ARCUL CU TREI ARTICULAŢII

Metoda funcţiilor de influenţă. Calculul la încărcări fixe a condus la expresii generale pentru reacţiuni şi eforturi la arcul cu trei articulaţii în funcţie de împingerea H a arcului şi eforturile pe grinda dreaptă de aceeaşi deschidere. Aceste expresii se pot folosi şi la determinarea liniilor de influenţă cum se prezintă în fig. 7.71.

Liniile de influenţă ale reacţiunilor verticale sînt aceleaşi ca la grinda simplu rezemată, deoarece rezultă din aceleaşi ecuaţii : $V_A = x'/l = V_A^0$, $V_B = x/l = V_B^0$.

Linia de influenţă a împingerii H se obţine împărţind ordonatele liniei de influenţă a momentului în dreptul secţiunii de la cheie C la săgeata arcului f: $H = M_C^0/f$. Ordonata din dreptul cheii este

$$\eta_c = a_c b_c/lf = l/2 \cdot l/2 \cdot 1/lf = l/4f.$$

Linia de influenţă a efortului axial N_j se obţine prin suprimarea liniilor de influenţă a forţei tăietoare pe grinda dreaptă T_j^0 şi a împingerii H conform relaţiei

$$N_j = -T_j^0 \sin \varphi_j - H \cos \varphi_j$$

în care φ_j este înclinarea tangentei la axa arcului.

Linia de influenţă a forţei tăietoare T_j se obţine prin suprapunerea următoare

$$T_j = T_j^0 \cos \varphi_j - H \sin \varphi_j.$$

Linia de influenţă a momentului încovoietor M_j se obţine scăzînd din ordonatele liniei de influenţă a momentului din secţiunea j pe grinda dreaptă, ordonatele liniei de influenţă a împingerii H multiplicate cu ordonata y_j a secţiunii, conform relaţiei

$$M_j = M_j^0 - Hy_j.$$

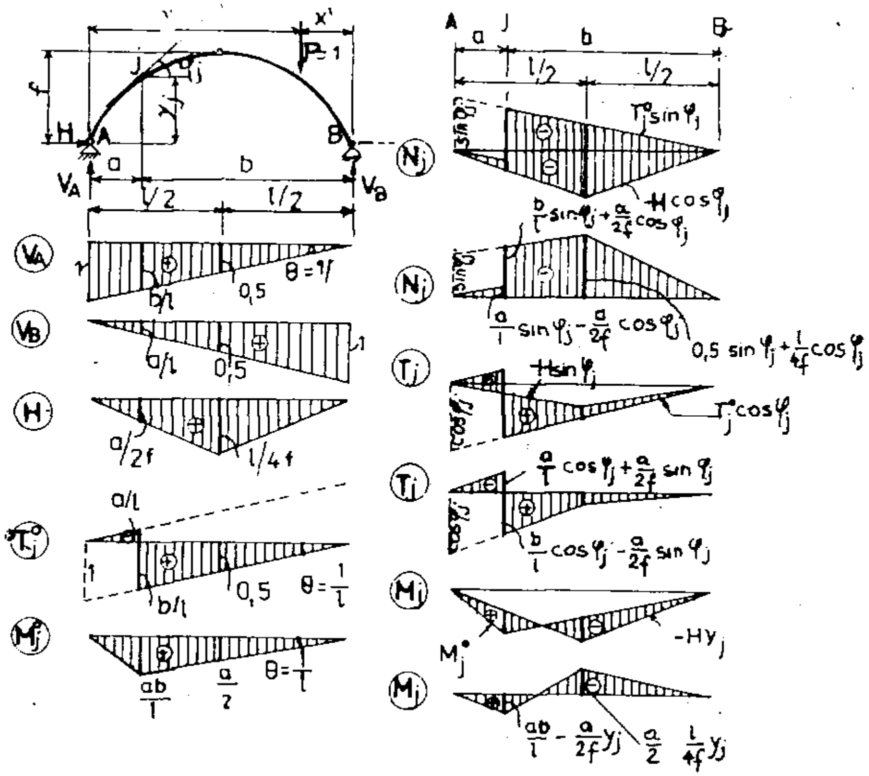


Fig. 7.71.

În fig. 7.71 sînt reprezentate liniile de influență prin suprapunere de funcții cît și forma lor finală.

Metoda cinematică. Determinarea liniilor de influență pentru reacțiuni și eforturi se poate urmări pe fig. 7.72.

Linia de influență a reacțiunii V_A (fig. 7.72, *a*) este dată de deplasata mecanismului produsă de o deplasare unitară în sens invers reacțiunii V_A. La fel se procedează pentru linia V_B(fig. 7.72, *b*).

Pentru linia de influență a împingerii $H = H_A = H_B$ (fig. 7.72, *c*) se suprimă legătura pe orizontală în A și se determină centrele instantanee de rotație pentru cele două corpuri din mecanism. Se dă corpului I o deplasare unitară pe orizontală invers împingerii H, deci corpul I se rotește față de linia de referință orar cu $\theta = 1/(f + h) = 1/2f$ pentru că din geometria figurii rezultă $h = f$.

Semnul liniei de influență este plus deoarece se află sub linia de referință și forța $P = 1$ efectuează lucrul mecanic pozitiv. Ordonata maximă va fi

$$\eta_c = \theta \frac{l}{2} = \frac{1}{2f} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{4f}.$$

Pentru linia de influență a efortului axial N_j într-o secțiune oarecare pe arc (fig. 7.72, *d*), suprimînd legătura respectivă, se formează un mecanism alcătuit din trei corpuri. Dînd o deplasare unitară în sens invers efortului axial, corpul I se rotește de la linia de referință în sens antiorar. Semnul liniei de influență este minus, deoarece $P = 1$ efectuează lucru mecanic pozitiv.

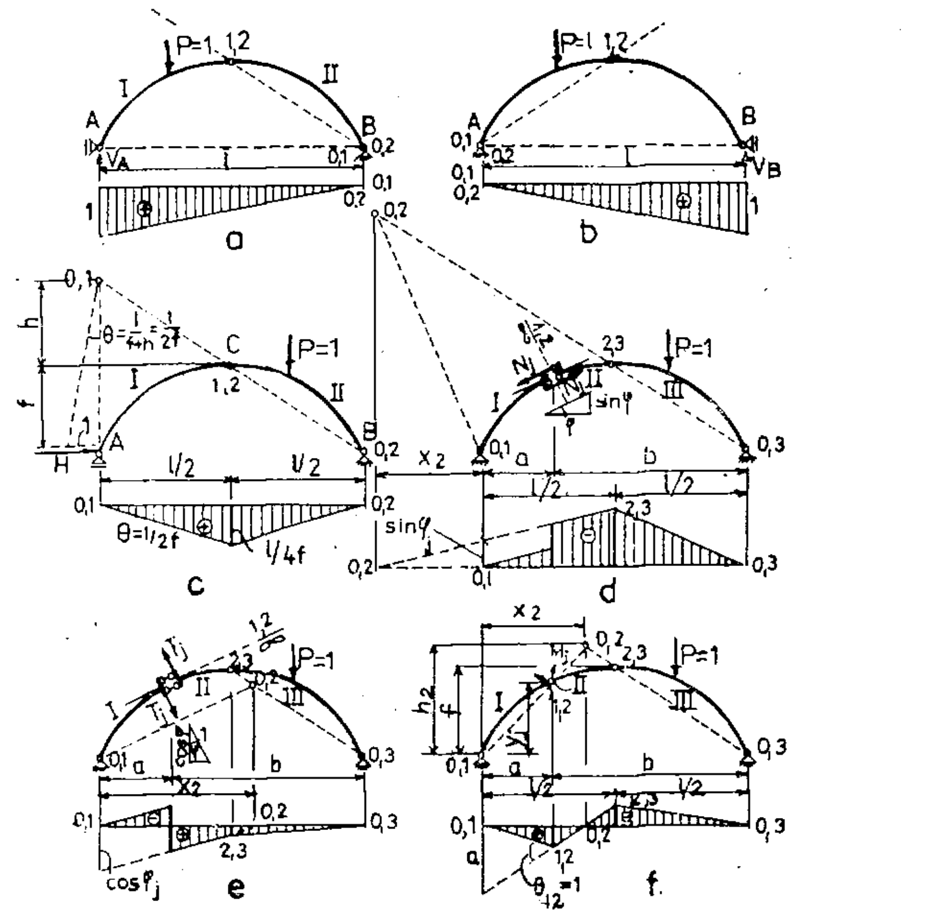


Fig. 7.72.

Scara liniei de influență rezultă din deplasarea unitară dată pe direcția N_j și deci proiecția pe direcția $P = 1$ este $\sin \varphi_j$.

Se procedează la fel și pentru linia de influență a forței tăietoare T_j (fig. 7.72, *e*). Dînd o deplasare în sens invers forței tăietoare T_j, corpul I se rotește antiorar în jurul lui $(0, 1)$. Partea aflată deasupra liniei de referință este negativă, iar cea aflată dedesubt este pozitivă. Scara rezultă din deplasarea unitară normală pe tangenta la arc în secțiune, și anume deplasarea relativă pe verticală între cele două corpuri paralele I și II este $\cos \varphi_j$.

Plecînd de la această scară, pe baza geometriei figurii, se poate calcula orice ordonată din linia de influență.

Pentru linia de influență a momentului încovoietor M_j într-o secțiune, se suprimă o legătură, în secțiune rămînînd o articulație. În locul legăturii suprimate se introduce momentul încovoietor M_j, care trebuie să fie în echilibru, pe mecanismul format, cu forța $P = 1$ mobilă. Centrul instantaneu $(0, 2)$ rezultă pe baza teoremei coliniarității la intersecția dreptelor $(0,1) - (1,2)$ cu $(0,2) - (2,3)$. Poziția centrului $(0,2)$ rezultă din geometria figurii

$$y_j/a = h_2/x_2\ ;\ f/(l/2) = h_2/(l - x_2)\ ;\ x_2 = 2fla/(2fa + ly_j).$$

Diagrama de deplasări pe verticală se obține din deplasarea unitară dată în sens invers necunoscutei (fig. 7.72, f).

Partea de deasupra liniei de referință are semnul minus și cea de sub linia de referință semnul plus. Ordonatele se pot calcula plecînd de la rotirea relativă între corpurile I și II, $\theta_{1,2} = 1$.

Observație. Pentru arcul cu tirant static determinat, liniile de influență sînt identice cu cele de la arcul cu trei articulații, linia de influență a efortului în tirant fiind identică cu a împingerii la arcul cu trei articulații.

Aplicația 7.6. Să se construiască diagramele de momente încovoietoare M, forță tăietoare T și forță axială N, pentru arcul cu trei articulații, prezentat în fig. 7.73, a.

Axa arcului este o parabolă de gradul doi, dată de ecuația

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x) = \frac{4\cdot 4(12-x)x}{144} = 1{,}333\,x - 0{,}111\,x^2.$$

Mărimile eforturilor M, T, N se vor determina într-un număr de 13 secțiuni pe baza relațiilor

$$N_x = -T_x^0 \sin\varphi - H\cos\varphi$$

$$T_x = T_x^0 \cos\varphi - H\sin\varphi$$

$$M_x = M_x^0 - Hy$$

unde : T_x^0 și M_x^0 reprezintă forța tăietoare și momentul încovoietor în secțiunea x a unei grinzi simplu rezemate orizontale de deschidere $l = 12$ m, încărcată cu sistemul de forțe verticale prezentat în fig 7.73, a.

În fig. 7.73, b sînt prezentate diagramele T_x^0 și M_x^0, precum și valorile în 12 secțiuni echidistante ($\Delta x = 1$ m).

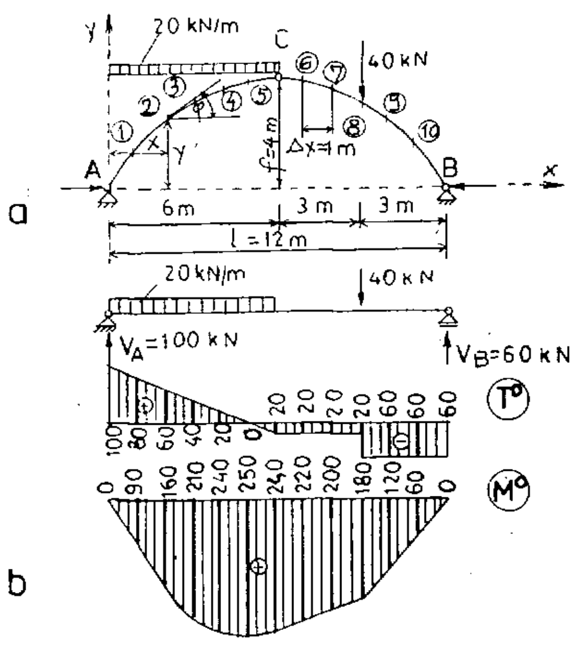


Fig. 7.73.

Tabelul 7.1

Secțiunea	x m	y m	tg φ	$\sqrt{1+tg^2\varphi}$	sin φ	cos φ	T_x^0 kN	M_x^0 kN·m	Hy kN·m	M_x kN·m	$T_x^0\cos\varphi$ kN	$H\sin\varphi$ kN	T_x kN	$T_x^0\sin\varphi$ kN	$H\cos\varphi$ kN	N_x kN
								$M_x = M_x^0 - Hy$			$T_x = T_x^0\cos\varphi - H\sin\varphi$			$N_x = -T_x^0\sin\varphi - H\cos\varphi$		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	0	0	1,333	1,666	0,800	0,600	100	0	0	0	60,0	48,0	12,0	80,0	36,0	−116,0
1	1	1,222	1,111	1,495	0,743	0,669	80	90	73,3	16,7	53,5	44,6	8,9	59,4	40,1	− 99,5
2	2	2,222	0,889	1,338	0,664	0,747	60	160	133,3	26,7	44,8	39,8	5,0	39,8	44,8	− 84,6
3	3	3,000	0,667	1,202	0,555	0,832	40	210	180,0	30,0	33,3	33,3	0	22,2	49,9	− 72,1
4	4	3,556	0,444	1,094	0,406	0,914	20	240	213,3	26,7	18,3	21,4	−6,1	8,1	54,8	− 62,9
5	5	3,889	0,222	1,024	0,217	0,976	0	250	233,3	16,7	0	13,0	−13,0	0	58,6	− 58,6
C	6	4,000	0	1,000	0	1,000	−20	240	240,0	0	−20,0	0	−20,0	0	60,0	− 60,0
6	7	3,889	−0,222	−1,024	−0,217	0,976	−20	220	233,3	−13,3	−19,5	−13,0	− 6,5	4,3	58,6	− 62,9
7	8	3,556	−0,444	−1,094	−0,406	0,914	−20	200	213,3	−13,3	−18,3	−24,4	6,1	8,1	54,8	− 62,9
8	9	3,000	−0,667	−1,202	−0,555	0,832	−20 −60	180	180,0	0	−16,6 −49,9	−33,3	16,7 −16,6	11,1 33,3	49,9	− 61,0 − 83,2
9	10	2,222	−0,889	−1,338	−0,664	0,747	−60	120	133,3	−13,3	−44,8	−39,8	− 5,0	39,8	44,8	− 84,6
10	11	1,222	−1,111	−1,495	−0,743	0,669	−60	60	73,3	−13,3	−40,1	−44,6	4,5	44,6	40,1	− 84,7
B	12	0	−1,333	−1,666	−0,800	0,600	−60	0	0	0	−36,0	−48,0	12,0	48,0	36,0	− 84,0

Împingerea H se obține scriind că momentul încovoietor în articulația C este egal cu zero

$$M_c^d = 0\ ;\ H = \frac{100 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3}{4} = 60\ \text{kN}.$$

În continuare, toate calculele sînt efectuate în tabelul 7.1 după cum urmează: coloana 1 conține abscisele x ale tuturor secțiunilor arcului în care se calculează valorile eforturilor M, T, N, iar coloana 2 conține ordonatele y corespunzătoare, calculate pe baza expresiei

$$y = 1{,}333x - 0{,}111x^2.$$

Coloana 3 conține valorile $\text{tg}\ \varphi$ calculate sub forma

$$\text{tg}\ \varphi = y' = 1{,}333 - 0{,}222x$$

iar coloanele 5 și 6 conțin valorile $\sin\varphi$ și $\cos\varphi$ determinate pe baza valorilor lui $\text{tg}\ \varphi$.

Valorile forței tăietoare T_x^0 și a momentului încovoietor M_x^0 sînt întabulate în coloanele 7 și 8, fiind extrase direct din diagramele corespunzătoare prezentate în fig. 7.73, *b*. Coloana 9 conține produsul $H \cdot y$ iar coloana 10 conține momentele încovoietoare M_x. În continuare, coloanele 11, 12 și 13 servesc la calculul valorilor forței tăietoare T_x, iar coloanele 14, 15 și 16, la calculul valorilor efortului axial N_x.

Diagramele de eforturi M_x, T_x, N_x prezentate în fig. 7.74, *a*, *b*, *c* au fost construite utilizînd rezultatele conținute în tabelul 7.1. Diagramele sînt reprezentate luîndu-se ca linie de referință atît axa arcului cît și o axă orizontală. Este de notat că s-au adoptat scări diferite pentru reprezentarea diagramelor.

În fig. 7.74, *a*, s-au suprapus efectul de grindă simplu rezemată (M_x^0) cît și efectul împingerii arcului (Hy), asupra diagramei de momente încovoietoare finale. Este astfel pus în evidență ordinul de importanță al eforturilor din arc față de eforturile din grinzi echivalente ca deschidere.

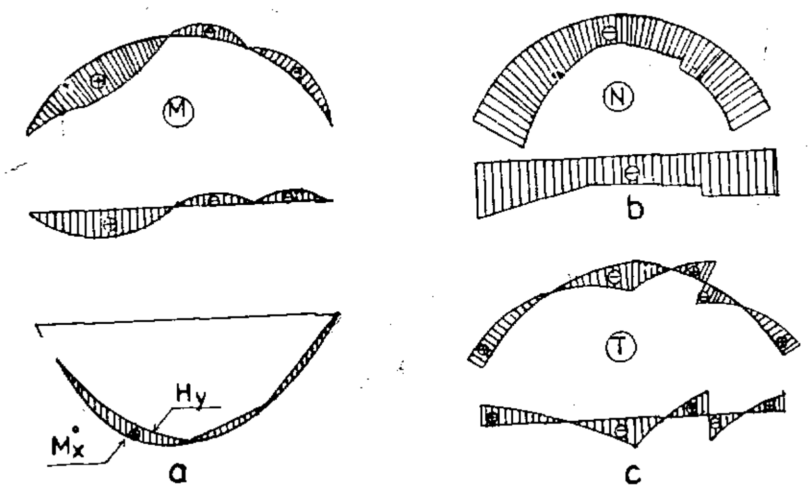


Fig. 7.74.

Momentul încovoietor M_x este mult mai redus decît la grindă, deoarece din momentul încovoietor pe grinda simplu rezemată se scade momentul încovoietor datorat împingerii arcului.

Aplicația 7.7. Pentru arcul cu trei articulații prezentat în **fig. 7.75** să se determine forma de coincidență pentru încărcarea permanentă.

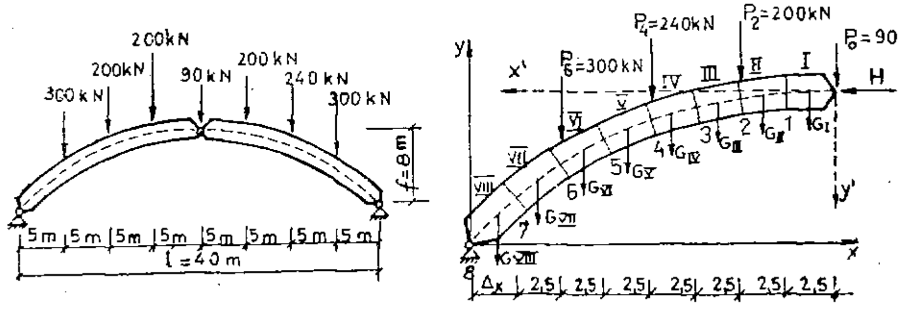


Fig. 7.75.

Pentru sistemul de forțe fixe dat (încărcări și greutatea arcului) se va determina forma de coincidență a arcului cu trei articulații cînd momentele încovoietoare în toate secțiunile arcului vor fi nule. Arcul fiind simetric și încărcat simetric, calculele se conduc pe jumătate de structură.

Se presupune jumătatea din stînga a arcului împărțită prin rosturi în 8 tronsoane (bolțari) și se evaluează greutățile bolțarilor înlocuindu-le cu rezultanta în centrul de greutate. În dreptul forțelor concentrate aduse prin *stîlpi, care transmit încărcările la arc, trebuie să se plaseze un rost de bolțar* deoarece poligonul de presiune are valori juste în dreptul rosturilor.

Pe baza condiției ca momentul total pe arc în dreptul fiecărui rost să fie nul, se determină ordonatele curbei de presiune pentru forțele evaluate. În cazul în care curba de presiune este foarte apropiată de axa arcului de la care s-a pornit, se consideră definitivă. În cazul cînd diferențele sînt mari, se adoptă curba de presiune obținută ca o nouă axă a arcului, se reevaluează încărcările și se reface calculul.

Ca axă inițială a arcului se consideră o parabolă de gradul II, avînd ecuația

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x) = \frac{4 \cdot 8}{40^2}x(40 - x) = 0{,}8x - 0{,}02x^2.$$

Adoptînd ca axă a arcului această parabolă, se determină caracteristicile geometrice și greutățile bolțarilor (fig. 7.76, *a*). În calcule s-a considerat

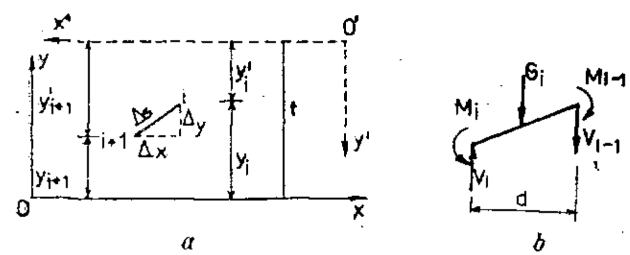


Fig. 7.76.

(tabelul 7.2): înălțimea bolțarului $h = 1{,}00$ m; lățimea bolțarului $b = 0{,}50$ m; greutatea specifică a betonului $\gamma = 26$ kN/m³.

Tabelul 7.2

Secțiune	Bolțar	x	x^2	y	$y' = f - y$	Δx	$\Delta y = y_i - y_{i+1}$	$\Delta s^2 = \Delta y^2 + \Delta_x^2$	Δs	$G = \gamma \Delta s b h$
0		20,00	400,00	8,000	0					
	I					2,5	0,125	6,226	2,50	32,5
1		17,50	306,25	7,875	0,125					
	II					2,5	0,375	6,350	2,52	32,7
2		15,00	225,0	7,500	0,500					
	III					2,5	0,625	6,600	2,56	33,3
3		12,50	156,25	6,875	1,125					
	IV					2,5	0,875	7,016	2,65	34,4
4		10,00	100,00	6,000	2,000					
	V					2,5	1,125	7,515	2,75	35,8
5		7,50	56,25	4,875	3,125					
	VI					2,5	1,375	8,140	2,85	37,1
6		5,00	25,00	3,500	4,500					
	VII					2,5	1,625	8,890	2,98	38,7
7		2,50	6,25	1,875	6,125					
	VIII					2,5	1,875	9,770	3,12	40,6
8		0	0	0	8,000					

În continuare se evaluează momentele în dreptul rosturilor. Dacă arcul este de coincidență, momentul total este nul. Pentru un rost i, se scrie

$$M_i - Hy_i' = 0\,;\; y_i' = M_i/H$$

relație pe baza căreia se poate determina ordonata curbei de presiune.

Pentru evaluarea momentului tuturor forțelor verticale în raport cu rostul i, pe baza fig. 7.76, *b*, se poate scrie

$$M_i = M_{i-1} + V_{i-1}d + G_i \cdot \frac{d}{2}$$

sau

$$M_i = M_{i-1} + \sum_0^{i-1}(P_i + G_i)\cdot d + G_i\frac{d}{2}.$$

Se obține astfel o relație de recurență pentru determinarea momentului tuturor forțelor verticale de la dreapta în raport cu rostul i. Pe baza acestei relații s-a alcătuit tabelul 7.3, care permite determinarea ordonatelor curbei de presiune în primă aproximație.

Impingerea H se determină sub forma

$$H = \frac{M_s}{f} = \frac{11\,428{,}5}{8} = 1\,430 \text{ kN}$$

iar ordonatele y_1' ale curbei de presiune se determină cu relația

$$y_1' = M_i/H.$$

Tabelul 7.3

Secțiune	Bolțar	G_i	P_i	$\sum_0^{i-1} P_i$	$\sum_0^{i-1} G_i$	$\sum_0^{i-1}P_i + \sum_0^{i-1}G_i$	$G_i \cdot \frac{d}{2}$	$(\sum P_i + \sum G_i)d$	$(\sum P_i + \sum G_i)d + G_i \cdot \frac{d}{2}$	M_i	y_1'	y'
0			90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	I	32,5										
1			0	90	0	90,0	40,6	225	265,6	255,6	0,1865	0,125
	II	32,7										
2			200	90	32,5	122,5	40,9	306	346,9	612,5	0,428	0.5
	III	33,3										
3			0	290	65,2	355,2	41,7	888	929,7	1 542,2	1,08	1,125
	IV	34,4										
4			240	290	98,5	388,5	43,0	971	1 014,0	2 556,2	1,785	2,0
	V	35,8										
5			0	530	132,9	662,9	44,75	1 657	1 701,75	4 257,9	2,98	3,125
	VI	37,1										
6			300	530	168,7	698,7	46,4	1 745	1 791,4	6 049,3	4,23	4,50
	VII	38,7										
7			0	830	205,8	1 035,8	48,4	2 590	2 628,4	8 687,7	6,07	0,125
	VIII	40,6										
8			0	830	244,5	1 074,5	50,8	2 690	2 740,8	11 428,5	8,00	8,00

Din ultimele două coloane ale tabelului 7.3 se observă că ordonatele noii curbe de presiune (y_1') diferă sensibil față de ordonatele corespunzătoare axei inițiale a arcului y'. Se adoptă curba obținută ca nouă axă și se reevaluează încărcările (tabelul 7.4).

Tabelul 7.4

Secțiune	y_1'	Bolțar	$\Delta y = y'_{1(i+1)} - y_1(i)$	Δx	$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$	Δs	$G = \gamma \Delta s b h$
0	0						
		I	0,1855	2,5	6,28	2,50	32,5
1	0,1855						
		II	0,243	2,5	6,31	2,51	32,6
2	0,428						
		III	0,652	2,5	6,675	2,58	33,5
3	1,08						
		IV	0,705	2,5	6,74	2,60	33,8
4	1,785						
		V	1,195	2,5	7,68	2,77	36,0
5	2,98						
		VI	1,25	2,5	7,81	2,80	36,4
6	4,23						
		VII	1,84	2,5	9,63	3,10	40,3
7	6,07						
		VIII	1,93	2,5	9,97	3,16	41,1
8	8,00						

Cu încărcările reevaluate se determină ordonatele noii curbe de presiune în a doua aproximație (tabelul 7.5).

Tabelul 7.5

Secțiune	Bolțar	G_i	P_i	$\sum_0^{i-1} P_i$	$\sum_0^{i-1} G_i$	$\sum_0^{i-1} P_i - \sum_0^{i-1} G_i$	$G_i \cdot \frac{d}{2}$	$(\sum_0^{i-1} P_i + \sum_0^{i-1} G_i)d$	$(\sum P_i + \sum G_i)d + G_i \cdot \frac{d}{2}$	M_i	y'_2	y'_1
0	—	—	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	I	32,5										
1			0	90	0	90	40,6	225	265,6	265,6	0,1855	0,1865
	II	32,6										
2			200	90	32,5	122,5	40,7	306	346,7	612,3	0,428	0,428
	III	33,5										
3			0	290	65,1	355,1	41,8	887	928,8	154,1	1,079	1,080
	IV	33,8										
4			240	290	98,6	388,6	42,2	970	1 012,2	2 553,3	1,785	1,785
	V	36,0										
5			0	530	132,4	662,4	45,0	1 655	1 700,0	4 253,3	2,978	2,980
	VI	36,4										
6			300	530	168,4	698,4	45,5	1 745	1 790,5	6 043,8	4,23	4,23
	VII	40,3										
7			0	830	204,8	1 034,8	50,4	2 590	2 640,4	8 684,2	6,070	6,070
	VIII	41,1										
8	—	—	0	830	245,1	1 075,1	51,4	2 690	2 741,8	11 426,8	8,00	8,00

Împingerea H are valoarea

$$H = \frac{M_8}{f} = \frac{11\,426}{8} \approx 1\,430 \text{ kN}.$$

Din ultimele două coloane ale tabelului 7.5 se observă că ordonatele noii curbe de presiune y'_2 sînt foarte apropiate de ordonatele y'_1, deci curba de presiune obținută este definitivă.

Aplicația 7.8. Pentru arcul parabolic prezentat în fig. 7.77, să se traseze liniile de influență ale reacțiunilor și ale eforturilor în secțiunea j situată la abscisa $x = 6$ m.

Ecuația axei arcului este

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) = \frac{4 \cdot 6}{24^2} x(24 - x) = x - 0{,}0416\, x^2$$

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, \varphi = 1 - 0{,}0833x.$$

Pentru $x = 6$ m rezultă

$$\mathrm{tg}\, \varphi = 1 - 0{,}5 = 0{,}5\,;\ \sin \varphi = 0{,}447\,;\ \cos \varphi = 0{,}895.$$

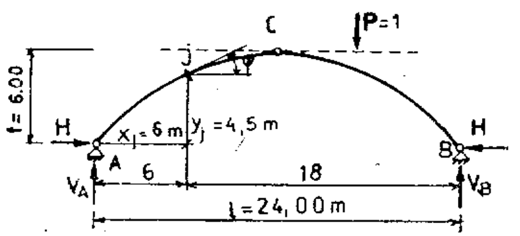


Fig. 7.77.

Metoda funcțiilor de influență. Liniile de influență V_A și V_B sînt chiar liniile reacțiunilor la o grindă simplu rezemată (fig. 7.78, *a*).

Linia de influență a împingerii H se obține pe baza expresiei

$$H = M_c^0/f.$$

Rezultă că linia H (fig. 7.78, *b*) este linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea C a unei grinzi simplu rezemate de aceeași deschidere cu cea a arcului, împărțită la săgeata f. Pentru secțiunea de la cheie se obține

$$M_c^0 = 1 \cdot 24/4 = 6$$

și ordonata

$$H = M_c^0/f = 6/6 = 1.$$

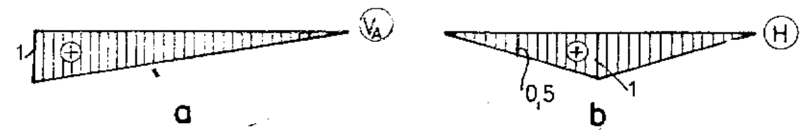


Fig. 7.78.

Linia de influență a momentului încovoietor în secțiunea j se obține pe baza expresiei

$$M_j = M_j^0 - Hy_j.$$

Rezultă că peste linia de influență a momentului pe grinda simplu rezemată, M_j^0, se va suprapune linia de influență a împingerii H multiplicată cu y_j. Operația de suprapunere este prezentată în fig. 7.79, *a*, pe baza relației

$$M_j = M_j^0 - 4{,}5\ H.$$

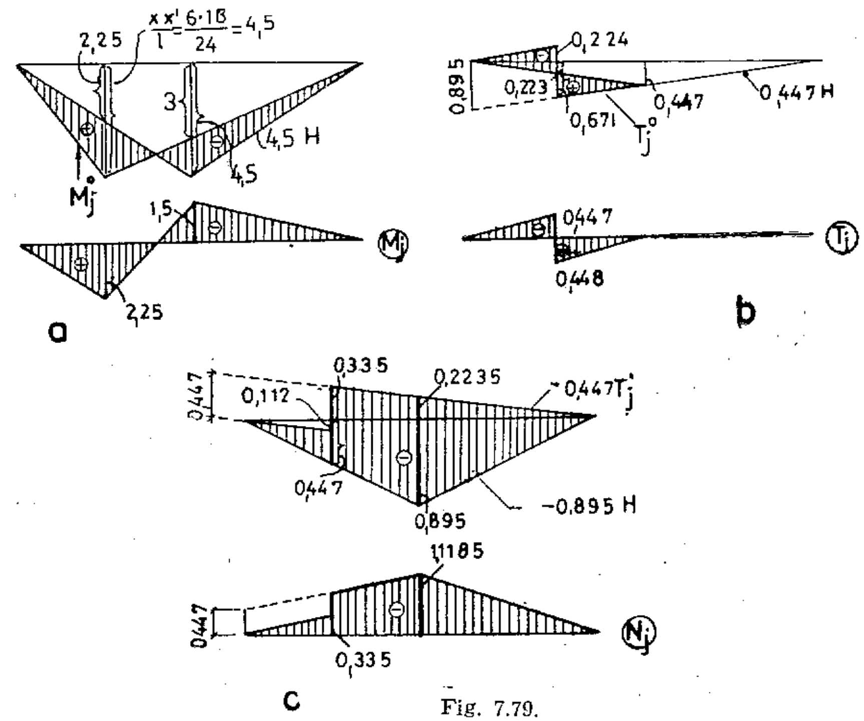


Fig. 7.79.

Linia de influență a forței tăietoare în secțiunea j se obține pe baza expresiei

$$T_j = T_j^0 \cos \varphi - H \sin \varphi.$$

Rezultă că la linia de influență a forței tăietoare pe grinda simplu rezemată, T_j^0, multiplicată cu $\cos \varphi = 0{,}895$, se adaugă linia de influență a împingerii H multiplicată cu $-\sin \varphi = -0{,}447$. Operația de suprapunere a liniilor de influență este prezentată în fig. 7.79. *b*.

Linia de influență a forței axiale în secțiunea j se obține pe baza expresiei

$$N_j = -T_j^0 \sin \varphi - H \cos \varphi.$$

Rezultă că la linia de influență T_j^0, multiplicată cu $-\sin \varphi = -0{,}447$, se adaugă linia de influență a împingerii H, multiplicată cu $-\cos \varphi = -0{,}895$. Operația de suprapunere este prezentată în fig. 7.79, *c*.

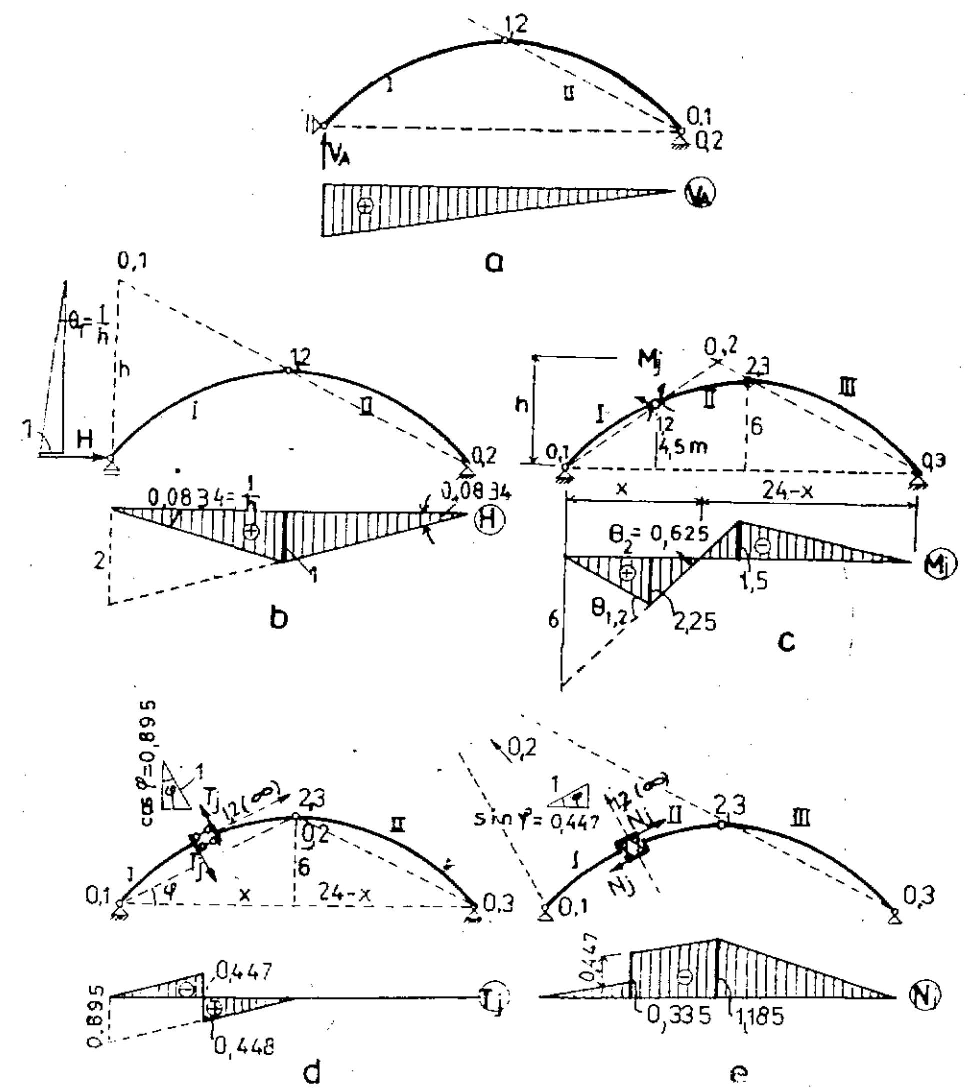


Fig. 7.80.

Metoda cinematică. Linia V_A (fig. 7.80, *a*): se suprimă legătura pe verticală în reazemul A. Centrele instantanee de rotație sînt: *(1, 2)* în C, *(0, 2)* în B, iar centrul *(0, 1)* se găsește la intersecția normalei la reazemul din A și a dreptei *(0,1) — (1,2)*, deci *(0,2)* apare în B suprapus peste *(0,1)*. Se dă deplasarea unitară pe direcția verticală în sens opus lui V_A, obținîndu-se linia de influență căutată.

Linia H (fig. 7.80, *b*) : se suprimă în reazemul A legătura corespunzătoare direcției nașterilor arcului. Centrele instantanee de rotație sînt : *(0,2)* în B, *(1, 2)* în C, iar *(0, 1)* se găsește la intersecția normalei la reazemul simplu din A cu dreapta *(0,2) — (1, 2)*. Se dă o deplasare unitară în sens opus lui H și se observă că punctul C coboară, astfel că linia de influență obținută este pozitivă.

Scara liniei de influență se determină pe baza epurei de deplasări pe orizontală

$$\theta_1 = 1/h \text{ iar } h = 12 \text{ m, deci } \theta_1 = 1/12 = 0{,}0834.$$

Linia M_j (fig. 7.80, *c*) : se introduce o articulație în j și o pereche de momente M_j corespunzătoare legăturii suprimate. Pentru mecanismul cu un grad de libertate obținut, centrele instantanee de rotație sînt : *(0,1)* în A, *(0,2)* în B, *(1,2)* în j, *(2,3)* în C, iar *(0,2)* la intersecția dreptelor *(0,1) — (1,2)* și *(0,3) — (2,3)*. Poziția centrului *(0,2)* se determină pe baza relațiilor geometrice, din triunghiuri asemenea

$$h/x = 4{,}5/6 \text{ și } h/(24 - x) = 6/12.$$

Rezultă

$$x = 9{,}60 \text{ m} ; \ h = 7{,}18 \text{ m}.$$

Scara liniei de influență este complet determinată dîndu-se valoare unitară rotirii relative dintre corpurile I și II. Deci $\theta_{1,2} = 1$.

Linia T_j (fig. 7.80, *d*) : se suprimă legătura corespunzătoare forței tăietoare, deci se introduce mecanismul format din două pendule paralele cu tangenta la arc, permițînd deplasări numai după normala la arc. Centrele instantanee ale corpurilor mecanismului sînt : *(0, 1)* în A, *(0, 3)* în B, *(2, 3)* în C, *(1, 2)* la infinit pe direcția tangentei în j (deci corpurile I și II se mișcă paralel), iar *(0, 2)* la intersecția dreptei *(0, 3) — (2, 3)* cu dreapta ce trece prin *(0, 1)* și este paralelă cu tangenta în secțiunea j. Poziția centrului *(0, 2)* se determină pe baza relațiilor

$$h/(24 - x) = 6/12 \text{ și } \operatorname{tg} \varphi = h/x = 0{,}5.$$

Rezultă $x = 12$ m ; $h = 6$ m
deci centrul *(0,2)* este în C iar corpul III nu are deplasare.

Deplasînd cele două fețe ale secțiunii j cu cantitatea 1 în sens opus forței tăietoare, corpul I se ridică iar corpul II coboară.

Scara se determină pe baza observației că la depărtarea celor două fețe ale secțiunii j, cu cantitatea 1 după normală, proiecția pe verticală a acestei deplasări este $1 \cdot \cos \varphi = 0{,}985$ (în epură între corpurile I și II).

Linia N_j (fig. 7.80, *e*) : se introduce în secțiunea j mecanismul celor două pendule paralele cu normala din j, permițînd numai deplasări după tangentă. Centrele instantanee sînt : *(0, 1)* în A, *(0,3)* în B, *(2,3)* în C, *(1,2)* la infinit pe direcția normalei în j, iar *(0, 2)* la intersecția dreptei *(0,3 — 2,3)* cu dreaptă ce trece prin *(0, 1)* și este paralelă cu normala în secțiunea j.

Scara se determină pe baza observației că pentru o deplasare relativă a celor două fețe j după direcția tangentei, cu cantitatea 1, proiecția pe verticală a acestei deplasări este $1 \cdot \sin \varphi = 0{,}447$ (în epură între corpurile I și II).

8. Solicitări simple

8.1. CARACTERISTICI GEOMETRICE PENTRU SUPRAFEȚE PLANE

La analiza elementelor de construcție din categoria grinzilor intervin o serie de caracteristici geometrice ale secțiunilor transversale ale acestora : arii, momente de inerție (axiale, centrifugale, polare), module de rezistență, raze de inerție.

În practica curentă a proiectării, secțiunile transversale ale grinzilor au forme geometrice particulare care pot fi descompuse pentru calcule în forme simple (dreptunghi, pătrat, triunghi, cerc), la care se pot aplica direct relațiile de definiție a caracteristicilor geometrice.

Pentru secțiuni compuse, caracteristicile geometrice se obțin prin descompunerea acestora în forme simple la care caracteristicile geometrice sînt cunoscute și compunerea acestor caracteristici se face după reguli specifice (fig. 8.1).

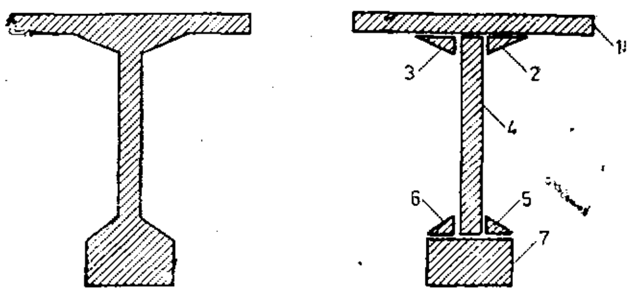


Fig. 8.1.

8.1.1. MOMENTE STATICE

Pentru o suprafață plană (fig. 8.2,*a*) se definește ca moment static față de o dreaptă (Δ) suma

$$S_\Delta = \int_A \xi \mathrm{d}A = \xi_G A \tag{8.1}$$

în care ξ este distanța de la centrul de greutate al elementului de arie dA la dreapta (Δ).

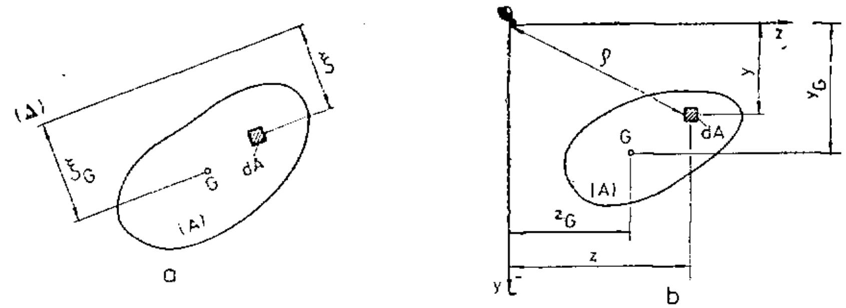


Fig. 8.2.

În mod similar, față de axele Oz și Oy (fig. 8.2,*b*) momentele statice se exprimă prin

$$S_z = \int_A y \mathrm{d}A = y_G A\ ;\quad S_y = \int_A z \mathrm{d}A = z_G A. \tag{8.2}$$

Momentul static poate fi pozitiv, negativ sau nul. Semnul momentului static depinde de poziția suprafeței în raport cu axa față de care este definit și de convenția de semne adoptată pentru axe. Momentul static este nul dacă axa în raport cu care este definit trece prin centrul de greutate al suprafeței.

Pentru suprafețe compuse dintr-un număr de forme simple $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ale căror centre de greutate sînt situate la distanțele $\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_n$ de axa (Δ), momentul static al întregii suprafețe față de axa (Δ) este

$$S_\Delta = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \ldots + \xi_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i. \tag{8.3}$$

Utilizarea momentelor statice la stabilirea poziției centrului de greutate al unei suprafețe plane. Se alege un sistem de axe rectangulare Oz, Oy cu originea O în poziție arbitrară față de suprafața al cărei centru de greutate urmează a se determina (v. fig. 8.2, *b*). Se exprimă momentele statice S_z și S_y ale suprafeței în raport cu axele Oz și Oy și pe baza relațiilor (8.2) rezultă distanțele z_G și y_G față de axele alese.

$$z_G = \frac{S_y}{A}\ ;\quad y_G = \frac{S_z}{A}. \tag{8.4}$$

8.1.2. MOMENTE DE INERȚIE

Moment de inerție axial. Pentru suprafața plană din fig. 8.2, *a*, se definește ca moment de inerție axial față de dreapta (Δ) suma de pătrate

$$I_\Delta = \int_A \xi^2 \mathrm{d}A. \tag{8.5}$$

Similar, față de axele Oz și Oy (v. fig. 8.2, *b*) momentele de inerție axiale se exprimă prin

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A\ ;\quad I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A. \tag{8.6}$$

Momentul de inerție axial fiind exprimat ca o sumă de pătrate este întotdeauna pozitiv. Față de o axă ce trece prin centrul de greutate al unei suprafețe plane se obține momentul de inerție axial central.

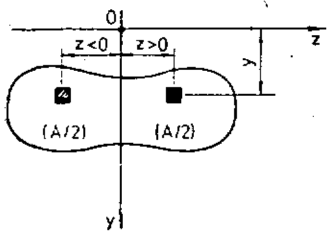


Fig. 8.3.

Moment de inerţie centrifugal. Momentul de inerţie centrifugal al unei suprafeţe plane este definit în raport cu un sistem de axe rectangulare yOz (v. fig. 8.2, *b*)

$$I_{zy} = \int_A zy\,dA. \tag{8.7}$$

Momentul de inerţie centrifugal poate fi pozitiv, negativ sau nul, semnul său fiind funcţie de convenţia de semne aleasă pentru axe şi de poziţia suprafeţei faţă de sistemul de axe în raport cu care este definit.

Dacă cel puţin una din axele Oz sau Oy este axă de simetrie a suprafeţei plane, momentul de inerţie centrifugal este nul (fig. 8.3)

$$I_{zy} = \int_{A/2} -zy\,dA + \int_{A/2} zy\,dA = 0. \tag{8.8}$$

Momentul de inerţie centrifugal este nul dacă sistemul de axe în raport cu care se exprimă este principal.

Moment de inerţie polar. Momentul de inerţie polar al unei suprafeţe plane este definit în raport cu un punct O sub forma (v. fig. 8.2, *b*)

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA. \tag{8.9}$$

Dacă se înlocuieşte $\rho^2 = z^2 + y^2$ şi se au în vedere relaţiile (8.6) rezultă

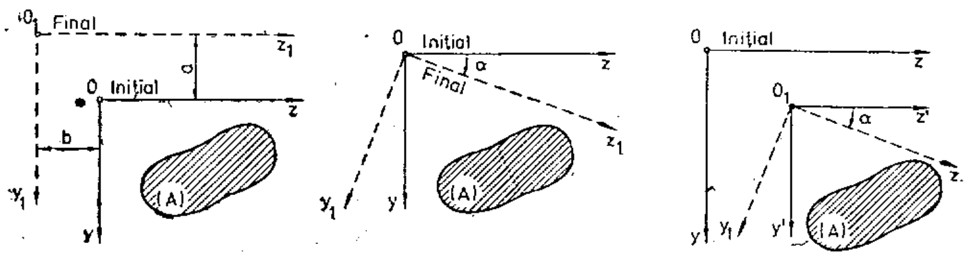
$$I_0 = \int_A (z^2 + y^2)\,dA = I_z + I_y. \tag{8.10}$$

Întrucît rezultă dintr-o sumă de pătrate, momentul de inerţie polar este întotdeauna pozitiv.

8.1.3. OPERAŢII CU MOMENTE DE INERŢIE

În general, secţiunile elementelor de construcţie din categoria grinzilor au forme geometrice complexe ce pot fi considerate ca alcătuite din suprafeţe simple pentru care caracteristicile geometrice sînt cunoscute.

Pentru determinarea caracteristicilor geometrice proprii ale secţiunii transversale în ansamblu, intervin situaţii în care se cunosc aceste caracteristici faţă de un sistem de axe considerat „iniţial" şi se urmăreşte obţinerea aceloraşi caracteristici faţă de un nou sistem de axe considerat „final". Sistemul de axe final poate fi: paralel cu sistemul iniţial (fig. 8.4, *a*), rotit faţă de sistemul iniţial cu un unghi α (fig. 8.4, *b*) sau într-o poziţie oarecare faţă de cel iniţial (fig. 8.4, *c*).



a. Translaţie   b. Rotire   c. Translaţie şi rotire

Fig. 8.4.

Translaţia sistemului de axe. Se cunosc caracteristicile geometrice I_z, I_y, I_{zy}, I_0 faţă de sistemul de axe iniţial şi se urmăreşte determinarea aceloraşi caracteristici I_{z_1}, I_{y_1}, $I_{z_1y_1}$, I_{01} faţă de sistemul de axe final translatat (fig. 8.5, *a*).

Pentru sistemul de axe final aplicînd relaţiile de definiţie

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA\,; \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA\,; \quad I_{z_1y_1} = \int_A z_1 y_1 dA\,; \quad I_{01} = \int_A \rho_1^2 dA \tag{8.11}$$

şi ţinînd seama că

$$y_1 = y + a\,;\ z_1 = z + b\,;\ \rho_1^2 = z_1^2 + y_1^2 \tag{8.12}$$

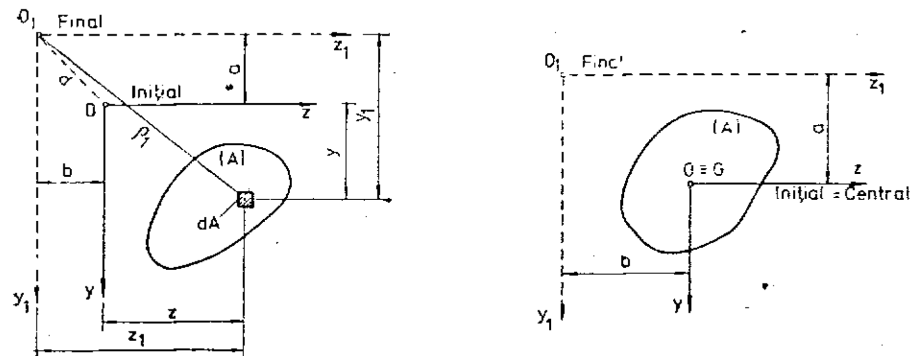
rezultă

$$I_{z_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A (y^2 + 2ay + a^2)dA = I_z + 2aS_z + a^2A \tag{8.13}$$

$$I_{y_1} = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A (z^2 + 2bz + b^2)dA = I_y + 2bS_y + b^2A \tag{8.14}$$

$$I_{z_1y_1} = \int_A (z + b)(y + a)dA = I_{zy} + aS_y + bS_z + abA \tag{8.15}$$

$$I_{01} = \int_A \rho_1^2 dA = I_{y_1} + I_{z_1} = I_z + I_y + 2(aS_z + bS_y) + (a^2 + b^2)A\,. \tag{8.16}$$



a   b

Fig. 8.5.

Semnele termenilor de tipul aS_z, bS_y etc. depind de poziţia axei finale faţă de suprafaţă şi faţă de axa iniţială. Dacă sistemul de axe final este mai aproape de suprafaţă decît sistemul iniţial rezultă

$$y_1 = y - a\,;\ z_1 = z - b \tag{8.17}$$

şi

$$I_{z_1} = I_z - 2aS_z + a^2A \tag{8.18}$$

$$I_{y_1} = I_y - 2bS_y + b^2A \tag{8.19}$$

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} - aS_y - bS_z + abA \tag{8.20}$$

$$I_{01} = I_z + I_y - 2(aS_z + bS_y) + (a^2 + b^2)A. \tag{8.21}$$

Dacă sistemul de axe inițial este central (fig. 8.5, *b*)

$$S_z = S_y = 0 \tag{8.22}$$

și se obține:

$$I_{z_1} = I_z + a^2A \tag{8.23}$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2A \tag{8.24}$$

$$I_{z_1y_1} = I_{zy} + abA \tag{8.25}$$

$$I_{01} = I_0 + d^2A. \tag{8.26}$$

Din examinarea relațiilor (8.23) — (8.26) rezultă că dintr-o familie de sisteme de axe paralele între ele, momentele de inerție axiale au valori minime față de sistemul de axe central.

Relațiile care exprimă variația momentelor de inerție la translația axelor permit determinarea momentelor de inerție ale unei secțiuni compuse, prin descompunerea acesteia în figuri simple cărora li se cunosc pozițiile centrelor de greutate, ariile și momentele de inerție în raport cu sistemul de axe ce trece prin centrul lor de greutate și care sînt paralele cu sistemul de axe al întregii secțiuni (sistemul final).

Rotirea sistemului de axe. Se cunosc caracteristicile geometrice față de sistemul inițial I_z, I_y, I_{zy} și se urmărește determinarea acelorași caracteristici I_{z_1}, I_{y_1}, $I_{z_1y_1}$ față de sistemul de axe final rotit (fig. 8.6, *a*).

Aplicînd relațiile de definiție pentru sistemul de axe final

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA\ ; \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2\, dA\ ; \quad I_{z_1y_1} = \int_A z_1 y_1 dA \tag{8.27}$$

și ținînd seama că (fig. 8.6, *b*)

$$z_1 = z\ \cos\alpha + y\ \sin\alpha\ ;\ y_1 = y\ \cos\alpha - z\ \sin\alpha \tag{8.28}$$

rezultă

$$I_{z_1} = \int_A (y\cos\alpha - z\ \sin\alpha)^2 dA = \cos^2\alpha \int_A y^2 dA + \sin^2\alpha \int_A z^2 dA -$$

$$- 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A zy dA \tag{8.29}$$

sau

$$I_{z_1} = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - 2I_{zy}\sin\alpha\cos\alpha \tag{8.30}$$

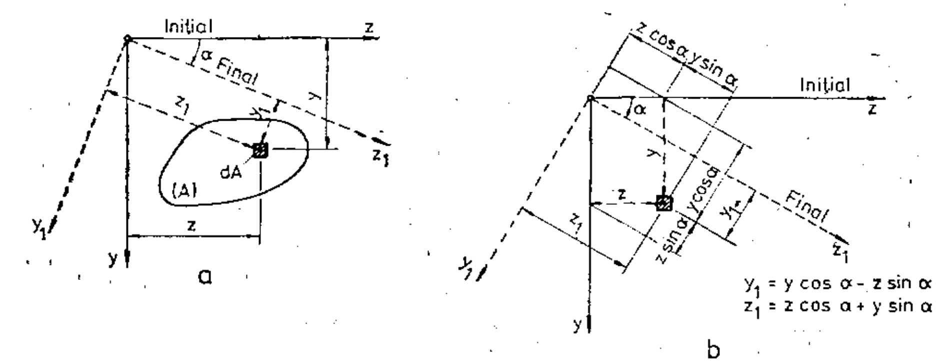


Fig. 8.6.

și similar

$$I_{y_1} = I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha + 2I_{zy}\ \sin\alpha\cos\alpha \tag{8.31}$$

$$I_{z_1y_1} = I_{zy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (I_z - I_y)\sin\alpha\cos\alpha \tag{8.32}$$

sau, utilizînd exprimarea față de unghiul dublu, 2α, se obține

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha \tag{8.33}$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{zy}\sin 2\alpha \tag{8.34}$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha. \tag{8.35}$$

Momente de inerție axiale centrale și principale. Axe principale de inerție. Din examinarea relațiilor (8.33)—(8.35) rezultă că I_{z_1}, I_{y_1}, $I_{z_1y_1}$ sînt funcții de 2α, iar analiza acestora permite stabilirea valorilor extreme (maxime și minime) și a unghiurilor pentru care au loc.

Unghiul α_1 care stabilește poziția rotită a axelor în raport cu care momentele de inerție axiale înregistrează valori extreme rezultă prin anularea derivatei momentului de inerție I_{z_1} sau I_{y_1}

$$\frac{dI_{z_1}}{d(2\alpha)} = -\frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha - I_{zy}\ \cos 2\alpha = -I_{z_1y_1}. \tag{8.36}$$

$$\frac{dI_{y_1}}{d(2\alpha)} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{zy}\cos 2\alpha = I_{z_1y_1}. \tag{8.37}$$

Din relațiile (8.36) și (8.37) rezultă că pentru axele față de care momentul de inerție centrifugal este nul, momentele de inerție axiale au valori extreme, maxime și minime. Aceste axe se numesc axe principale de inerție și se notează cu *1*, respectiv *2*.

Prin anularea relației (8.36) sau (8.37) rezultă

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \tag{8.38}$$

cu soluțiile α_1 și $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, care definesc față de axa Oz două axe perpendiculare între ele pentru care momentul de inerție axial este maxim sau minim (fig. 8.7).

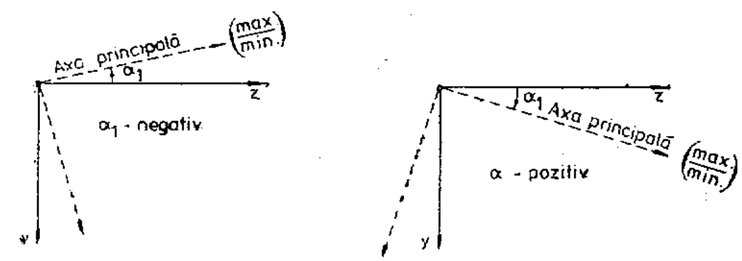


Fig. 8.7.

Identificarea axei principale de maxim se face prin studiul derivatei a doua a funcției I_{z_1}. Unghiul a cărui tangentă are semn contrar cu momentul de inerție centrifugal I_{zy} definește axa principală de maxim.

Momentele de inerție față de axele principale se numesc momente de inerție principale. Acestea se notează cu I_1 — momentul de inerție principal maxim și cu I_2 — momentul de inerție principal minim.

Înlocuind relația (8.38) în expresia lui I_{z_1} se obțin valorile momentelor de inerție principale

$$I_{z\,max} = I_1 = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \qquad (8.39)$$

$$I_{z\,min} = I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}. \qquad (8.40)$$

Variația momentului de inerție centrifugal la rotația axelor. Funcția momentului de inerție centrifugal $I_{z_1y_1}$ [relația (8.35)] variază cu unghiul 2α, este nulă pentru axele principale de inerție și trece prin valori extreme pentru unghiuri ce rezultă din anularea derivatei sale

$$\frac{dI_{z_1y_1}}{d(2\alpha)} = \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{zy}\sin 2\alpha = 0 \qquad (8.41)$$

sau

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = -\frac{I_y - I_z}{2I_{zy}} \qquad (8.42)$$

cu soluțiile α_2 și $\alpha_2 + \frac{\pi}{2}$ care definesc două axe perpendiculare între ele față de care momentul de inerție centrifugal este maxim, respectiv minim. Aceste axe sînt bisectoarele unghiurilor dintre axele principale de inerție deoarece

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_2 = -1 \qquad (8.43)$$

deci direcțiile definite de unghiurile α_1 și α_2 descriu între ele un unghi de 45°.

Introducînd relația (8.42) în (8.35) se obțin valorile momentelor de inerție centrifugale maxime și minime

$$I_{z_1y_1\binom{max}{min}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}. \qquad (8.44)$$

Observație. Întrucît momentul de inerție centrifugal este nul în raport cu axele de simetrie ale unei suprafețe plane, rezultă că orice axă de simetrie este axă principală a suprafeței respective.

8.1.4. RAZA DE INERȚIE. ELIPSA DE INERȚIE

Pentru o suprafață plană raportată la sistemul de axe u și v (fig. 8.8, a) se definesc ca raze de inerție (de girație), față de axele u și v mărimile

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}. \qquad (8.45)$$

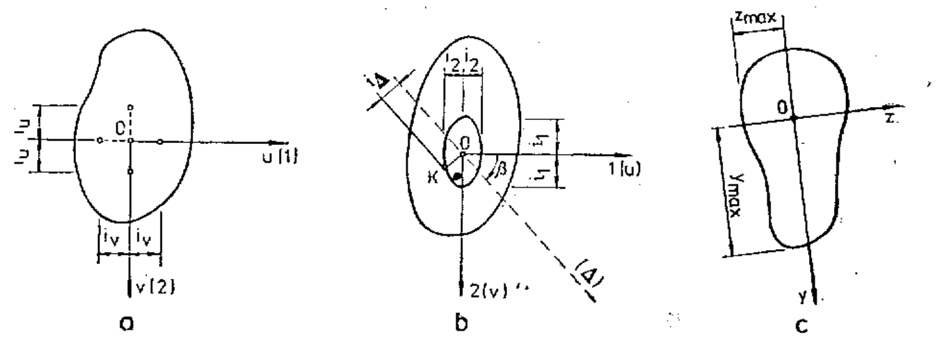


Fig. 8.8.

Dacă axele sînt axe principale și centrale se obțin razele de inerție centrale principale

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}; \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}. \qquad (8.46)$$

Dacă se cunoaște o rază de inerție i_u, se poate determina momentul de inerție față de axa u

$$I_u = Ai_u^2. \qquad (8.47)$$

Ca semnificație geometrică, raza de inerție a unei suprafețe plane în raport cu o axă reprezintă distanța față de axă la care ar trebui concentrată întreaga arie, pentru a se obține același moment de inerție cu al suprafeței reale.

Elipsa de inerție servește la determinarea grafică a razelor de inerție față de orice axă ce trece prin centrul de greutate al unei suprafețe plane dacă se cunosc razele de inerție principale și centrale. Prin intermediul razelor de inerție pot fi apoi calculate momentele de inerție față de orice direcție cu ajutorul relației (8.47).

Presupunînd axa (Δ) în poziție variabilă în jurul punctului O (fig. 8.8, b), punctul K va descrie un loc geometric

$$I_{(\Delta)} = Ai^2_{\Delta} = A\cdot(\overline{OK})^2. \qquad (8.48)$$

Se poate arăta că locul geometric al punctului K este o elipsă numită elipsă de inerție, cu semiaxele i_1 și i_2 (razele de inerție principale)

$$\frac{u^2}{i_2^2} + \frac{v^2}{i_1^2} = 1. \qquad (8.49)$$

Dacă pentru o suprafață plană $I_1 = I_2$ deci $i_1 = i_2$, elipsa de inerție devine un cerc, iar momentele de inerție față de orice axă centrală sînt egale cu momentele de inerție principale.

8.1.5. MODULUL DE REZISTENȚĂ

Rapoartele dintre momentele de inerție față de axele centrale ale unei suprafețe plane și distanțele de la punctele cele mai depărtate ale suprafeței la axe, reprezintă module de rezistență axiale (fig. 8.8, c)

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \qquad (8.50)$$

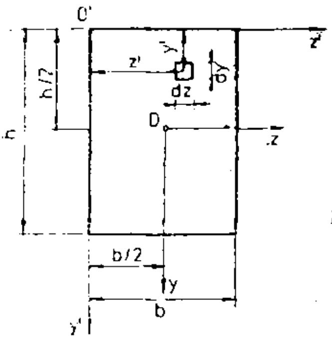


Fig. 8.9.

Modulele de rezistență se notează cu W, au același indice cu momentul de inerție și se exprimă în unități de lungime la puterea a treia [L^3].

Aplicația 8.1. Pentru secțiunea dreptunghiulară din fig. 8.9 să se determine momentele de inerție $I_{z'}$, $I_{y'}$, $I_{z'y'}$ și $I_{0'}$ față de sistemul de axe $z'O'y'$ și momentele de inerție I_z, I_y, I_{zy} și I_0 față de sistemul de axe central zOy.

Momentul de inerție față de axa $O'z'$

$$I_{z'} = \int_A y'^2 \,dA \quad \text{unde } dA = dy\, dz$$

$$I_{z'} = \int_0^h y'^2\, dy \int_0^b dz = \frac{bh^3}{3}.$$

Momentul de inerție față de axa $O'y'$

$$I_{y'} = \int_A z'^2 dA = \int_0^h dy \int_0^b z'^2\, dz = \frac{hb^3}{3}.$$

Momentul de inerție centrifugal

$$I_{z'y'} = \int_A z'y'\, dA = \int_0^h y'\, dy \int_0^b z'\, dz = \frac{b^2h^2}{4}.$$

Momentul de inerție polar

$$I_{0'} = I_{z'} + I_{y'} = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3} = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2).$$

Momentele de inerție față de sistemul de axe central zOy se obțin aplicînd relațiile (8.23)—(8.26) în care se presupun cunoscute momentele de inerție față de sistemul de axe final (determinate mai înainte)

$$a = h/2\,;\quad b = b/2\,;\quad A = bh$$

$$I_z = I_{z'} - a^2A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = I_{y'} - b^2A = \frac{hb^3}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{zy} = I_{z'y'} - abA = \frac{b^2h^2}{4} - \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right) bh = 0$$ — sistemul de axe zOy este principal;

$$I_0 = I_{0'} - d^2A = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2) - \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] bh = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2).$$

Aplicația 8.2. Pentru secțiunea triunghiulară din fig. 8.10 să se determine momentele de inerție $I_{z'}$, $I_{y'}$, $I_{z'y'}$ și $I_{0'}$ față de sistemul $z'O'y'$ și momentele de inerție I_z, I_y, I_{zy} și I_0 față de sistemul de axe central.

$$I_{z'} = \int_A y'^2\, dA \quad \text{unde: } dA = b_y\, d_y,\ b_y = \frac{h - y'}{h}\, b$$

$$I_{z'} = \int_0^h y'^2 \frac{b}{h}(h - y')\, dy = \frac{bh^3}{12};$$

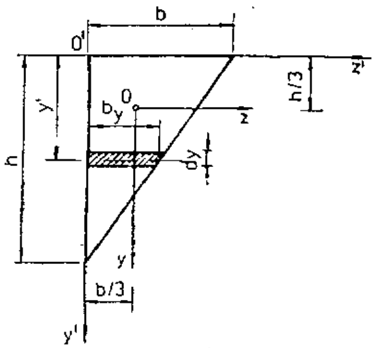


Fig. 8.10.

$I_{y'} = \int_A z'^2\, dA$ și procedînd similar se obține:

$$I_{y'} = \int_0^b z'^2 \frac{h}{b}(b - z')\, dz = \frac{hb^3}{12};$$

$$I_{z'y'} = \int_A z'y'\, dA$$

unde $\quad dA = b_y\, d_y = \frac{b}{h}(h - y')\, dy$

$$z' = \frac{b_y}{2} = \frac{b}{2h}(h - y')$$

$$I_{z'y'} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h y'(h - y')^2\, dy = \frac{b^2h^2}{24};$$

$$I_{0'} = I_{z'} + I_{y'} = \frac{bh}{12}(y^2 + b^2).$$

Pentru determinarea momentelor de inerție față de sistemul de axe central se procedează analog cu aplicația 8.1, unde:

$$a = h/3\,;\quad b = b/3 \text{ și } A = bh/2.$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{zy} = \frac{b^2h^2}{24} - \left(\frac{h}{3}\cdot\frac{b}{3}\right)\frac{bh}{2} = -\frac{bh^3}{72}$$

$$I_0 = I_z + I_y = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2).$$

Aplicația 8.3. Pentru suprafața plană din fig. 8.11, *a* să se determine momentele de inerție principale și centrale și să se traseze elipsa de inerție față de axele principale.

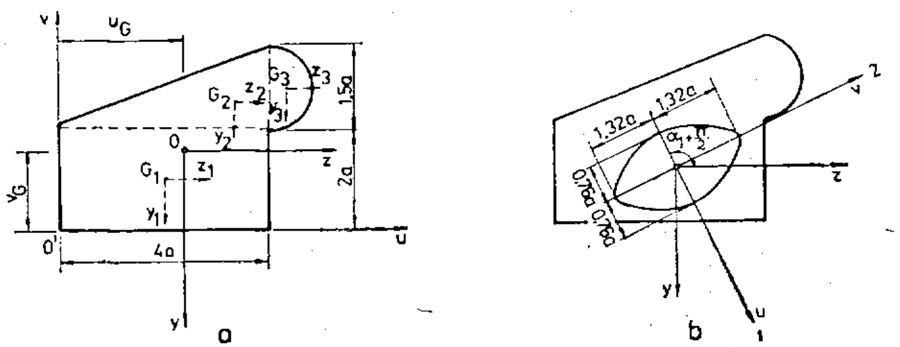
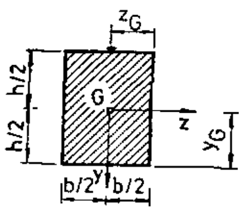
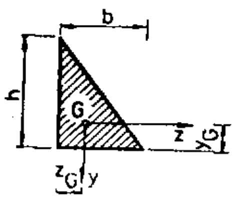
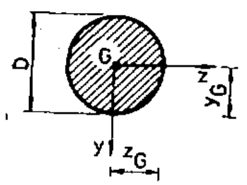
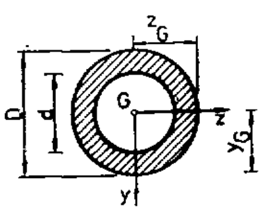
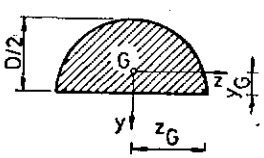


Fig. 8.11.

Secțiunea se descompune în trei figuri geometrice simple (dreptunghi, triunghi, semicerc) pentru care caracteristicile geometrice proprii sînt prezentate în tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

Forma secțiunii	Aria	Poziția centrului de greutate	Momente de inerție
	$A = bh$	$y_G = \frac{h}{2}$; $z_G = \frac{b}{2}$	$I_z = \frac{bh^3}{12}$; $I_y = \frac{hb^3}{12}$; $I_{zy} = 0$
	$A = \frac{bh}{2}$	$y_G = \frac{h}{3}$; $z_G = \frac{b}{3}$	$I_z = \frac{bh^3}{36}$; $I_y = \frac{b^3h}{36}$; $I_{zy} = \frac{b^2h^2}{72}$
	$A = \frac{\pi D^2}{4}$	$y_G = z_G = \frac{D}{2}$	$I_z = \frac{\pi D^4}{64}$; $I_y = \frac{\pi D^4}{64}$; $I_{zy} = 0$
	$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$	$y_G = z_G = \frac{D}{2}$	$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$; $I_{zy} = 0$
	$A = \frac{\pi D^2}{8}$	$y_G = \frac{4D}{6\pi}$; $z_G = \frac{D}{2}$	$I_z = 0{,}00686\,D^4$; $I_y = \frac{\pi D^4}{128}$; $I_{zy} = 0$

1) Determinarea poziției centrului de greutate al suprafeței în raport cu un sistem de axe arbitrar $uO'v$

$$u_G = \frac{\sum A_i u_i}{\sum A_i}; \quad v_G = \frac{\sum A_i v_i}{\sum A_i}.$$

Elementele geometrice care intervin în expresiile coordonatelor centrului de greutate al suprafeței sînt prezentate în tabelul 8.2.

$$u_G = \frac{27{,}815a^3}{11{,}88a^2} = 2{,}34\,a; \quad v_G = \frac{17{,}93a^3}{11{,}88a^2} = 1{,}51a.$$

Tabelul 8.2

Figura	A_i	u_i	v_i	$A_i u_i$	$A_i v_i$	b_i	a_i
1	$8{,}0a^2$	$2a$	a	$16{,}0a^3$	$8{,}0a^3$	$-0{,}34a$	$+0{,}51a$
2	$3{,}0a^2$	$2{,}67a$	$2{,}5a$	$8{,}0a^3$	$7{,}5a^3$	$+0{,}33a$	$-0{,}99a$
3	$0{,}88a^2$	$4{,}318a$	$2{,}75a$	$3{,}815a^3$	$2{,}43a^3$	$+1{,}978a$	$-1{,}24a$
	$11{,}88a^2$			$27{,}815a^3$	$17{,}93a^3$		

2) Determinarea momentelor de inerție în raport cu sistemul de axe central zOy [relațiile (8.23)–(8.25)]

$$I_z = \sum_{i=1}^{3}(I_{z_i} + a_i^2 A_i) = \frac{4a(2a)^3}{12} + (0{,}51a)^2\cdot 8a^2 + \frac{4a(1{,}5a)^3}{36} + (0{,}99a)^2\cdot 3a^2 +$$
$$+ 0{,}00686\cdot(1{,}5a)^4 + (1{,}24a)^2\cdot 0{,}88a^2 = 9{,}45a^4$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{3}(I_{y_i} + b_i^2 A_i) = \frac{2a(4a)^3}{12} + (0{,}34a)^2\cdot 8a^2 + \frac{1{,}5a(4a)^3}{36} +$$
$$+ (0{,}33a)^2\cdot 3a^2 + \frac{\pi(1{,}5a)^4}{128} + (1{,}978a)^2\cdot 0{,}88a^2 = 18{,}152a^4$$

$$I_{zy} = \sum_{i=1}^{3}(I_{z_i y_i} + a_i b_i A_i) = 0 + (0{,}51a)(-0{,}34a)\cdot 8a^2 - \frac{(4a)^2\cdot(2a)^2}{72} +$$
$$+ (-0{,}99a)(0{,}33a)\cdot 3a^2 + 0 + (-1{,}24a)(1{,}978a)\cdot 0{,}88a^2 = -5{,}414a^4$$

Distanțele de la sistemele de axe locale ale figurilor geometrice la sistemul de axe central al suprafeței sînt determinate în ultimele două coloane ale tabelului 8.2.

3) Direcțiile axelor principale rezultă din relația (8.38)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2(-5{,}414a^4)}{18{,}152a^4 - 9{,}45a^4} = -1{,}244$$

$$2\alpha_1 = -51°12'20''; \quad \alpha_1 = -25°36'10''$$
$$\alpha_1 = -(25°36'10'' + 90°) = -115°36'10''.$$

Întrucît unghiul de $-115°36'10''$ are tangenta de semn contrar cu momentul de inerție centrifugal, acesta va defini axa principală de maxim (fig. 8.11, *b*).

4) Valorile momentelor de inerție principale rezultă din aplicarea relațiilor (8.39) și (8.40)

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} = \frac{9,45a^4 + 18,152a^4}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{(9,45a^4 - 18,152a^4)^2 + 4(5,414a^4)^2} = 13,801a^4 \pm 6,945a^4$$

$$I_1 = (13,801 + 6,945)a^4 = 20,746a^4\,; \quad I_2 = (13,801 - 6,945)a^4 = 6,856a^4$$

5) Trasarea elipsei de inerție rezultă aplicînd relațiile (8.46) și (8.49)

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{20,746a^4}{11,88a^2}} = 1,32a\,; \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{6,856a^4}{11,88a^2}} = 0,76a.$$

Față de sistemul de axe central și principal (v. fig. 8.11, *b*) ecuația elipsei este

$$\frac{u^2}{(0,76a)^2} + \frac{v^2}{(1,32a)^2} = 1.$$

Aplicația 8.4. Pentru secțiunea compusă din platbande și corniere solidarizate cu nituri din fig. 8.12, *a*, să se determine momentele de inerție centrale și principale nete și modulele de rezistență corespunzătoare.

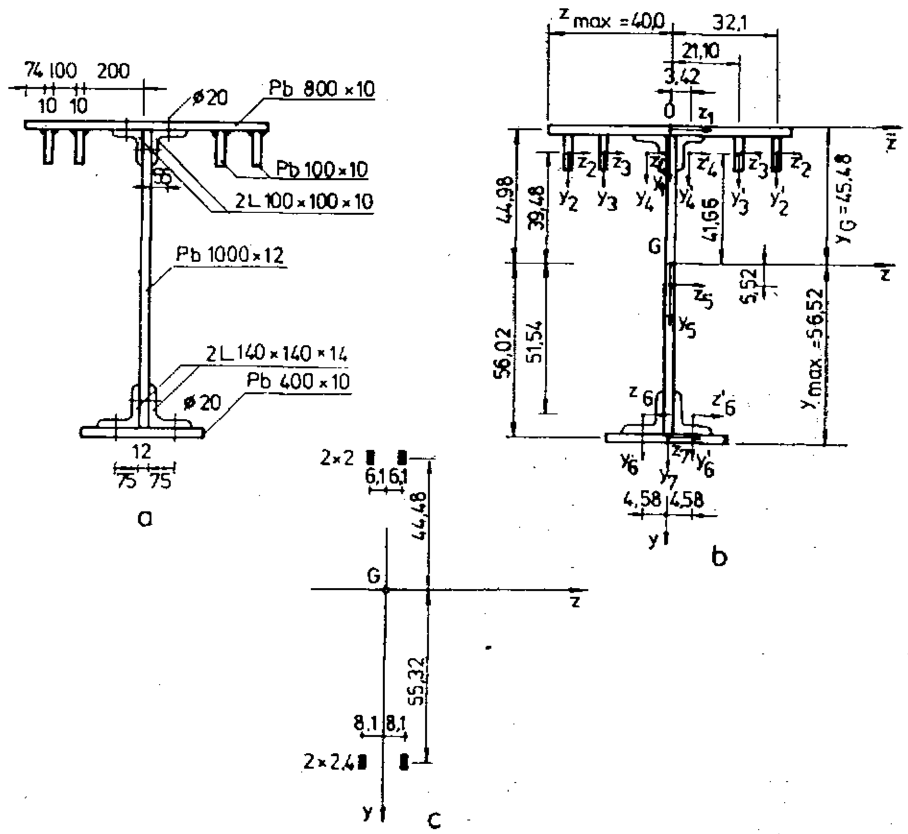


Fig. 8.12.

Secțiunea prezintă o axă de simetrie Oy care este axă centrală și principală. Cealaltă axă principală este perpendiculară pe Oy și trece prin centrul de greutate al secțiunii (axa Oz, fig. 8.12, *b*).

În determinarea caracteristicilor geometrice nete se va ține seama de slăbirile produse de niturile de cap.

1) Determinarea poziției centrului de greutate în raport cu sistemul de axe $yO\bar{z}$. Întrucît slăbirile influențează puțin poziția centrului de greutate, la determinarea lui y_G se vor considera numai arii brute.

Cu notațiile din fig. 8.12, *b*, caracteristicile geometrice proprii ale elementelor ce alcătuiesc secțiunea sînt:

$$\text{Pb}800 \times 10\,; \; A_1 = 80 \times 1 = 80 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_1} = \frac{80 \times 1^3}{12} = 6,67 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{y_1} = \frac{1 \times 80^3}{12} = 42666,67 \text{ cm}^4\,; \quad I_{z_1y_1} = 0$$

$$\text{Pb}100 \times 10\,; \; A_2 = 10 \times 1 = 10 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_2} = \frac{1 \times 10^3}{12} = 83,33 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{y_2} = \frac{10 \times 1^3}{12} = 0,83 \text{ cm}^4\,; \quad I_{z_2y_2} = 0$$

$$\text{L}100 \times 100 \times 10\,; \; A_4 = 19,2 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_4} = I_{y_4} = 177 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{z_4y_4} = 103,35 \text{ cm}^4\,; \; e = 2,82 \text{ cm}$$

$$\text{L}100 \times 100 \times 10\,; \; A_{4'} = 19,2 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_{4'}} = I_{y_{4'}} = 177 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{z_{4'}y_{4'}} = -103,35 \text{ cm}^4\,; \; e = 2,82 \text{ cm}.$$

$$\text{Pb}1\,000 \times 12\,; \; A_5 = 100 \times 1,2 = 120 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_5} = \frac{1,2 \times 100^3}{12} =$$

$$= 100\,000 \text{ cm}^4\,; \; I_{y_5} = \frac{100 \times 1,2^3}{12} = 14,4 \text{ cm}^4\,; \; I_{z_5y_5} = 0$$

$$\text{L}140 \times 140 \times 14\,; \; A_6 = 37,6 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_6} = I_{y_6} = 689 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{z_6y_6} = -405 \text{ cm}^4\,; \; e = 3,98 \text{ cm}$$

$$\text{L}140 \times 140 \times 14\,; \; A_{6'} = 37,6 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_{6'}} = I_{y_{6'}} = 689 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{z_{6'}y_{6'}} = 405 \text{ cm}^4\,; \; e = 3,98 \text{ cm}$$

$$\text{Pb}400 \times 10\,; \; A_7 = 40 \text{ cm}^2\,; \; I_{z_7} = \frac{40 \times 1^3}{12} = 3,33 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_{y_7} = \frac{1 \times 40^3}{12} = 5\,333,33 \text{ cm}^4\,; \quad I_{z_7y_7} = 0.$$

$$y_G = \frac{\sum_1^7 A_i y_i}{\sum_1^7 A_i} = \frac{80 \cdot 0,5 + 4(10 \cdot 6) + 2(19,2 \cdot 3,82) + 120 \cdot 51 + 2(37,6 \cdot 97,02) + 40 \cdot 101,5}{80 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 19,2 + 120 + 2 \cdot 37,6 + 40} =$$

$$= 45,48 \text{ cm}.$$

2) Determinarea momentelor de inerție ale secțiunii brute în raport cu sistemul de axe central și principal zGy (v. fig. 8.12, *b*).

$$I_z^{br} = \sum_{i=1}^{7}(I_{z_i} + a_i^2 A_i) = (6,67 + 44,98^2 \cdot 80) + 4(83,33 + 39,48^2 \cdot 10) +$$
$$+ 2(177 + 41,66^2 \cdot 19,2) + (100\,000 + 5,52^2 \cdot 120) + 2(689 + 51,54^2 \cdot$$
$$\cdot 37,6) + (3,33 + 56,02^2 \cdot 40) = 721\,868,7 \text{ cm}^4$$

$$I_y^{br} = \sum_{i=1}^{7}(I_{y_i} + b_i^2 A_i) = (42\,666,67) + 2(0,83 + 32,1^2 \cdot 10) + 2(0,83 +$$
$$+ 21,1^2 \cdot 10) + 2(177 + 3,42^2 \cdot 19,2) + (14,4) + 2(689 + 4,58^2 \cdot 37,6) +$$
$$+ (5\,333,33) = 81\,288,69 \text{ cm}^4$$

$$I_{zy}^{br} = 0.$$

3) Determinarea momentelor de inerție ale slăbirilor în raport cu sistemul de axe central și principal zGy (fig. 8.12, *c*)

$$I_z^{sl} = 2\left(\frac{2 \cdot 2^3}{12} + 44,48^2 \cdot 4\right) + 2\left(\frac{2 \cdot 2,4^3}{12} + 55,32^2 \cdot 4,8\right) = 45\,213,94 \text{ cm}^4$$

$$I_y^{sl} = 2\left(\frac{2 \cdot 2^3}{12} + 6,1^2 \cdot 4\right) + 2\left(\frac{2,4 \cdot 2^3}{12} + 8,1^2 \cdot 4,8\right) = 933,4 \text{ cm}^4$$

$$I_{zy}^{sl} = 0.$$

4) Momente de inerție principale ale secțiunii nete, module de rezistență

$$I_z^{net} = I_z^{br} - I_z^{sl} = 721\,868,7 - 45\,213,94 = 676\,654,76 \text{ cm}^4$$

$$I_y^{net} = I_{yr}^{b} - I_y^{sl} = 81\,288,69 - 933,4 = 80\,355,29 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = I_{max} = I_z^{net} = 676\,654,76 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = I_{min} = I_y^{net} = 80\,355,29 \text{ cm}^4 \text{ deoarece } I_{zy} = 0$$

$$W_1^{net} = \frac{I_1}{y_{max}} = \frac{676\,654,76}{56,52} = 11\,971,95 \text{ cm}^3; \quad W_2^{net} = \frac{I_2}{z_{max}} =$$
$$= \frac{80\,355,29}{40,0} = 2\,008,88 \text{ cm}^3.$$

8.2. NOȚIUNI GENERALE DE REZISTENȚA MATERIALELOR

În general, construcțiile, indiferent de destinația lor, au principala funcție de a prelua încărcările ce le revin și de a le transmite la terenul de fundare prin intermediul elementelor de rezemare. Ansamblul elementelor construcției ce servesc preluării și transmiterii încărcărilor formează structura de rezistență a construcției. Elementele componente poartă numele de elemente de rezistență.

Pentru efectuarea analizei structurii de rezistență a unei construcții, fiecare element component este separat de restul structurii prin introducerea în secțiunile de separație a forțelor de legătură cu restul structurii, urmată de analiza elementului de rezistență sub acțiunea încărcărilor ce îi revin. Forțele de legătură (eforturile) ce se dezvoltă în secțiunile unei structuri de rezistență sub încărcări în poziție fixă se determină pe baza diagramelor de eforturi, iar sub încărcări în poziție variabilă, cu ajutorul liniilor de influență.

Determinarea eforturilor în secțiunile unui element de construcție se face cu scopul de a-l realiza astfel încît comportarea lui în exploatare să fie sigură iar forma și dimensiunile sale să conducă la o soluție funcțională și economică. Cu aceste probleme se ocupă o ramură a Mecanicii construcțiilor și anume Rezistența materialelor.

8.2.1. PROBLEME ȘI METODE ALE REZISTENȚEI MATERIALELOR

Pentru a efectua analiza unui element de construcție este necesar să fie cunoscută comportarea materialului din care este alcătuit, sub acțiunea forțelor care îl solicită. Caracteristicile de comportare ale materialului se stabilesc pe cale experimentală constatîndu-se că atît materialele naturale cît și cele artificiale nu sînt rigide, orice corp suferind modificări de formă și dimensiuni cînd este supus la acțiuni exterioare.

Deformabilitatea materialelor are drept consecință deformarea sub încărcări a elementelor componente ale structurii de rezistență, deci o modificare a geometriei întregii structuri.

Analiza relațiilor de natură geometrică ce rezultă ca urmare a modificării formei elementelor de rezistență constituie *studiul geometric* al acestora.

În procesul de deformare al unui corp au loc o serie de modificări fizice la nivelul constituției materialului, ca urmare a modificării forțelor de coeziune existente în starea nedeformată. În cadrul Rezistenței materialelor, analiza fenomenelor ce însoțesc procesul de deformare se face prin introducerea conceptului de forțe interioare, reprezentate în interiorul corpului de forțe distribuite după legi ce urmează a fi precizate. Aceste forțe interioare rezultă ca urmare a preluării de către corp a sistemului de forțe exterioare care îl solicită și sînt asociate unor elemente de arie infinit mici.

Relațiile de dependență între forțele interioare și deformațiile corespunzătoare definesc caracteristicile fizico-mecanice ale fiecărui material. Acestea se stabilesc numai pe cale experimentală prin încercări de laborator, măsurînd deformațiile ce corespund unor sisteme simple de forțe exterioare de intensitate cunoscută.

Această etapă de analiză din studiul comportării elementelor de construcții constituie *studiul fizic*.

Ansamblul ecuațiilor care exprimă echilibrul sistemului de forțe care acționează asupra unui element de rezistență sau a unei părți din acesta, izolată ipotetic, formează etapa de *studiu static*.

Ansamblul ecuațiilor obținute din studiile enunțate constituie un sistem a cărui rezolvare răspunde problemelor de care se ocupă Rezistența materialelor.

După cum rezultă din cele arătate, Rezistența materialelor își bazează metodele de analiză atît pe aspecte teoretice cît și pe cele experimentale. Aspectele teoretice constau în aplicarea legilor și ecuațiilor Mecanicii teoretice, iar aspectele experimentale rezultă din cercetarea în laborator a pro-

prietăților materialelor de construcție. Rezistența materialelor își dezvoltă aparatul de analiză adoptînd o serie de ipoteze simplificatoare care rețin numai aspectele semnificative, generale, ale fenomenelor, avînd drept scop obținerea unor relații de calcul simple, ușor de aplicat, fără ca prin aceasta rezultatele analizei să se îndepărteze prea mult de realitate. Urmărirea comportării reale a unei construcții, confruntarea rezultatelor experimentale cu cele calculate conduc la aprecieri asupra gradului de valabilitate a ipotezelor simplificatoare admise.

8.2.2. ASPECTE ALE PROBLEMELOR DE REZISTENȚA MATERIALELOR

În partea sa elementară, Rezistența materialelor se ocupă în principal de analiza elementelor de rezistență cu fibră medie (grinzi, bare, fire). La aceste elemente de rezistență, dimensiunea în sens longitudinal fiind impusă, obiectul analizei se restrînge la forma și dimensiunile optime ale secțiunilor transversale. Astfel restrîns, obiectivul urmărit se prezintă în practica curentă sub trei probleme de calcul:

1) Problema de verificare a dimensiunilor elementelor de rezistență. Fiind cunoscute solicitările exterioare, elementele geometrice și caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este alcătuit elementul, se cere compararea comportării efective a elementului de rezistență analizat (X_{ef}) cu valori maxime admisibile (X_{adm}) ale unei mărimi considerată caracteristică. Mărimile caracteristice comparate pot fi intensități ale forțelor interioare sau deformații ale elementului de rezistență analizat.

Elementul de rezistență este acceptat dacă este îndeplinită condiția

$$X_{ef} \leqslant X_{adm}. \tag{8.51}$$

2) Problema de dimensionare a secțiunilor transversale ale elementelor de rezistență. Fiind cunoscute solicitările exterioare și caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este alcătuit elementul, se cere determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunilor transversale, astfel încît să fie satisfăcută relația (8.51).

3) Problema de stabilire a capacității portante a elementelor de rezistență. Fiind cunoscute geometria elementului de rezistență și caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este alcătuit, se cere determinarea intensității sistemului de forțe exterioare ce solicită elementul, astfel încît să fie satisfăcută condiția (8.51).

8.2.3. IPOTEZE FUNDAMENTALE

Schematizările admise în Rezistența materialelor, în vederea stabilirii unor relații de calcul simple, au la bază o serie de ipoteze simplificatoare ce se referă la structura materialelor și la comportarea elementelor de rezistență sub încărcările care le solicită.

Ipotezele fundamentale care stau la baza dezvoltărilor teoretice din Rezistența materialelor sînt:

1) *Ipoteza continuității mediului.* Corpul este considerat ca fiind alcătuit din materie care umple fără fisuri sau discontinuități întregul spațiu limitat de contur.

2) *Ipoteza omogenității materialului.* Consideră materialul din care este alcătuit corpul ca avînd caracteristici fizico-mecanice identice în toate punctele corpului.

3) *Ipoteza izotropiei.* Admite că materialul are aceleași caracteristici de deformabilitate după orice direcție în jurul unui punct din interiorul corpului.

4) *Ipoteza comportării perfect elastice a corpului.* Elasticitatea este proprietatea materialelor de a se deforma sub încărcări și de a reveni la forma și dimensiunile inițiale după îndepărtarea cauzelor ce au produs deformarea. Problemele de Rezistența materialelor în care materialele se comportă perfect elastic sînt numite probleme liniare din punctul de vedere al materialului. În cadrul acestor probleme, legătura biunivocă între forțele interioare și deformațiile corespunzătoare se exprimă matematic printr-o relație liniară.

5) *Ipoteza deformațiilor elastice mici.* Consideră deformațiile unui corp sub încărcări mici în raport cu dimensiunile generale ale acestuia. Această ipoteză permite ca ecuațiile de echilibru să fie scrise pe forma nedeformată a corpului considerat.

6) *Ipoteza stării naturale.* Corpul analizat nu are eforturi interioare inițiale datorită unor cauze diverse ca: prelucrarea materialului, montaj, fenomene de natură chimică etc.

7) *Ipoteza dependenței locale.* Forțele interioare și deformațiile corespunzătoare sînt funcții de punctul din interiorul corpului în care se efectuează analiza.

8.2.4. EFORTURI UNITARE. DEFORMAȚII SPECIFICE

Pentru a analiza efectele unui sistem de forțe exterioare asupra unui corp se utilizează metoda secțiunilor și procedeul solidificării părților dezvoltat pentru calculul forțelor de legătură la sisteme de corpuri rigide. Conform acestui procedeu, dacă un corp (C) este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, atunci și fiecare parte a acestuia, separată din corpul (C) prin secțiuni imaginare, este în echilibru sub acțiunea forțelor care îi revin.

Considerînd corpul (C) din fig. 8.13, *a* secționat cu un plan (P) și îndepărtînd corpul (C_1), pentru respectarea echilibrului corpului (C_2), în secțiunea S trebuie introdus efectul exercitat de partea îndepărtată prin secționare.

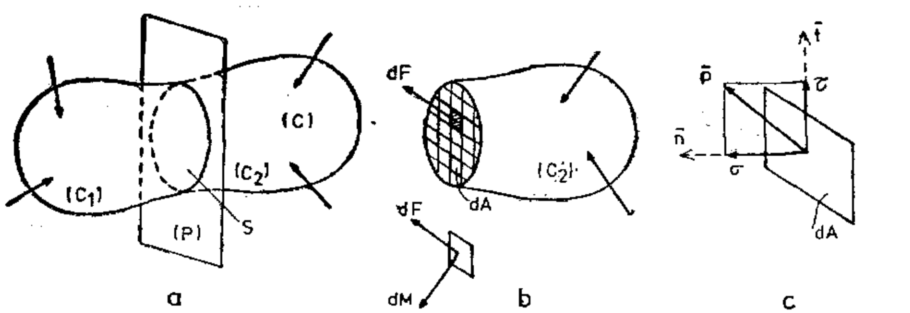


Fig. 8.13

Datorită continuității materialului, acest efect se manifestă în fiecare punct de pe secțiunea S prin apariția unor forțe de legătură interioare. Dacă se consideră o arie elementară $\mathrm{d}A$ din secțiunea S (fig. 8.13, *b*), efectul menționat este reprezentat printr-un sistem de forțe distribuite ce poate fi redus în centrul de greutate al elementului $\mathrm{d}A$ la o rezultantă forță $\mathrm{d}F$ și o rezultantă moment $\mathrm{d}M$.

Pentru a obține intensitatea într-un punct a forțelor de legătură interioare se efectuează trecerea la limită

$$\lim_{\mathrm{d}A \to 0} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} = p \tag{8.52}$$

unde p se numește efort unitar total în punctul considerat.

Rezultanta moment $\mathrm{d}M$ poate fi neglijată întrucît reprezintă cantități infinitesimale de ordinul doi în raport cu forțele interioare de legătură.

Dacă se descompune efortul unitar total $\bar{p}$ după direcția normală $\bar{n}$ la planul elementului $\mathrm{d}A$ și după o direcție cuprinsă în planul acestuia (fig. 8.13, *c*), se obțin componentele: σ — efort unitar normal și τ — efort unitar tangențial

$$\bar{p} = \sigma\bar{n} + \tau\bar{l}\,;\; p^2 = \sigma^2 + \tau^2. \tag{8.53}$$

În mod obișnuit, în punctul Q de pe secțiunea S se aleg două direcții perpendiculare pe normala $\bar{n}$ și perpendiculare între ele, iar efortul unitar tangențial τ se descompune după aceste direcții (fig. 8.14, *a*).

Componenta normală σ_x se notează cu un singur indice, cel al normalei la secțiune, iar pentru componentele τ_{xy}, τ_{xz} sînt necesari doi indici: primul (x) indică normala la secțiune, iar al doilea (y sau z), direcția cu care componenta este paralelă.

Pentru semnele componentelor efortului unitar total se adoptă convenția: efortul unitar normal σ_x este pozitiv dacă trage (întinde) de partea de corp pe care se aplică. Dacă normala la suprafața pe care acționează σ_x este orientată pozitiv în sens contrar sensului pozitiv a lui σ_x (fig. 8.14, *b*), atunci componentele lui τ sînt pozitive cînd sînt orientate în sens contrar sensului pozitiv al axei după care acționează.

Eforturile unitare p, σ, τ au dimensiunea F/L^2 și în mod uzual se măsoară în N/cm^2, N/mm^2, kgf/cm^2 etc.

Eforturile unitare definite înainte sînt mărimi deduse, ele nu pot fi observate sau măsurate la un corp solicitat de un sistem de forțe exterioare.

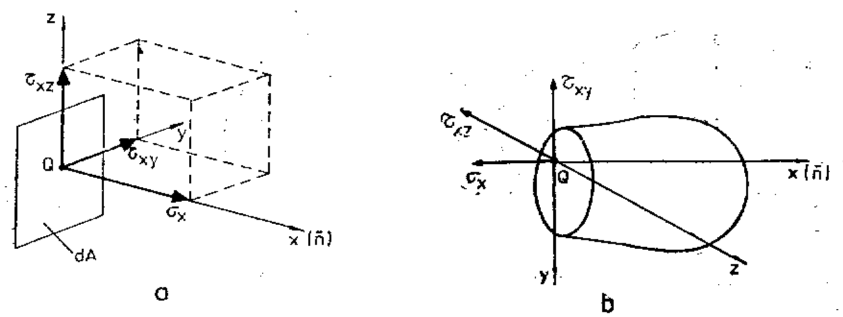


Fig. 8.14.

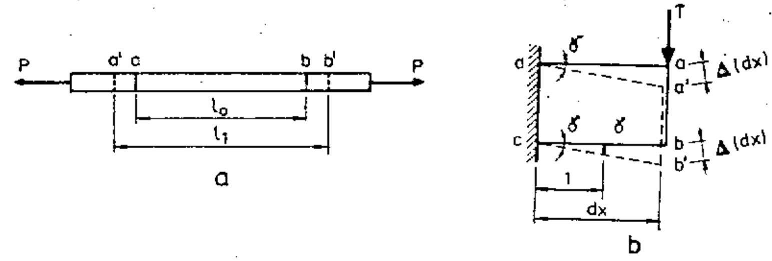


Fig. 8.15.

În schimb, se pot observa și măsura deformațiile corpului ce se manifestă în fiecare punct al acestuia ca variații ale lungimilor sau ale unghiurilor.

Se consideră o bară pe care s-au marcat două repere la distanța l_0, solicitată la întindere cu forța P. Bara se va deforma, distanța dintre repere devenind (fig. 8.15, *a*)

$$l_1 = l_0 + \Delta l. \tag{8.54}$$

Cantitatea $\Delta l = l_1 - l_0$ cu care a variat distanța inițială dintre repere se numește alungire sau deformație longitudinală. Pentru ca deformațiile să fie independente de dimensiunile geometrice ale barei se raportează alungirea la distanța inițială l_0. Acest raport poartă numele de deformație specifică axială și se notează cu ε.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}. \tag{8.55}$$

Dacă $\varepsilon > 0$, rezultă o lungire specifică, iar dacă $\varepsilon < 0$, rezultă o scurtare specifică. Fiind raportul a două lungimi, ε este adimensional. Ordinul său de mărime este foarte mic, în calculele uzuale acceptîndu-se $1 + \varepsilon \approx 1$.

Se consideră o bară de lungime elementară $\mathrm{d}x$ solicitată la forfecare cu forța T (fig. 8.15, *b*). Bara se va deforma astfel încît unghiurile drepte dintre laturile acesteia se vor modifica cu cantitatea γ.

Cantitatea γ cu care s-a modificat unghiul drept prin deformare se numește lunecare specifică sau deformație specifică unghiulară.

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{aa'}{ad} = \operatorname{arctg}\frac{\Delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}. \tag{8.56}$$

Unghiul γ este o mărime adimensională. Dacă $\gamma > 0$, unghiul drept se micșorează, iar dacă $\gamma < 0$, unghiul drept se mărește.

Orice deformație ce se manifestă în interiorul unui corp solicitat de un sistem de forțe exterioare poate fi descompusă în deformații axiale și unghiulare.

8.2.5. CURBA CARACTERISTICĂ A MATERIALULUI. LEGEA LUI HOOKE

Pentru rezolvarea problemelor Rezistenței materialelor este necesar a se stabili o relație între eforturile unitare σ, τ și deformațiile specifice corespunzătoare ε, γ. Această relație este de natură fizică, depinde de materialul din care este alcătuit elementul de rezistență analizat și se determină experimental.

Se confecționează din materialul de încercat o epruvetă de formă și dimensiuni stabilite prin norme oficiale. În general, epruveta are formă cilindrică cu capetele de o formă specială pentru a fi prinsă în mandrinele mașinii de încercat. Secțiunea transversală a epruvetei are aria A_0. Pe epruvetă se marchează două repere la distanța l_0.

Epruveta se prinde în mandrinele unei mașini de încercat la tracțiune și este solicitată de o forță axială P care crește continuu de la valoarea zero pînă la valoarea la care epruveta se rupe. Pentru diferite valori ale forței P se măsoară alungirea Δl, întocmindu-se un grafic în care pe abscisă se marchează valorile alungirilor Δl iar pe ordonată valorile corespunzătoare ale forței P (fig. 8.16, *a*). Evident, valorile forței de tracțiune P și ale alungirilor Δl depind de dimensiunile epruvetei A_0 și l_0. Pentru a obține rezultate independente de aceste dimensiuni se întocmește un grafic în care se vor înregistra pe abscisă deformațiile specifice axiale $\varepsilon = \Delta l/l_0$, iar pe ordonată valorile efortului unitar normal $\sigma = P/A_0$. Curba obținută (fig. 8.16, *b*), care stabilește legătura între eforturile unitare și deformațiile specifice corespunzătoare și caracterizează deformabilitatea unui material, se numește curbă caracteristică a materialului.

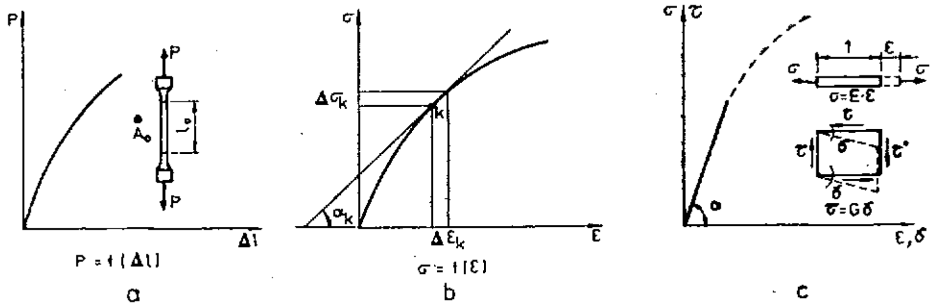


Fig. 8.16.

Se definește ca modul de elasticitate într-un punct k al curbei caracteristice, cantitatea (v. fig. 8.16, *b*)

$$E_k = \lim_{\Delta\varepsilon_k \to 0} \frac{\Delta\sigma_k}{\Delta\varepsilon_k} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha_k. \tag{8.57}$$

Pentru unele materiale curba caracteristică are porțiuni cu variație liniară (fig. 8.16, *c*) ce permit a se exprima analitic relația între eforturi unitare și deformații specifice sub forma

$$\sigma = E\varepsilon\,;\; E = \operatorname{tg}\alpha \tag{8.58}$$

relație care poartă numele de legea lui Hooke. În acest caz, modulul de elasticitate longitudinal este o constantă, valoarea sa variind de la material la material. Deoarece ε este adimensional, rezultă că modulul de elasticitate E se măsoară cu aceleași unități de măsură ca și σ, $[F/L^2]$.

În mod asemănător se poate stabili experimental relația dintre efortul unitar τ și deformația specifică unghiulară γ. Această relație se prezintă la unele materiale, pînă la o anumită valoare a efortului unitar τ, sub forma

$$\tau = G\gamma \tag{8.59}$$

în care G este modulul de elasticitate transversal.

Pe parcursul studiului experimental se constată că pentru o alungire în lungul axei barei solicitate axial, are loc o micșorare a dimensiunilor secțiunii transversale (fig. 8.17, *a*). Dacă ε este lungirea specifică în lungul axei barei, se notează cu ε_t scurtarea specifică perpendiculară pe axa barei, rezultînd

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}\,;\quad \varepsilon_t = \frac{d_1 - d}{d} = -\mu\varepsilon \tag{8.60}$$

unde μ se numește coeficientul lui Poisson ($\mu > 0$).

Pentru corpuri omogene și izotrope, în stadiul de lucru elastic, coeficientul lui Poisson poate varia numai în intervalul 0—0,5, iar între modulul de elasticitate longitudinal E, modulul de elasticitate transversal G și coeficientul lui Poisson μ există relația

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{8.61}$$

Curba caracteristică a oțelului. Oțelurile folosite curent în construcții sînt oțeluri carbon (OL32, OL34, OL37) sau oțeluri slab aliate (OL44, OL52), cu proprietăți plastice bune. Oțelul moale, cu un conținut scăzut de carbon (0,17—0,22% C), fiind un material cu largă utilizare în construcții, se va prezenta în detaliu curba caracteristică a acestuia (fig. 8.17, *b*).

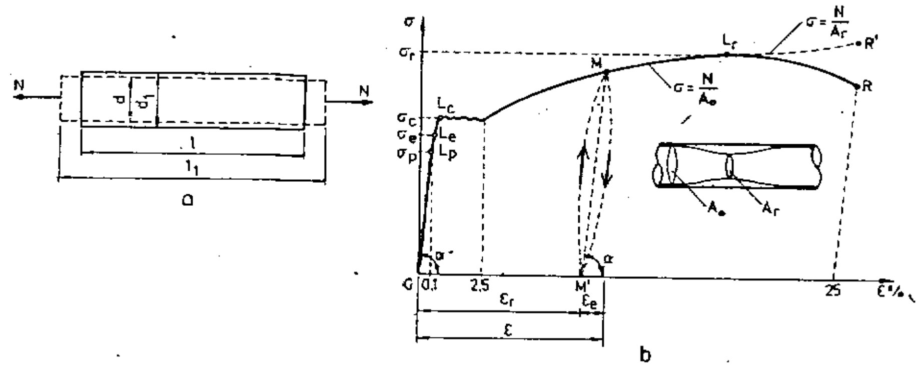


Fig. 8.17.

Pînă la o anumită valoare a efortului unitar, σ_p, numită limită de proporționalitate, eforturile unitare sînt proporționale cu deformațiile specifice, coeficientul de proporționalitate fiind modulul de elasticitate longitudinal E.

Pe curba caracteristică limita de proporționalitate corespunde punctului L_p care marchează și limita pînă la care este valabilă legea lui Hooke.

Pînă la punctul L_e de pe curbă, numit limită de elasticitate, căruia îi corespunde efortul unitar σ_e, materialul se comportă elastic, deformațiile dispar aproape complet dacă încărcarea scade pînă la valoarea zero, deci descărcarea urmărește același traseu cu încărcarea. Și pe această zonă relația între σ și ε este dată de o funcție biunivocă.

În realitate nu există material care să se comporte perfect elastic, întrucît există deformații remanente foarte mici chiar la eforturi unitare sub limita de elasticitate. Pînă la o anumită limită a încărcării, aceste deformații remanente sînt însă atît de mici încît, practic, pot fi neglijate. În aceste condiții, limita de elasticitate are un caracter convențional, ea reprezentînd valoarea σ_e a efortului unitar pentru care, la descărcare, epruveta rămîne cu o lungire specifică remanentă $\varepsilon_r = 0{,}01\%$.

Încărcînd epruveta peste limita de elasticitate, curba caracteristică prezintă o înclinare mai pronunțată, după care se înregistrează o creștere a deformațiilor specifice fără ca efortul unitar să crească, curba prezentînd un palier. Valoarea efortului unitar la care apare acest fenomen marcat pe curbă cu L_c este σ_c, limita de curgere, iar porțiunea orizontală din curba caracteristică se numește palier de curgere.

Crescînd în continuare forța ce solicită epruveta, se observă o creștere a eforturilor unitare pînă în punctul L_r, domeniu în care are loc o rearanjare a cristalelor și o consolidare a materialului. Efortul unitar σ_r, corespunzător punctului L_r de pe curba caracteristică, reprezintă rezistența totală sau rezistența la rupere a materialului. Dacă se solicită epruveta peste această limită, se constată o slăbire aparentă a rezistenței materialului, iar în punctul R are loc ruperea materialului. În zona $L_r - R$, pe o lungime restrînsă a epruvetei, apare o ștrangulare, cu o reducere apreciabilă a secțiunii transversale, ce se dezvoltă pînă cînd are loc ruperea epruvetei în secțiunea ștrangulată.

Curba caracteristică obținută are un caracter convențional deoarece eforturile unitare s-au determinat împărțind forța ce solicită epruveta la aria inițială A_0 a secțiunii transversale. În realitate, pe măsură ce forța axială crește, aria secțiunii transversale se micșorează nesemnificativ pînă la apariția strangulării și foarte puternic după apariția acesteia. Dacă după apariția strangulării eforturile unitare se determină prin împărțirea forței axiale la aria secțiunii strangulate A_r, curba caracteristică ar fi reprezentată pe zona $L_r - R'$ de curba punctată ascendentă (v. fig. 8.17, b) și nu de curba descendentă $L_r - R$. Deci, ordonata punctului R de pe curbă nu este semnificativă și, în consecință, se adoptă ordonata maximă σ_r, corespunzătoare punctului L_r, ca rezistență la rupere.

Dacă epruveta se încarcă peste limita de elasticitate, și în special peste limita de curgere, de exemplu punctul M de pe curba caracteristică, cînd se înlătură încărcarea se constată că descărcarea nu mai urmărește curba încărcării, ci se face după o dreaptă MM' paralelă cu zona de proporționalitate $O - L_p$. Epruveta nu își revine complet la dimensiunile inițiale, înregistrîndu-se o deformație remanentă ε_r, astfel că deformația specifică totală, corespunzătoare unui punct M situat după limita de elasticitate, se compune dintr-o deformație specifică elastică ε_e (reversibilă la încărcare-descărcare) și o deformație specifică remanentă ε_r (nereversibilă)

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_r. \tag{8.62}$$

La reîncărcarea epruvetei se parcurge dreapta $M'M$, materialul se comportă elastic pînă în punctul M, după care, crescînd încărcarea, curba caracteristică își reia aproximativ aspectul inițial $M - L_r - R$. Rezultă că epruveta a suferit o deformație remanentă după care se comportă elastic pentru toate eforturile unitare care nu depășesc efortul unitar care a produs deformația remanentă. Punctul M a devenit limită elastică, superioară limitei elastice inițiale, materialul prezentînd însă la rupere deformații specifice mai mici. Fenomenul poartă numele de ecruisare, fiind un procedeu de a ridica în mod artificial limita de elasticitate prin prelucrare mecanică.

În realitate, descărcarea din punctul M și reîncărcarea din M' nu au loc în mod riguros după dreapta MM' ci după curbele marcate cu săgeți în fig. 8.17, b, care închid între ele o suprafață numită bucla histerezis. Fenomenul are importanță în cazul solicitărilor variabile și repetate.

Deoarece în zona de apariție a ștrangulării deformațiile specifice cresc foarte mult, deformația specifică la rupere

$$\varepsilon_r = \frac{(\Delta l)_r}{l_0} \tag{8.63}$$

nu reprezintă o valoare omogenă pe lungimea l_0 a epruvetei și, în consecință, alungirea specifică la rupere

$$\delta_r = \frac{(\Delta l)_r}{l_0} \cdot 100 \quad [\%] \tag{8.64}$$

nu are o semnificație certă în aprecierea deformabilității la rupere a oțelului și a comportării plastice a acestuia.

Un criteriu care permite o apreciere mai corectă decît $\delta_r(\%)$ a caracterului ruperii și a capacității de deformare plastică înaintea ruperii este stricțiunea

$$\psi = \frac{A_0 - A_r}{A_0} \cdot 100 \quad [\%] \tag{8.65}$$

în care: A_0 este aria inițială a secțiunii transversale a epruvetei, iar A_r — aria secțiunii strangulate în care a avut loc ruperea.

Pentru oțelul OL37, principalele valori caracteristice sînt: $\sigma_r = 370$ N/mm², $\sigma_c = 240$ N/mm², $\sigma_p = 190$ N/mm², $E = 2{,}1 \cdot 10^7$ N/cm², $\delta_r = 25...28\%$.

Observații asupra curbelor caracteristice ale materialelor. Din punctul de vedere al deformării unui material și după mărimea deformațiilor înainte de rupere, materialele se împart în două categorii:

a) materiale tenace (ductile) care prezintă deformații plastice mari după limita de elasticitate înainte de rupere. Din această categorie fac parte oțelurile moi, zincul, cuprul, plumbul etc. Pentru materialele tenace, reprezentativ este oțelul moale pentru care în fig. 8.17, b s-a prezentat curba caracteristică. Asemănător se comportă și alte metale și aliaje, curba caracteristică a fiecăruia prezentînd în general aceleași zone ca cea a oțelului moale;

b) materiale fragile (casante) care se rup brusc, fără a prezenta înainte de rupere deformații mari. Din această categorie fac parte fonta, oțelurile superioare, piatra naturală, betonul, sticla etc. Curba caracteristică a materialelor fragile nu prezintă palier de curgere. În fig. 8.18, a este prezentată curba caracteristică a fontei, specifică materialelor cu rupere fragilă. Prezentînd deformații specifice mici înainte de rupere, materialele fragile nu sînt recomandate a fi folosite în alcătuirea elementelor de construcție solicitate la încărcări dinamice.

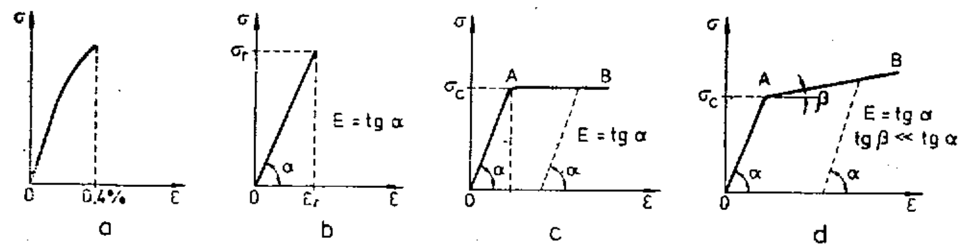


Fig. 8.18.

Curba caracteristică a unui material este *influențată și de condițiile* în care se face încărcarea epruvetei. Pentru oțelul moale, temperatura și viteza de încărcare pot influența semnificativ anumite zone ale curbei caracteristice.

Proprietățile mecanice ale oțelurilor utilizate în construcții se modifică puțin prin încălzire pînă la temperatura de 200...250°C, dar la o temperatură de 300...330°C se produce o puternică îmbătrînire. La această temperatură oțelul prezintă rupere fragilă. La temperaturi mai mari are loc o scădere rapidă a limitei de curgere și a rezistenței la rupere. La temperaturi sub 0°C se produce o creștere ușoară a rezistențelor oțelului, în schimb alungirile la rupere scad apreciabil.

Viteza cu care încărcarea crește de la zero pînă la valoarea de rupere influențează înclinarea zonei de proporționalitate a curbei caracteristice, rezistența de rupere și alungirea. Cu cît viteza de încărcare este mai mare, înclinarea zonei de proporționalitate crește, rezistența de rupere crește iar alungirea la rupere scade.

Este de remarcat că asupra materialelor se fac și alte încercări cu scopul de a stabili modul lor de comportare la diferite tipuri de solicitări. Prin prescripții oficiale se stabilesc tipurile de încercări și condițiile în care acestea se efectuează.

Curbe caracteristice idealizate. Stabilirea unor relații de calcul simple în Rezistența materialelor nu se poate face pe baza curbelor caracteristice reale ale diferitelor materiale. De aceea sînt propuse o serie de curbe caracteristice *simplificate reduse la segmente de dreaptă corespunzătoare domeniilor de comportare elastică, respectiv plastică.*

Pentru materiale casante, cu rupere fragilă, se adoptă comportarea ideal elastică reprezentată printr-o dreaptă a cărei înclinare este dată de modulul de elasticitate (fig. 8.18, *b*).

Pentru materiale ductile, cu deformații plastice mari înainte de rupere, se adoptă comportarea ideal elasto-plastică reprezentată prin două drepte: dreapta OA în care materialul se comportă ideal elastic are înclinarea dată de modulul de elasticitate, iar dreapta AB, paralelă cu abscisa, în care materialul se comportă ideal plastic (fig. 8.18, *c*). Această diagramă caracteristică idealizată este cunoscută sub numele de curba Prandtl.

Pentru unele materiale ductile se poate adopta și un model ideal elasto-plastic cu consolidare în care palierul de curgere este înlocuit cu o dreaptă ce are o înclinare față de abscisă (fig. 8.18, *d*). La ambele tipuri de curbe caracteristice ideal elasto-plastice descărcarea dintr-un punct situat după limita de elasticitate se face după o dreaptă paralelă cu AB.

8.2.6. METODE PENTRU CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL ELEMENTELOR DE CONSTRUCȚII

Principalele procedee pentru calculul elementelor de rezistență ale unei construcții pot fi încadrate în trei metode:

Metoda rezistențelor admisibile. Metoda constă în determinarea efortului unitar efectiv maxim și compararea lui cu o limită convențională, stabilită astfel încît în exploatare elementele de construcție și construcția în ansamblu să prezinte siguranță. Această limită convențională depinde de proprietățile

materialului din care este realizată construcția, de tipul solicitărilor exterioare, de destinația construcției etc. Dezavantajul metodei constă în faptul că admite drept stare limită de rezistență atingerea valorii limită convenționale într-un singur punct, ceea ce este valabil numai în cazul materialelor fragile. Pentru materiale tenace, la care curba caracteristică prezintă palier de curgere, rezultă o capacitate de rezistență mult mai mare, neglijată în cadrul metodei.

Un element de construcție este acceptat în structură dacă este îndeplinită condiția (8.51)

$$X_{ef} \leqslant X_{adm}$$

unde: X_{ef} este efortul unitar maxim determinat prin calcule iar X_{adm} — rezistența admisibilă a materialului determinată experimental.

Rezistența admisibilă este o valoare convențională a efortului unitar care nu trebuie depășită, în nici un punct al unei construcții, de eforturile unitare efective maxime stabilite pe baza ipotezelor de încărcare cele mai defavorabile. Rezistența admisibilă se stabilește în general din analiza curbei caracteristice a materialului. De exemplu, în cazul oțelului moale, efortul unitar normal admisibil se stabilește pe următoarele criterii. Efortul unitar normal maxim ce se poate dezvolta într-un punct al unui element de construcție este rezistența de rupere σ_r, deci rezistența admisibilă trebuie să fie mai mică decît această limită. Pentru ca sub încărcările de exploatare, elementul de construcție să nu înregistreze deformații mari, trebuia ca $\sigma_a < \sigma_c$, iar pentru a nu înregistra deformații remanente trebuie ca $\sigma_a < \sigma_e$. Întrucît ipoteza de bază a metodei rezistențelor admisibile este comportarea perfect elastică a materialului trebuie ca $\sigma_a < \sigma_p$. În practică nu se ajunge cu rezistența admisibilă pînă la limita de proporționalitate deoarece există riscul depășirii acesteia datorită unor incertitudini ca: încărcările se determină cu aproximație, în practică existînd posibilitatea depășirii valorilor calculate; analiza se efectuează pe scheme de calcul obținute prin neglijarea efectului unor legături; caracteristicile mecanice ale materialelor din care se realizează construcția pot diferi, în anumite limite, de cele luate în calcule.

În aceste condiții, rezistența admisibilă se obține prin împărțirea rezistenței de rupere sau a celei de curgere la coeficienți de siguranță globali numiți coeficienți de siguranță admisibili

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_{ar}}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_{ac}}. \tag{8.66}$$

În cazul oțelului moale OL37 coeficienții de siguranță admisibili au valorile:

$$c_{ac} = 1{,}5; \quad c_{ar} = 2{,}31 \tag{8.67}$$

deci efortul unitar normal admisibil este

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_{ar}} = \frac{3\,700}{2{,}31} = 1\,600 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_{ac}} = \frac{2\,400}{1{,}5} = 1\,600 \text{ daN/cm}^2. \tag{8.68}$$

Pentru exprimarea cantitativă a siguranței unui element de construcție se utilizează coeficientul de siguranță efectiv, care poate fi raportat față de limita de rupere ($c_{r\,ef}$) sau față de limita de curgere ($c_{c\,ef}$)

$$c_{r\,ef} = \frac{\sigma_r}{\sigma_{ef}}; \quad c_{c\,ef} = \frac{\sigma_c}{\sigma_{ef}} \tag{8.69}$$

unde σ_{ef} reprezintă efortul unitar efectiv determinat pe baza încărcărilor de calcul. Din punctul de vedere al siguranței, un element de construcție este acceptat dacă

$$c_{ef} \leqslant c_a. \tag{8.70}$$

Stabilirea coeficienților de siguranță și implicit a rezistențelor admisibile este o problemă de mare importanță tehnică și economică, trebuind să îmbine în mod armonios cele două cerințe în aparență contradictorii. Coeficienții de siguranță și rezistențele admisibile sînt stabiliți prin prescripții oficiale funcție de: tipul materialului, natura încărcărilor, ipotezele admise și destinația construcției.

Metoda de calcul la rupere. Metoda constă în determinarea capacității portante a unui element de construcție pe baza caracteristicilor geometrice ale secțiunilor transversale ale elementului și a proprietăților mecanice ale materialului din care acesta este realizat. Această capacitate portantă este determinată pentru situația de rupere a materialului. Valoarea solicitărilor maxime se obține prin împărțirea capacității portante la rupere la un coeficient de siguranță

$$X_{max} \leqslant X_r/c. \tag{8.71}$$

Principalul dezavantaj al metodei constă în introducerea unui coeficient de siguranță global ce nu ține seama de incertitudinile încărcărilor, de modul de variație a caracteristicilor fizico-mecanice ale materialelor etc. care solicită coeficienți de siguranță diferențiați.

Metoda stărilor limită. Prin stare limită a unui element de construcție sau a construcției în ansamblu se înțelege acea situație a cărei depășire face ca exploatarea normală a construcției să devină improprie deoarece: se rupe sau prezintă deformații mari, vibrează, se dezvoltă fisuri mari etc.

Metoda presupune evaluarea solicitărilor maxime pe baza unor coeficienți de supraîncărcare diferențiați și compararea acestora cu capacitatea portantă minimă corespunzătoare fiecărei stări limită determinată pe baza unor coeficienți diferențiați pentru calitatea materialului și a condițiilor de lucru.

8.2.7. ECHIVALENȚA ÎNTRE EFORTURI SECȚIONALE ȘI EFORTURI UNITARE. CLASIFICAREA SOLICITĂRILOR

Eforturile secționale se obțin prin reducerea în centrul de greutate al secțiunii transversale a unei grinzi, a forțelor exterioare situate la stînga (sau dreapta) secțiunii considerate (fig. 8.19, *a*). Ansamblul forțelor elementare interioare ce acționează pe secțiunea transversală poate fi reprezentat prin componentele torsorului de reducere al acestora în centrul de greutate al secțiunii. Proiecțiile componentelor torsorului de reducere a forțelor elementare interioare ($\sigma_x\,dA$, $\tau_{xy}\,dA$, $\tau_{xz}\,dA$) conduc la eforturile secționale. Relațiile de echivalență între eforturile secționale (v. fig. 8.19,*a*) și forțele elementare (fig. 8.19,*b*) pot fi exprimate sub forma:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x\,dA; & M_x &= \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y)\,dA \\ T_y &= \int_A \tau_{xz}\,dA; & M_y &= \int_A \sigma_x z\,dA \\ T_z &= \int_A \tau_{xy}\,dA; & M_z &= \int_A \sigma_x y\,dA. \end{aligned} \tag{8.72}$$

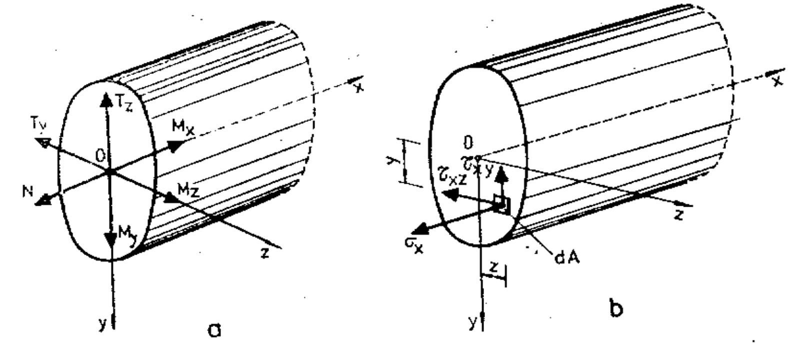


Fig. 8.19.

Clasificarea solicitărilor. Acțiunea eforturilor secționale asupra unei secțiuni transversale constituie solicitarea acesteia. În general, dacă axele Oy și Oz sînt axe centrale principale de inerție din secțiunea transversală a unei grinzi, solicitarea acesteia este produsă de acțiunea a șase eforturi secționale N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z. Dacă încărcările exterioare au orientări particulare, rezultă solicitări particulare conținînd numai o parte din cele șase eforturi secționale posibile. În mod uzual, solicitările barelor se clasifică în două grupe: solicitări simple, în care intervine o singură componentă a eforturilor secționale și solicitări compuse, în care intervin mai multe componente. Pe baza acestui criteriu se disting următoarele solicitări:

1) Solicitări simple:

— solicitarea axială (întindere, compresiune), produsă de N;

— solicitarea de forfecare pură, produsă de T_y sau T_z;

— solicitarea de încovoiere pură, produsă de M_y sau M_z;

— solicitarea de torsiune (răsucire) pură, produsă de M_x.

2) Solicitări compuse:

— solicitarea de încovoiere oblică, produsă de acțiunea simultană a lui M_y și M_z;

— solicitarea de încovoiere cu forță axială, produsă de acțiunea simultană a lui N, M_y M_z;

— solicitarea de încovoiere cu forță tăietoare, produsă de acțiunea simultană a lui M_z și T_z sau M_y și T_y;

— solicitarea de încovoiere cu răsucire, produsă de acțiunea simultană a lui M_x, M_y, M_z;

— orice altă combinație între eforturile secționale.

8.3. SOLICITAREA DE ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE (SOLICITAREA AXIALĂ)

Secțiunea transversală a unui element de construcție este solicitată axial dacă în centrul de greutate al secțiunii torsorul de reducere al forțelor exterioare este reprezentat numai de un efort axial N. După sensul forței axiale solicitarea va fi de întindere (fig. 8.20, *a*) sau de compresiune (fig. 8.20, *b*).

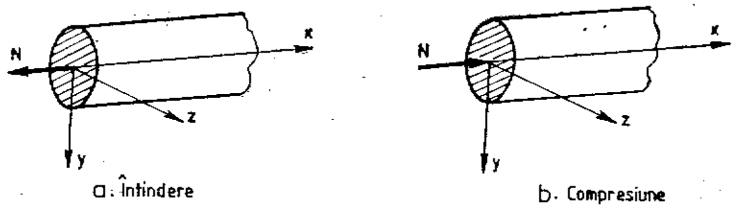


Fig. 8.20.

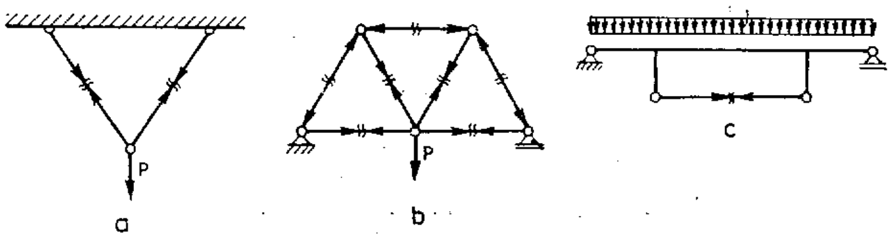


Fig. 8.21.

Elementele de construcție la care solicitarea de întindere sau de compresiune este un fenomen predominant sînt: firele (fig. 8.21, *a*), barele grinzilor cu zăbrele (fig. 8.21,*b*), tiranții (fig. 8.21,*c*), stîlpii etc.

8.3.1. RELAȚIA DINTRE EFORTURILE UNITARE ȘI EFORTUL SECȚIONAL

Studiul geometric. Tipul și modul de distribuție a eforturilor unitare pe secțiunea transversală se stabilesc pe cale experimentală. Pe suprafața laterală a unei bare cu secțiune circulară se trasează două tipuri de repere: o serie de repere longitudinale dirijate după generatoare și o serie de repere transversale, normale pe generatoare, care materializează conturul exterior al secțiunilor transversale (fig. 8.22, *a*). Bara este solicitată axial și în consecință se va deforma. După deformarea barei se constată următoarele:

— cercurile ce materializează secțiuni transversale rămîn paralele între ele, distanța λ modificîndu-se cu $\Delta\lambda$ (fig. 8.22,*b*);

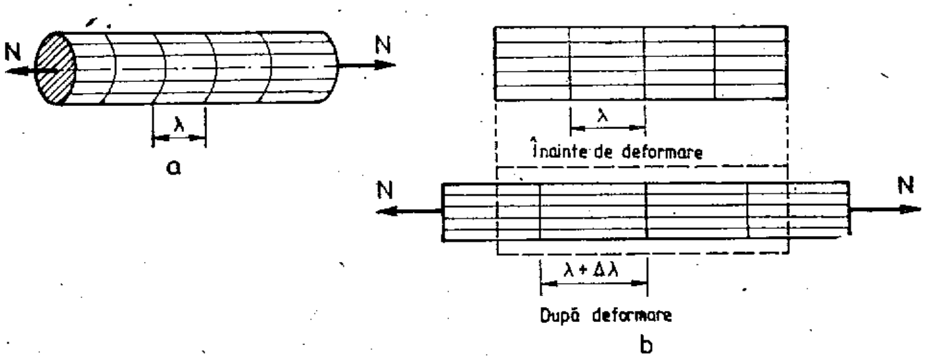


Fig. 8.22.

— generatoarele inițial drepte rămîn drepte și după deformarea barei și normale pe reperele transversale;

— bara își modifică dimensiunile și în sens transversal.

Din examinarea comportării barei după deformare se pot desprinde o serie de aspecte care formează studiul geometric:

— secțiunile plane și normale pe axa barei, înainte de deformare rămîn plane și normale pe axă după deformare (ipoteza lui Bernoulli);

— deformarea unei bare solicitată axial se produce fără vibrații de unghiuri ($\varepsilon_x \neq 0$, $\gamma = 0$) deci în secțiunea transversală vor apărea numai eforturi unitare normale σ_x;

— deformațiile specifice ε_x au aceeași valoare în orice punct de pe secțiunea transversală

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \text{const.} \tag{8.73}$$

Studiul static. Pe un element de arie dA al secțiunii transversale (fig. 8.23, *a*) se dezvoltă o forță elementară dN a cărei valoare este

$$dN = \sigma_x \, dA. \tag{8.74}$$

Avînd în vedere relațiile de echivalență, rezultă că efortul axial N reprezintă rezultanta forțelor elementare dN

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma_x \, dA. \tag{8.75}$$

Relația (8.75) conține o nedeterminare și anume legea de variație a eforturilor unitare σ_x pe secțiunea transversală.

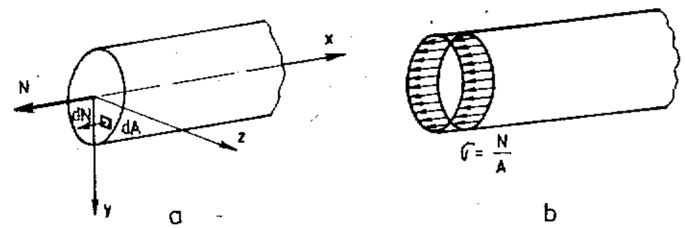


Fig. 8.23.

Studiul fizic. Avînd în vedere rezultatele studiului geometric și relația între eforturile unitare σ_x și deformațiile specifice corespunzătoare (legea lui Hooke) rezultă

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \sigma = \text{const.} \tag{8.76}$$

Efortul unitar normal σ fiind uniform distribuit pe secțiunea transversală rezultă

$$N = \int_A \sigma \, dA = \sigma \int_A dA = \sigma A \tag{8.77}$$

unde $\int_A dA = A$ este aria secțiunii transversale.

Deci

$$\sigma = \frac{N}{A}. \tag{8.78}$$

Efortul unitar normal σ are același semn cu efortul axial N (fig. 8.23, *b*).

Relația de calcul obținută este valabilă și în cazul secțiunilor solicitate la compresiune dacă dimensiunile acestora sînt comparabile cu lungimea elementului de construcție. În cazul barelor cu secțiuni transversale mici în raport cu lungimea, relația (8.78) este aplicabilă numai pînă la o anumită valoare a forței de compresiune, la care nu se manifestă fenomenul de pierdere a stabilității.

Ipoteza distribuției uniforme a eforturilor unitare pe secțiunea transversală este valabilă pentru secțiuni suficient depărtate de zona de aplicare a încărcărilor exterioare. După cum rezultă din fig. 8.24, în vecinătatea capetelor barei secțiunile nu mai rămîn plane și nici paralele între ele, afectînd considerabil distribuția eforturilor unitare σ. Perturbația față de distribuția uniformă se limitează pe o zonă mică a cărei lungime nu depășește înălțimea secțiunii transversale.

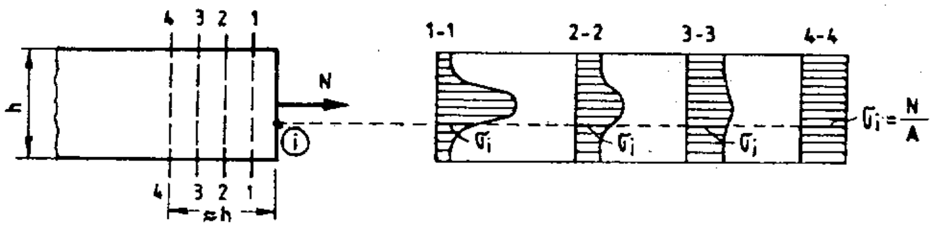


Fig. 8.24.

8.3.2. **ASPECTE DE CALCUL**

Restrîngînd obiectul Rezistenței materialelor la analiza formei optime și a dimensiunilor secțiunilor transversale, în practica curentă inginerească pot apărea următoarele aspecte de calcul:

Verificarea. Se cunosc în această situație forma și dimensiunile elementului de construcție, materialul din care este realizat și eforturile secționale care solicită secțiunile transversale ale elementului. Se cere să se verifice dacă elementul este corespunzător alcătuit.

În cazul solicitării axiale sînt cunoscute: aria secțiunii transversale A, efortul axial N, efortul unitar normal admisibil σ_a. Se cere verificarea efortului unitar normal efectiv:

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A}. \tag{8.79}$$

În vederea unei comportări corespunzătoare, efortul unitar efectiv maxim este limitat la valoarea rezistenței admisibile. Deci relația de verificare este

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A} \leqslant \sigma_a. \tag{8.80}$$

Dimensionarea. Cunoscînd solicitările unui element de construcție și materialul din care se va realiza, se cere să se stabilească forma și dimensiunile secțiunilor transversale ale elementului astfel ca relația (8.80) să fie satisfăcută.

În cazul solicitării axiale sînt cunoscute forța axială N, rezistența admisibilă σ_a și se cere determinarea caracteristicilor geometrice ale secțiunii transversale a elementului, aria necesară A_{nec}

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}. \tag{8.81}$$

Cunoscînd aria necesară, se aleg forma și dimensiunile secțiunii transversale ținînd seama de necesitățile funcționale și de sortimentele de material disponibile. În general, secțiunea aleasă diferă de secțiunea necesară datorită numărului limitat al sortimentelor din care se realizează elementul, ceea ce impune ca după alegerea secțiunii să se facă o verificare a elementului. Dimensionarea este corespunzătoare atît sub aspect tehnic cît și economic dacă

$$0{,}97\sigma_a \leqslant \sigma_{ef} \leqslant 1{,}03\,\sigma_a. \tag{8.82}$$

Capacitatea portantă. Pe baza dimensiunilor elementelor și a rezistențelor admisibile ale materialelor din care sînt alcătuite se cere stabilirea încărcărilor maxime care pot fi suportate de fiecare element de construcție sau de construcția în ansamblul ei.

În cazul solicitării axiale sînt cunoscute aria efectivă a secțiunii transversale A_{ef} și rezistența admisibilă σ_a și se cere determinarea efortului axial N_{cap} maxim astfel ca relația (8.80) să fie satisfăcută. Rezultă

$$N_{cap} = A_{ef}\sigma_a. \tag{8.83}$$

Relațiile de calcul (8.80), (8.81) și (8.83) analizează situația unei singure secțiuni din cadrul elementului de construcție și în consecință trebuie aplicate secțiunii care prezintă situația cea mai defavorabilă.

8.3.3. **SECȚIUNE PERICULOASĂ**

În general, elementele de construcție au forme și dimensiuni variate prezentînd variații ale secțiunii transversale pe lungimea elementului. Această variație a secțiunii transversale la elemente solicitate axial rezultă atît din necesități constructive cît și din necesitatea de a asambla între ele diferite elemente pentru a realiza construcția în ansamblul ei. În fig. 8.25 este prezentată prinderea unei bare metalice realizată dintr-o platbandă la un guseu cu ajutorul niturilor. Pentru introducerea niturilor platbanda se găurește, secțiunile ei transversale se micșorează (se slăbesc) în zona prinderii. Secțiunea transversală curentă a barei se numește secțiune brută A_b (secțiunea *1—1*). Secțiunea în care se practică slăbiri se numește secțiune netă A_{net} (secțiunile *2—2* și *3—3*). Pentru bara din fig. 8.25 rezultă

$$A_b = bt\,;\; A_{net\,2} = (b-d)t\,;\; A_{net\,3} = (b-2d)t. \tag{8.84}$$

Eforturile unitare se transmit numai prin zonele din secțiunea transversală în care materialul este continuu, deci în secțiunile slăbite eforturile unitare acționează numai pe aria netă. De aceea, în cazul elementelor de construcție care prezintă slăbiri, în relațiile de calcul se va introduce aria netă

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_{net}}. \tag{8.85}$$

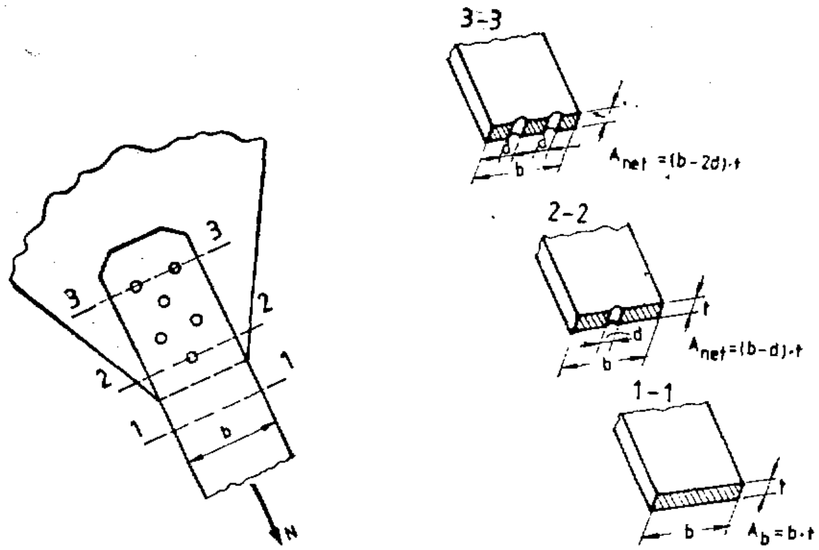


Fig. 8.25.

Dacă forța axială N sau aria secțiunii transversale A_{net} variază pe lungimea unei bare, rezultă că efortul unitar variază de la secțiune la secțiune. Secțiunea în care efortul unitar este maxim se numește secțiune periculoasă, reprezentînd secțiunea cu situația cea mai defavorabilă.

La stabilirea secțiunii periculoase se disting trei situații:

1) N = constant, A = variabil.

În cazul barelor cu forță axială constantă și secțiune transversală variabilă, secțiunea periculoasă este secțiunea cu arie minimă, A_{min}, deoarece în această secțiune N/A are valoare maximă.

În cazul barei din fig. 8.26, întrucît $N = P$ = const pentru toate secțiunile rezultă:

— dacă $d > 2a$, $A_{net\,2} < A_{net\,3}$, deci secțiunea periculoasă este $2-2$;

— dacă $d < 2a$, $A_{net\,3} < A_{net\,2}$, deci secțiunea periculoasă este $3-3$.

2) N = variabil, A = constant.

În cazul barelor cu forță axială variabilă și secțiune transversală constantă, secțiunea periculoasă coincide cu secțiunea în care forța axială are valoare maximă.

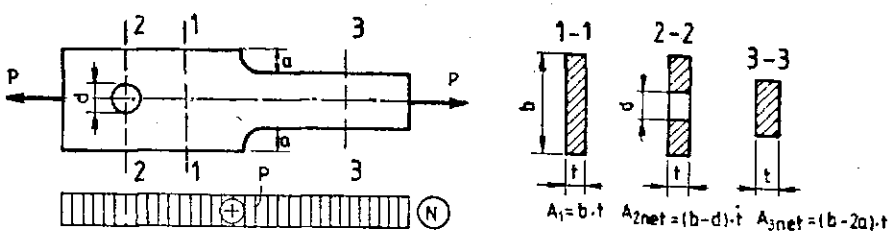


Fig. 8.26.

Pentru bara din fig. 8.27, *a* forța axială variază pe lungimea barei datorită influenței greutății proprii.

Dacă se notează cu A aria secțiunii transversale și cu γ greutatea specifică, forța axială într-o secțiune curentă a barei are expresia

$$N(x) = P + \gamma A x\,;\ N_{max} = P + A\gamma l = P + G \qquad (8.86)$$

unde G este greutatea întregii bare.

3) N = variabil, A = variabil.

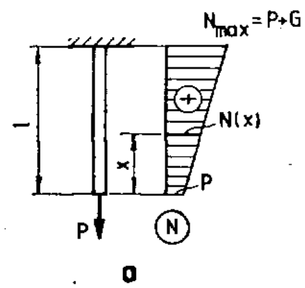
În cazul barelor cu forță axială și secțiune transversală variabile se trasează diagrame de variație a eforturilor unitare în lungul barei, din care rezultă secțiunea periculoasă.

Pentru bara din fig. 8.27,*b* se obține

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{P}{A_0};\ \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{3P}{3A_0} = -\frac{P}{A_0};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{2{,}5P}{2A_0} = -1{,}25\,\frac{P}{A_0}. \qquad (8.87)$$

Dacă materialul are aceeași rezistență admisibilă la întindere și compresiune, toate secțiunile cu aria A_3 sînt secțiuni periculoase.



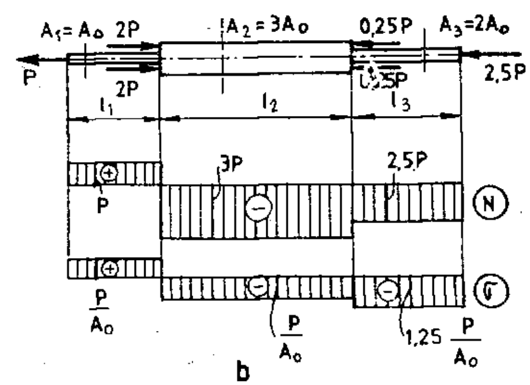


Fig. 8.27.

8.3.4. DEFORMAȚIA BARELOR SOLICITATE AXIAL

Prin deformația unei bare se înțelege modificarea dimensiunilor sale geometrice cînd este supusă acțiunii unui sistem de forțe exterioare. În cazul barelor care au secțiunile transversale solicitate la un efort de întindere sau compresiune, s-a observat experimental existența unor deformații longitudinale de modificare a dimensiunii în direcția axei barei și a unor deformații transversale de modificare a dimensiunilor secțiunilor transversale.

Pentru analiza deformațiilor longitudinale ale unei bare de lungime l, aria secțiunii transversale A și modulul de elasticitate al materialului E, se examinează deformația unui element de lungime dx delimitat de două secțiuni solicitate de forța axială N (fig. 8.28).

Deformația elementului de lungime dx este

$$\Delta(\mathrm{d}x) = \varepsilon \, \mathrm{d}x \tag{8.88}$$

unde ε este deformația specifică liniară.

Deformația totală a barei este

$$\Delta l = \int_0^l \Delta(\mathrm{d}x) = \int_0^l \varepsilon \, \mathrm{d}x. \tag{8.89}$$

Dar $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$; $\sigma = \frac{N}{A}$; $\varepsilon = \frac{N}{EA}$. (8.90)

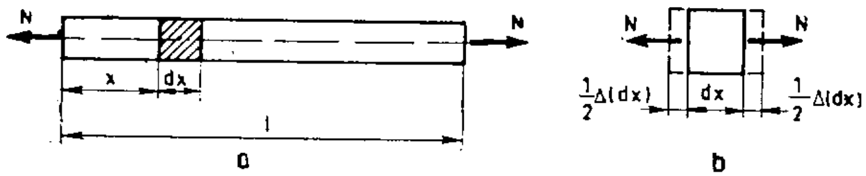


Fig. 8.28.

Întrucît N, E, A sînt constante pe lungimea barei, rezultă

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} \mathrm{d}x = \frac{N}{EA} \int_0^l \mathrm{d}x = \frac{Nl}{EA}. \tag{8.91}$$

Dacă bara este alcătuită din mai multe tronsoane, pe fiecare tronson forța axială și secțiunea transversală fiind constante, deformația totală se obține însumînd deformațiile tuturor tronsoanelor.

Pentru bara din fig. 8.27, *b* deformația longitudinală totală va fi

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 \tag{8.92}$$

$$\Delta l = \frac{Pl_1}{EA_0} - \frac{3Pl_2}{3EA_0} - \frac{2{,}5Pl_3}{2EA_0}. \tag{8.93}$$

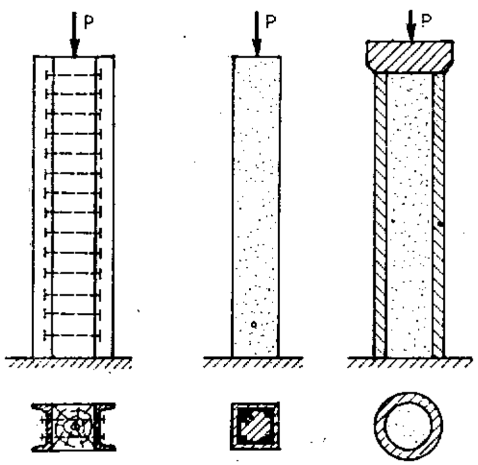


Fig. 8.29.

8.3.5. BARE CU SECȚIUNE NEOMOGENĂ SOLICITATE AXIAL

În alcătuirea structurilor de rezistență se întîlnesc frecvent elemente de construcție formate din două sau mai multe materiale cu caracteristici fizico-mecanice diferite, solidarizate între ele astfel încît sînt obligate să se deformeze unitar. O secțiune transversală printr-un astfel de element este neomogenă întrucît este alcătuită din materiale diferite. Este cazul stîlpilor din lemn consolidați cu elemente metalice (fig. 8.29, *a*) solidarizate cu șuruburi, a stîlpilor din beton armat (fig. 8.29, *b*), sau a stîlpilor din țeavă metalică și umplutură

de beton (fig. 8.29, *c*) etc. Caracteristica acestor piese care alcătuiesc elementul de rezistență constă în solidarizarea materialelor componente astfel încît ansamblul obținut să se comporte ca un tot unitar.

Efectul încărcărilor exterioare. În fig. 8.30, *a* este prezentat schematic un element de construcție alcătuit din n piese din materiale diferite legate împreună și acționate de forța exterioară P care produce numai solicitare axială.

Se notează cu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ariile secțiunilor pieselor din care este alcătuit elementul, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ modulele de elasticitate ale materialelor ce alcătuiesc elementul, $N_1, N_2, \ldots, N_n$ cotele din forța axială $N = P$ care se distribuie pieselor componente.

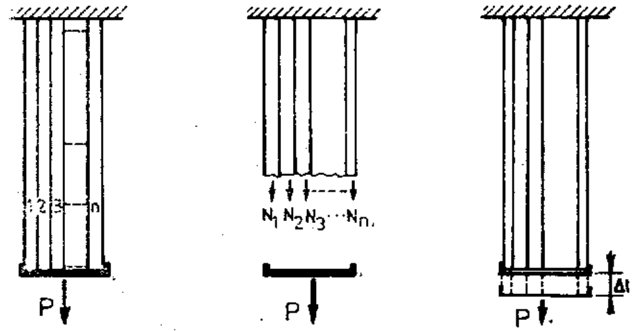


Fig. 8.30.

În vederea dezvoltării aspectelor de calcul pentru un element alcătuit din mai multe piese cu materiale diferite este necesar a se determina forța axială N_i ce revine fiecărei piese.

Aspectul static al problemei furnizează o ecuație de echivalență între forța exterioară P și componentele forței axiale din fiecare piesă (fig. 8.30, *b*)

$$N_1 + N_2 + \ldots + N_i + \ldots + N_n = P. \tag{8.94}$$

Ecuația cuprinde atîtea necunoscute cîte materiale diferite alcătuiesc elementul. Dispunînd de o singură ecuație cu n necunoscute, problema este de $(n-1)$ ori static nedeterminată.

Pentru rezolvare se apelează la aspectul geometric (fig. 8.30, *c*) impunînd ca deformațiile longitudinale ale materialelor componente să fie egale

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \ldots = \Delta l_i = \ldots = \Delta l_n \tag{8.95}$$

sau

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_i = \ldots = \varepsilon_n \tag{8.96}$$

conducînd la $(n-1)$ ecuații suplimentare.

Din rezolvarea sistemului de ecuații (8.94) și (8.96) rezultă valorile forțelor axiale în piesele cu materiale diferite ce alcătuiesc elementul de construcție.

În continuare, aspectele de calcul se vor trata pentru cazul unui element alcătuit din două materiale diferite.

Determinarea eforturilor în secțiunile materialelor componente. Ecuația de echivalență statică

$$N_1 + N_2 = P. \tag{8.97}$$

Ecuaţia de compatibilitate a deformaţiilor

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \quad \text{sau} \quad \frac{N_1 l}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l}{E_2 A_2}. \tag{8.98}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (8.97), (8.98) rezultă

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P = \frac{P}{1 + \dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1}} \tag{8.99}$$

$$N_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P = \frac{P}{1 + \dfrac{E_1 A_1}{E_2 A_2}}. \tag{8.100}$$

Verificarea secţiunilor neomogene. Operaţia de verificare constă în compararea eforturilor unitare efective cu cele admisibile pentru toate materialele ce compun secţiunea. Sînt cunoscute ariile secţiunilor pieselor care alcătuiesc elementul A_1, A_2, rezistenţele admisibile ale materialelor componente σ_{a1}, σ_{a2}, modulele de elasticitate ale materialelor componente E_1, E_2 şi forţa axială totală P.

Cunoscînd forţele axiale N_1 şi N_2 se pot determina eforturile unitare efective

$$\sigma_{ef_1} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{E_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P \tag{8.101}$$

$$\sigma_{ef_2} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{E_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P. \tag{8.102}$$

Notînd cu $n = E_2/E_1$ coeficientul de echivalenţă, relaţiile (8.101) şi (8.102) devin

$$\sigma_{ef_1} = \frac{P}{A_1 + \dfrac{E_2}{E_1} A_2} = \frac{P}{A_1 + nA_2} = \frac{P}{A_i} \tag{8.103}$$

$$\sigma_{ef_2} = \frac{\dfrac{E_2}{E_1}}{A_1 + \dfrac{E_2}{E_1} A_2} P = \frac{nP}{A_1 + nA_2} = n\sigma_{ef_1} \tag{8.104}$$

unde $A_i = A_1 + nA_2$ are dimensiunea unei arii şi poartă numele de arie ideală.

Condiţiile de verificare sînt

$$\sigma_{ef_1} = \frac{P}{A_{id}} \leqslant \sigma_{a1} \tag{8.105}$$

$$\sigma_{ef_2} = n\sigma_{ef_1} \leqslant \sigma_{a_2}. \tag{8.106}$$

Conform relaţiei (8.106), nu este posibil să se realizeze simultan valorile admisibile în toate materialele componente.

Dimensionarea secţiunilor neomogene. Sînt cunoscute forţa axială totală P, rezistenţele admisibile, σ_{a_1}, σ_{a_2} şi modulele de elasticitate E_1, E_2 ale materialelor componente. Se cere determinarea ariilor celor două piese cu materiale diferite care alcătuiesc elementul.

În cazul a două materiale, condiţiile de dimensionare sînt

$$\frac{PE_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leqslant \sigma_{a_1}; \quad \frac{P}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leqslant \frac{\sigma_{a_1}}{E_1} \tag{8.107}$$

$$\frac{PE_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leqslant \sigma_{a_2}; \quad \frac{P}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leqslant \frac{\sigma_{a_2}}{E_2}. \tag{8.108}$$

Aceste condiţii pot fi restrînse într-o dublă inegalitate

$$\frac{\sigma_{a_2}}{E_2} \geqslant \frac{P}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \leqslant \frac{\sigma_{a_1}}{E_1}. \tag{8.109}$$

Pentru a satisface ambele inegalităţi, ariile A_1 şi A_2 trebuie astfel alese încît termenul central din relaţia (8.109) să fie egal cu cea mai mică valoare dintre σ_{a_1}/E_1 şi σ_{a_2}/E_2.

Problema are o infinitate de soluţii, alegînd una dintre arii se poate determina cealaltă din condiţia amintită mai înainte. De aceea, este necesar ca pe considerente economice să se aleagă raportul celor două arii. Acesta se notează cu $\mu = A_2/A_1$.

Din relaţia (8.105) rezultă

$$P = \sigma_{a_1} A_i = \sigma_{a_1}(A_1 + nA_2) = \sigma_{a_1} A_1(1 + n\mu). \tag{8.110}$$

Deci

$$A_{1\,nec} = \frac{P}{\sigma_{a1}(1 + n\mu)} \quad \text{şi} \quad A_{2\,nec} = \mu A_{1\,nec}. \tag{8.111}$$

Capacitatea portantă a unei secţiuni neomogene. Sînt cunoscute ariile secţiunilor transversale ale pieselor care alcătuiesc elementul A_1, A_2, rezistenţele admisibile σ_{a_1}, σ_{a_2} şi modulele de elasticitate ale materialelor componente E_1, E_2. Se cere determinarea capacităţii de solicitare maximă a secţiuni astfel încît în nici unul din materiale să nu fie depăşită rezistenţa admisibilă.

Pe baza relaţiei (8.110) rezultă

$$P_{cap} = \sigma_{a_1}(A_1 + nA_2). \tag{8.112}$$

Observaţie. Formulele de calcul au fost determinate în ipoteza că $\frac{\sigma_{a_1}}{E_1} \leqslant \frac{\sigma_{a_2}}{E_2}$ deci se va nota cu indicele 1 materialul a cărui deformaţie specifică corespunzătoare rezistenţei sale admisibile este mai mică.

Efectul variaţiilor de temperatură. În fig. 8.31 este prezentat schematic cazul unei bare cu secţiune neomogenă alcătuită din două materiale solidarizate la capete, supusă unei variaţii de temperatură Δt, considerată pozitivă. Coeficienţii de dilatare termică liniară ai celor două materiale sînt $\alpha_1 > \alpha_2$.

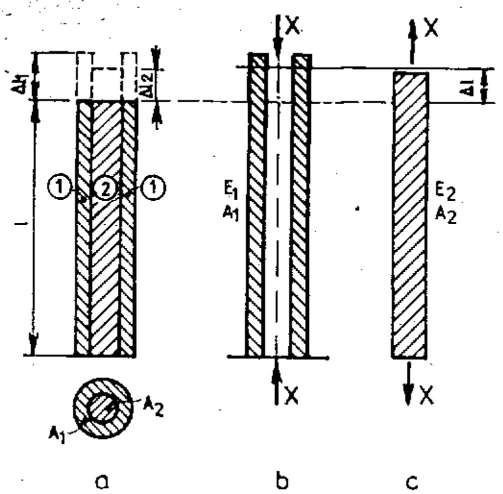


Fig. 8.31.

Se presupune pentru început că cele două piese ale elementului nu sînt solidarizate la ambele capete permițîndu-se astfel deformarea lor independentă la variația de temperatură Δt (fig. 8.31, *a*).

$$\Delta l_1^t = \alpha_1 l \Delta t \,;\; \Delta l_2^t = \alpha_2 l \Delta t < \Delta l_1^t. \tag{8.113}$$

În situația cînd ambele capete sînt solidarizate, alungirile celor două piese trebuie să fie egale. Această situație poate fi obținută prin introducerea unui efort axial X peste situația din fig. 8.31, *a* care va scurta piesa cu deformarea axială din temperatura cea mai mare (fig. 8.31, *b*) și va alungi piesa cu deformarea axială din temperatura cea mai mică (fig. 8.31, *c*).

Ecuația de compatibilitate a deformațiilor celor două materiale poate fi scrisă sub forma

$$\Delta l = \Delta l_1^t - \Delta l_1^X = \Delta l_2^t + \Delta l_2^X \tag{8.114}$$

sau

$$\Delta l = \alpha_1 l \Delta t - \frac{Xl}{E_1 A_1} = \alpha_2 l \Delta t + \frac{Xl}{E_2 A_2} \tag{8.115}$$

de unde rezultă

$$X = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_2 A_2 \Delta t}{1 + \frac{E_2}{E_1}\frac{A_2}{A_1}} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_2 A_2 \Delta t}{1 + n\mu}. \tag{8.116}$$

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2$ rezultă $X = 0$. Pe această proprietate se bazează betonul armat unde coeficienții de dilatare termică ai betonului și armăturii sînt practic egali ($\alpha_a \approx \alpha_b \approx 10^{-5}$), deci variația de temperatură nu provoacă smulgerea armăturii din beton.

Aplicația 8.5. Să se verifice barele fermei din lemn din fig. 8.32, *a*. Barele *1—3* și *3—4* au secțiunea transversală prezentată în fig. 8.32, *c*, iar detaliul de prindere la nodul *2* și secțiunile transversale ale barelor *1—2* și *2—4* sînt prezentate în fig. 8.32, *d*.

Datorită simetriei geometrice și de încărcare reacțiunile au aceleași valori

$$V_1 = V_4 = 120/2 = 60 \text{ kN}.$$

Din echilibrul nodului 1 (fig. 8.32, *b*) rezultă

$$N_{13} = 60/\sin\alpha = 60/0{,}5547 = 108{,}17 \text{ kN}$$

$$N_{12} = N_{13}\cos\alpha = 108{,}17 \cdot 0{,}832 = 90{,}00 \text{ kN}.$$

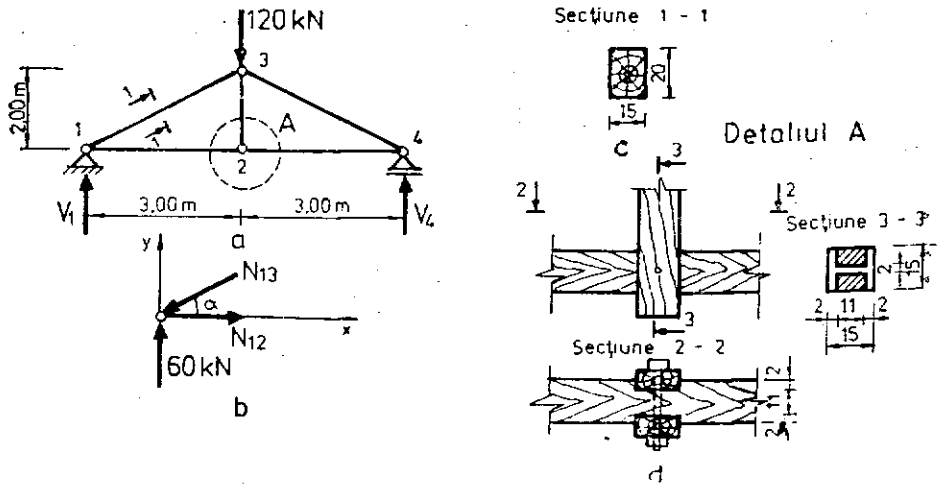


Fig. 8.32.

1) Verificarea barei *1—3*

$$A_{ef} = 15 \cdot 20 = 300 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N_{13}}{A_{ef}} = \frac{10\,817}{300} = 30{,}05 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

2) Verificarea barei *1—2*

$$A_{net} = A_{brut} - A_{sl} = 15 \cdot 15 - (2 \cdot 15 \cdot 2 + 2 \cdot 11) = 143{,}00 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N_{12}}{A_{net}} = \frac{9\,000}{143} = 62{,}94 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{al} = 70 \text{ daN/cm}^2.$$

Aplicația 8.6. Să se dimensioneze din două corniere cu aripi egale diagonala D_{23} a grinzii cu zăbrele din fig. 8.33. Prinderea diagonalei la guseu se realizează cu ajutorul niturilor de diametru $\varnothing$ 22 (pentru calcul se consideră $\varnothing$ 23). Rezistența admisibilă este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

1) Determinarea efortului axial în diagonala *2—3*. Datorită simetriei geometrice și de încărcare $V_1 = V_9 = 105$ kN. Aplicînd procedeul secțiunilor oarecare (fig. 8.33, *b*) efortul axial D_{23} se obține din

$$\Sigma Y_i = 0 \quad - D_{23}\sin\alpha + 210 = 0\,; \quad D_{23} = \frac{210}{0{,}60} = 350 \text{ kN}.$$

2) Dimensionarea diagonalei D_{23}

$$A_{net\ nec} = \frac{D_{23}}{\sigma_a} = \frac{35\,000}{1\,400} = 25{,}00 \text{ cm}^2.$$

Aproximînd aria slăbirilor între 10 și 15% din aria netă necesară rezultă

$$A_{brut\ nec} = (1{,}10\ldots1{,}15) A_{net\ nec} = 1{,}15 \cdot 25{,}00 = 28{,}75 \text{ cm}^2.$$

Pentru o cornieră $A_{brut\ nec}^{1L} = \frac{28{,}75}{2} = 14{,}375$ cm².

Se alege L 80 × 80 × 10 avînd $A_{brut} = 15{,}10$ cm².

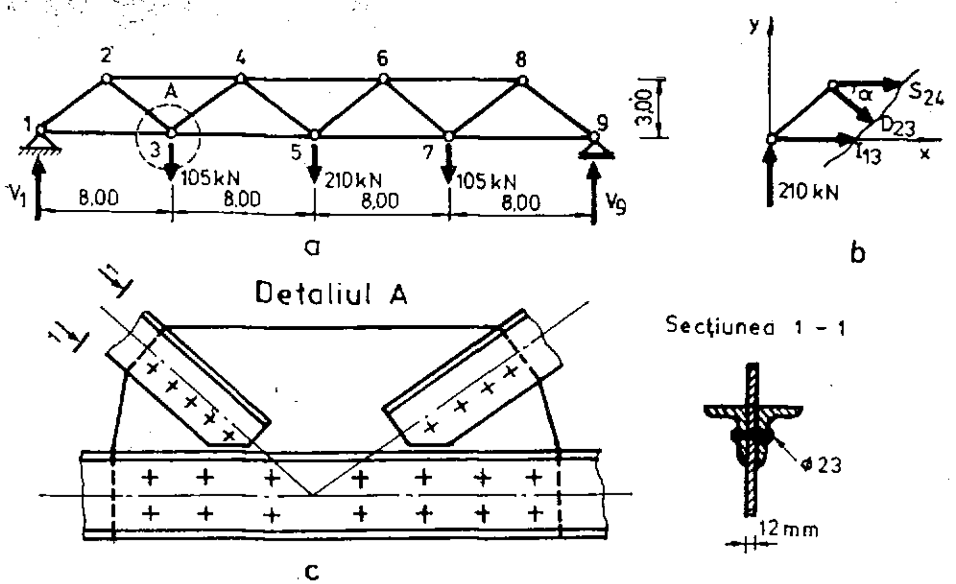


Fig. 8.33.

3) Verificarea secţiunii alese

$$A_{net} = A_{brut} - A_{si} = 2\cdot 15{,}10 - 2\cdot 1\cdot 2{,}3 = 25{,}60 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{D_{23}}{A_{net}} = \frac{35\,000}{25{,}60} = 1\,367{,}20 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

Aplicaţia 8.7. Să se determine valoarea maximă a încărcării, p_{cap}, pe care o poate suporta grinda cu tirant prezentată în fig. 8.34, din condiţia de rezistenţă a tirantului *ED*. Tirantul *ED* este alcătuit din două corniere cu aripi egale 80 × 80 × 8, iar prinderea la guseu se realizează cu nituri de diametru ∅ 20. Rezistenţa admisibilă este $\sigma_a = 1\,500$ daN/cm².

1) Determinarea efortului axial în tirantul *ED*. Datorită simetriei geometrice şi de încărcare $V_A = V_B = 8p$.

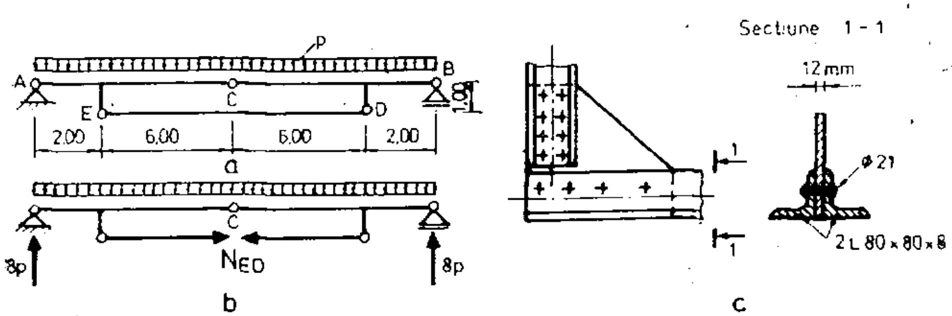


Fig. 8.34.

Secţionînd tirantul *ED*, ecuaţia de moment încovoietor în articulaţia *C* considerînd forţe de la stînga, va pune în evidenţă efortul axial necunoscut în tirant:

$$\sum M_C^{st} = 0; \quad 8p\cdot 8 - 8p\cdot 4 - N_{ED}\cdot 1 = 0; \quad N_{ED} = 32\ p.$$

2) Determinarea capacităţii portante a tirantului *ED*

$$\text{L } 80 \times 80 \times 8 \rightarrow A_{br}^{1L} = 12{,}30 \text{ cm}^2$$

$$A_{net} = A_{br} - A_{si} = 2\cdot 12.30 - 2\cdot 2{,}1\cdot 0{,}8 = 21{,}24 \text{ cm}^2$$

$$N_{EDcap} = A_{net}\,\sigma_a = 21{,}24\cdot 1\,500 = 31\,860 \text{ daN} = 318{,}60 \text{ kN}.$$

3) Stabilirea încărcării maxime

$$N_{ED} = N_{EDcap};\ 32p = 318{,}60$$

$$p_{cap} = 9{,}956 \text{ kN/m}.$$

Aplicaţia 8.8. Să se dimensioneze suprafaţa de rezemare a blocului de fundaţie din fig. 8.35 pe un teren de fundare care are $\sigma_a = 1{,}1$ daN/cm². În analiză se va ţine seama şi de greutatea proprie a blocului de fundaţie. Stîlpul este din cărămidă ($\gamma_c = 18$ kN/m³) iar blocul de fundaţie din beton simplu ($\gamma_b = 22$ kN/m³).

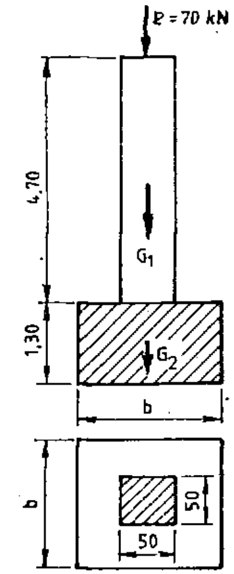


Fig. 8.35.

Reducînd sistemul de forţe (încărcări şi greutăţi proprii) în centrul de greutate al suprafeţei de rezemare a fundaţiei se obţine

$$N = P + G_1 + G_2$$

$$G_1 = 0{,}0018\cdot 470\cdot 50\cdot 50 = 2\,115 \text{ daN}$$

$$G_2 = 0{,}0022\cdot b\cdot b\cdot 130 = 0{,}286b^2 \text{ daN}$$

$$N = 7\,000 + 2\,115 + 0{,}286b^2 = 9\,115 + 0{,}286b^2.$$

Suprafaţa de rezemare se determină din condiţia ca în orice punct al acesteia presiunile pe teren să nu depăşească σ_a

$$A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}; \quad b\cdot b = \frac{9\,115 + 0{,}286b^2}{1{,}1}.$$

Rezultă $b = \sqrt{\dfrac{9\,115}{0{,}814}} = 105{,}82$ cm.

Se alege $b = 106$ cm.

Aplicaţia 8.9. Un stîlp din beton armat este solicitat de o forţă axială $P = 1\,000$ kN. Dimensiunile stîlpului şi ale fundaţiei acestuia sînt prezentate în fig. 8.36. Să se verifice:

— secţiunea stîlpului ($\sigma_{ao} = 1500$ daN/cm², $\sigma_{ab} = 70$ daN/cm², $n = E_o/E_b = 15$);

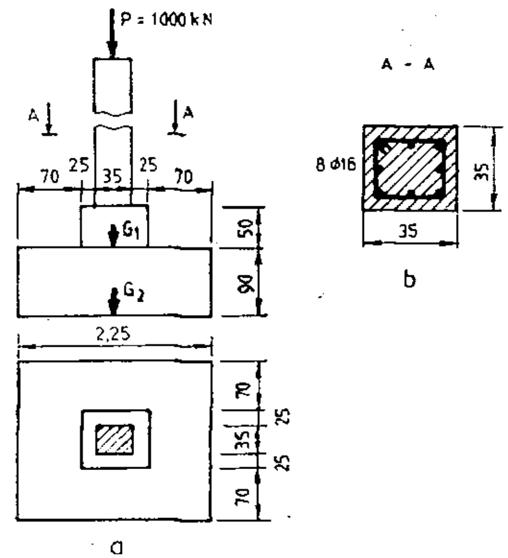


Fig. 8.36.

— rostul dintre cuzinet și fundație ($\sigma_{ab} = 25$ daN/cm² pentru betonul din fundație);

— rostul fundație-teren ($\sigma_a = 2,5$ daN/cm² pentru terenul de fundare).

În calcule se va ține seama de greutatea cuzinetului și a blocului de fundație ($\gamma_b = 22$ kN/m³).

1) Verificarea stîlpului din beton armat. La stabilirea solicitării axiale se va neglija influența greutății proprii a stîlpului din beton armat, deci $N_{st} = 1\,000$ kN.

Deoarece: $\varepsilon_{a\,oțel} = \frac{\sigma_{ao}}{E_o} = \frac{1\,500}{2,1\cdot10^6} = 0,714\cdot10^{-3}$

$$\varepsilon_{a\,beton} = \frac{\sigma_{ab}}{E_b} = \frac{70}{140\,000} = 0,5\cdot10^{-3}.$$

deci $\varepsilon_{abeton} < \varepsilon_{aoțel}$ și în formulele de calcul stabilite, materialul *1* va fi betonul.

În cazul procentelor de armare mici, aria secțiunii de beton se poate evalua fără a scădea aria armăturii

$$A_b = 35\cdot35 = 1\,225 \text{ cm}^2$$

$$A_o = 8\cdot\frac{3,14\cdot1,6^2}{4} = 16,085 \text{ cm}^2$$

$$\mu = \frac{A_o}{A_b} = \frac{16,085}{1\,225} = 0,01313$$

$$A_i = A_b + nA_0 = 1\,225 + 15\cdot16,086 = 1\,466,275 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef,b} = \frac{N_{st}}{A_i} = \frac{100\,000}{1\,466,275} = 68,20 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ab} = 70 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{ef,o} = n\sigma_{ef,b} = 15\cdot68,20 = 1\,023 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ao} = 1\,500 \text{ daN/cm}^2.$$

2) Verificarea rostului dintre cuzinet și fundație. Greutatea cuzinetului este

$$G_1 = 85\cdot85\cdot50\cdot0,0022 = 795,0 \text{ daN}$$

deci forța axială care solicită secțiunea rostului cuzinet — fundație este:

$$N_r = P + G_1 = 100\,000 + 795 = 100\,795 \text{ daN}.$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N_r}{A_{ef}} = \frac{100\,795}{7\,225} = 13,95 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ab} = 25 \text{ daN/cm}^2$$

$$A_{ef} = 85\cdot85 = 7\,225 \text{ cm}^2.$$

3) Verificarea rostului fundație—teren. Greutatea blocului de fundație este

$$G_2 = 225\cdot225\cdot90\cdot0,0022 = 10\,024 \text{ daN}$$

deci forța axială care solicită secțiunea rostului fundație-teren este:

$$N_f = P + G_1 + G_2 = 100\,000 + 795 + 10\,024 = 110\,819 \text{ daN}$$

$$A_{ef} = 225\cdot225 = 50\,625 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{N_f}{A_{ef}} = \frac{110\,819}{50\,625} = 2,20 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 2,5 \text{ daN/cm}^2.$$

Aplicația 8.10. O bară cu secțiune neomogenă alcătuită dintr-un tub de cupru și o tijă cilindrică din oțel solidarizate la extremități (fig. 8.37) este supusă unei variații de temperatură $\Delta t = 80°$C.

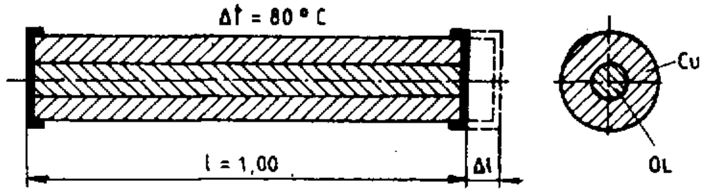


Fig. 8.37.

Să se verifice eforturile unitare care se produc în cele două materiale și să se determine alungirea ansamblului Δl. Caracteristicile geometrice și fizico-mecanice ale celor două materiale sînt:

$$E_{Cu} = 1,2\cdot10^6 \text{ daN/cm}^2;\ E_o = 2,1\cdot10^6 \text{ daN/cm}^2$$

$$A_{Cu} = 10 \text{ cm}^2;\ A_o = 8,0 \text{ cm}^2$$

$$\alpha_{Cu} = 1,7\cdot10^{-5};\ \alpha_o = 1,2\cdot10^{-5}.$$

Formulele de calcul au fost stabilite în ipoteza $\alpha_1 > \alpha_2$ deci cuprul va fi notat ca materialul *1* iar oțelul ca materialul *2*.

1) Determinarea efortului axial din variația de temperatură Δt

$$X = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)E_2A_2\Delta t}{1 + n\mu} = \frac{(1,7 - 1,2)\cdot10^{-5}\cdot2,1\cdot10^6\cdot8,0}{1 + 1,75\cdot0,8}\cdot80 = 2\,800 \text{ daN}.$$

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2,1\cdot10^6}{1,2\cdot10^6} = 1,75;\quad \mu = \frac{A_2}{A_1} = \frac{8,0}{10,0} = 0,8.$$

2) Verificarea eforturilor unitare în piesele ce compun secțiunea transversală

$$\sigma_{ef,o} = \frac{X}{A_o} = \frac{2\,800}{8,0} = 350 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{a,o} = 1\,400 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{ef,Cu} = \frac{X}{A_{Cu}} = \frac{2\,800}{10,0} = 280 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{a,Cu} = 500 \text{ daN/cm}^2$$

3) Determinarea alungirii barei solidarizate. Introducînd expresia (8.116) în relația (8.115) se obține:

$$\Delta l = \frac{A_1\alpha_1 + nA_2\alpha_2}{A_1 + nA_2}l\Delta t = \frac{\alpha_1 + n\mu\alpha_2}{1 + n\mu}l\Delta t$$

$$\Delta l = \frac{1,7\cdot10^{-5} + 1,75\cdot0,8\cdot1,2\cdot10^{-5}}{1 + 1,75\cdot0,8}\cdot100\cdot80 = 0,11267 \text{ cm}.$$

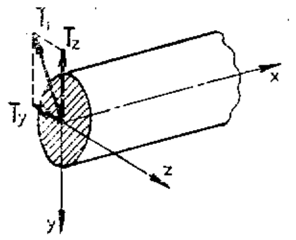


Fig. 8.38.

8.4. SOLICITAREA DE FORFECARE

Secţiunea transversală a unui element de construcţie este solicitată la forfecare dacă în centrul de greutate al secţiunii, torsorul de reducere al forţelor exterioare este reprezentat numai de o forţă tăietoare T_t conţinută în planul secţiunii (fig. 8.38).

Elementele de construcţie la care solicitarea de forfecare este un fenomen predominant sînt: consolele scurte (fig. 8.39, *a*), îmbinarea cu prag a elementelor din lemn (fig. 8.39, *b*), îmbinările prin nituire, sudură, şuruburi etc. (fig. 8.39, *c*).

Practic, solicitarea unei secţiuni numai cu efortul T_t nu este realizabilă, forţa tăietoare fiind întotdeauna însoţită de un moment încovoietor. Dacă se reduc forţele exterioare în centrul de greutate al secţiunilor *1—1* considerate în exemplele din fig. 8.39, se constată existenţa unui moment încovoietor.

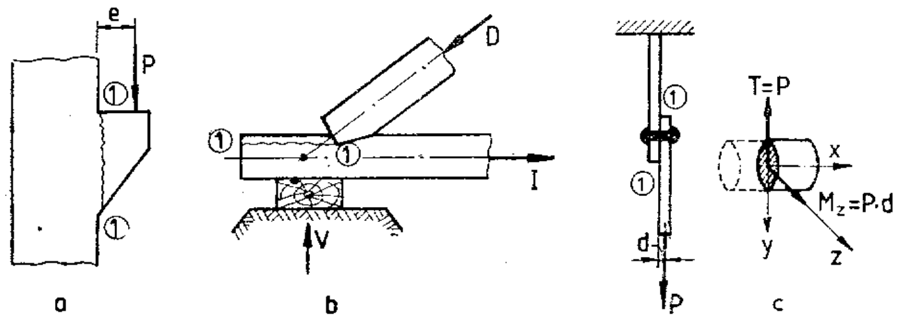


Fig. 8.39.

De exemplu, în cazul îmbinării nituite din fig. 8.39, *c* eforturile în secţiunea de forfecare a nitului *1—1* sînt

$$T_z = P\,;\; M_z = Pd. \tag{8.117}$$

Efectul momentului încovoietor în situaţiile prezentate este foarte mic în raport cu cel al forţei tăietoare ceea ce justifică neglijarea lui în analiză.

8.4.1. RELAŢIA DINTRE EFORTURILE UNITARE ŞI EFORTUL SECŢIONAL

În vederea stabilirii relaţiei dintre efortul secţional T_z sau T_y şi eforturile unitare este necesară cunoaşterea naturii şi a modului de distribuţie al acestor eforturi unitare pe secţiunea transversală. Pentru alte solicitări simple aceste relaţii se stabilesc pe cale experimentală (studiul geometric). În cazul solicitării de forfecare, din cauza imposibilităţii de realizare a acestei solicitări sub formă pură se acceptă următoarele ipoteze simplificatoare:

— pe secţiunea transversală se dezvoltă numai eforturi unitare tangenţiale τ;

— eforturile unitare tangenţiale τ sînt uniform distribuite pe secţiunea transversală şi au acelaşi sens cu efortul secţional T.

Aceste ipoteze sînt acceptabile pentru o serie de probleme practice, în special probleme de îmbinări şi înnădiri, conducînd la relaţii de calcul simple şi uşor de aplicat, rezultatele obţinute fiind confirmate pe deplin de buna comportare a pieselor calculate pe această cale.

Studiul static. Pe un element de arie dA din secţiunea transversală (fig. 8.40) se dezvoltă o forţă elementară dT a cărei valoare este

$$dT_z = \tau_{xy}\,dA \text{ sau } dT_y = \tau_{xz}\,dA. \tag{8.118}$$

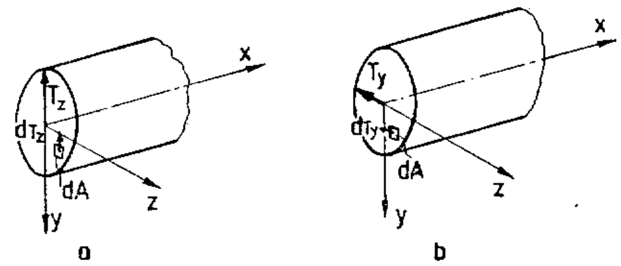


Fig. 8.40.

Ţinînd seama de relaţiile de echivalenţă rezultă

$$T_z = \int_A dT_z = \int_A \tau_{xy}\,dA \tag{8.119}$$

$$T_y = \int_A dT_y = \int_A \tau_{xz}\,dA. \tag{8.120}$$

Studiul fizic. Avînd în vedere ipotezele de calcul admise, efortul unitar tangenţial fiind uniform distribuit pe secţiunea transversală rezultă

$$T_z = \tau_{xy}\int_A dA = \tau_{xy}A\,;\quad T_y = \tau_{xz}\int_A dA = \tau_{xz}A \tag{8.121}$$

unde $\int_A dA = A$ este aria secţiunii transversale.

Deci:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z}{A} \text{ şi } \tau_{xz} = \frac{T_y}{A} \tag{8.122}$$

sau, în general

$$\tau = \frac{T}{A}. \tag{8.123}$$

8.4.2. ASPECTE DE CALCUL

Verificarea. Sînt cunoscute aria secţiunii transversale A, forţa tăietoare T, efortul unitar tangenţial admisibil τ_a. Se cere verificarea efortului unitar tangenţial efectiv

$$\tau_{ef} = \frac{T}{A} \leqslant \tau_a. \tag{8.124}$$

Dimensionarea. Cunoscîndu-se forţa tăietoare T şi efortul unitar tangenţial admisibil τ_a se determină caracteristicile geometrice ale secţiunii transversale, deci aria necesară

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a}. \tag{8.125}$$

Cunoscîndu-se aria necesară, se aleg forma și dimensiunile secțiunii transversale dimensionate.

Capacitatea portantă. Cunoscînd aria efectivă a secțiunii transversale A_{ef} și rezistența admisibilă τ_a se determină forța tăietoare maximă astfel ca relația (8.124) să fie satisfăcută

$$T_{cap} = A_{ef}\tau_a. \quad (8.126)$$

Pe baza formulelor simplificate (8.124), (8.125) și (8.126) se calculează în special elemente cu secțiune mică. În această categorie intră mijloacele de îmbinare solicitate la forfecare: îmbinări cu nituri, îmbinări cu șuruburi, îmbinări sudate, îmbinări cu pene etc.

8.4.3. CALCULUL MIJLOACELOR DE ÎMBINARE

Necesități constructive, tehnice și economice impun ca elementele de construcție să aibă anumite forme și dimensiuni ce se pot obține prin îmbinarea unor sortimente de material standardizate. De asemenea, diferitele tipuri de structuri de rezistență sînt alcătuite din elemente de construcție legate între ele în așa fel încît să formeze un ansamblu structural. Mijloacele care realizează legătura între piesele unui element sau între diferite elemente ale unei construcții se numesc mijloace de îmbinare. În cazul construcțiilor metalice, mijloacele de îmbinare sînt niturile, șuruburile, șuruburile de înaltă rezistență, sudurile.

Pentru a fi corect alcătuită, o îmbinare trebuie să satisfacă următoarele condiții:

a) să fie capabilă să transmită întregul efort pe care îl pot prelua piesele care se îmbină;

b) să asigure o scurgere clară și directă a eforturilor de la o piesă la alta, fără a produce eforturi suplimentare față de efortul ce trebuie transmis.

8.4.3.1. **Îmbinări nituite.** Nituirea servește la îmbinarea a două sau mai multe elemente metalice de tipul tablelor (platbande) sau profilelor laminate. Totalitatea pieselor care se îmbină constituie un pachet. Niturile sînt confecționate din materiale cu proprietăți plastice mai pronunțate decît materialul de îmbinat. În aceste condiții, la limită, înainte de cedarea îmbinării, se poate admite că la o îmbinare cu mai multe nituri, prin redistribuire plastică a eforturilor, toate niturile îmbinării se încarcă la fel.

În stare brută, nitul este format dintr-un cap de formă specială (calotă sferică, tronconic) și o tijă cilindrică care se alege mai lungă decît grosimea pachetului ce urmează a fi îmbinat, materialul excedentar servind la formarea celui de al doilea cap (fig. 8.41, *b*).

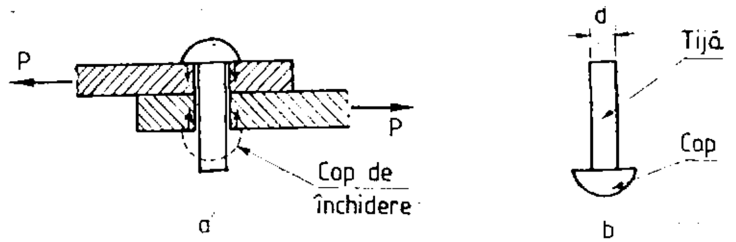


Fig. 8.41.

Pentru realizarea nituirii, se execută în prealabil operația de găurire a pieselor care se îmbină, diametrul găurii depășind cu 0,5—1,0 mm diametrul tijei nitului, după care prin batere cu ajutorul buterolei și contrabuterolei se realizează cel de al doilea cap al nitului. Prin batere, tija nitului umple complet gaura. Executarea nituirilor se poate face la cald prin încălzirea nitului pînă la culoarea roșu-alb și baterea acestuia, sau la rece, prin presare. Prin răcire, tija nitului se contractă, capetele strîng elementele pachetului (fig. 8.41, *a*), iar în tija nitului se dezvoltă un efort de întindere.

Prezența niturilor într-o îmbinare are ca scop principal transmiterea eforturilor de la un element e_1 la alt element e_2 cu care se îmbină (fig. 8.42, *a*). Oricare ar fi eforturile transmise de la o piesă la alta, niturile sînt solicitate de un sistem de forțe situate în planul de separație al elementelor nituite.

După modul cum lucrează o îmbinare nituită sub acțiunea eforturilor ce trebuie transmise se disting trei faze:

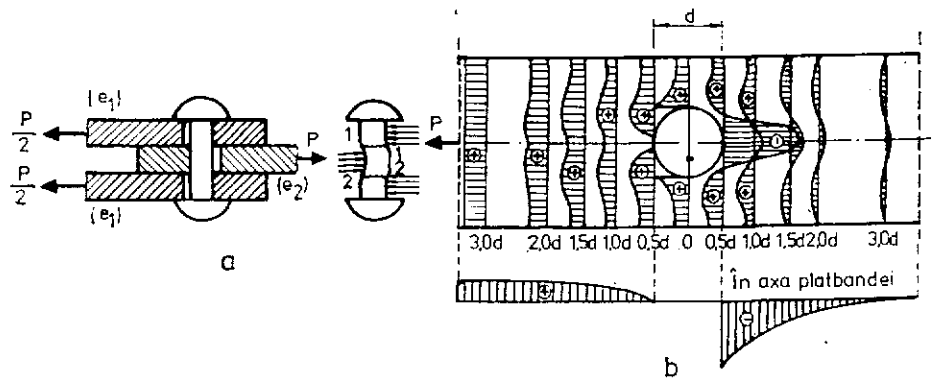


Fig. 8.42.

Faza elastică. Pentru valori mici ale forței exterioare P (fig. 8.42, *a*), eforturile sînt transmise de la o piesă la alta prin frecarea ce apare între piese datorită presiunii exercitate de nit. În această fază, nitul este solicitat numai de efortul axial de întindere, ce va fi neglijat în calculele ulterioare.

Faza elasto-plastică. Dacă forța exterioară P crește, frecarea este învinsă, piesele îmbinării lunecă între ele apăsînd tija nitului. Eforturile se transmit prin tija nitului care este solicitat la: forfecare în secțiunile care se opun deplasărilor relative dintre piese, strivire pe suprafața de contact între tijă și locașul găurii și încovoiere a tijei nitului.

Faza plastică. Dacă forțele exterioare cresc în continuare, eforturile unitare în nituri ating limita de curgere, acestea se deformează plastic iar între piesele îmbinării se produc deplasări relative apreciabile. Distrugerea unui nit se poate produce prin: încovoierea tijei, smulgerea capului, forfecarea tijei sau strivirea suprafețelor de contact între tija nitului și locașul găurii. Deoarece capul nitului este dimensionat corespunzător să nu se smulgă, grosimea pachetului fiind limitată astfel încît încovoierea tijei să nu fie mai defavorabilă decît forfecarea ei, se poate adopta simplificat că un nit este solicitat la forfecarea tijei și la strivirea tijei pe locașul găurii.

Trebuie remarcat că lucrul real al unei îmbinări nituite este foarte complex, iar distribuția eforturilor unitare în piese în apropierea găurii este neuniformă. În fig. 8.42, *b* este reprezentată distribuția eforturilor unitare în direcție transversală și longitudinală la o platbandă, datorită transmiterii eforturilor prin intermediul unui nit.

Rezistența nitului la forfecare (R_f). Forfecarea unui nit se produce în secțiunile care se opun tendinței de deplasare relativă a elementelor îmbinate. De exemplu, nitul din fig. 8.42, *a* are două secțiuni de forfecare. În secțiunile de forfecare, distribuția eforturilor unitare tangențiale este presupusă uniformă (fig. 8.43, *a*).

Dacă se notează cu τ_a rezistența admisibilă la forfecare a nitului, capacitatea portantă a unei secțiuni de forfecare este

$$T_{1cap} = A_f \cdot \tau_a = \frac{\pi d^2}{4} \tau_a. \qquad (8.127)$$

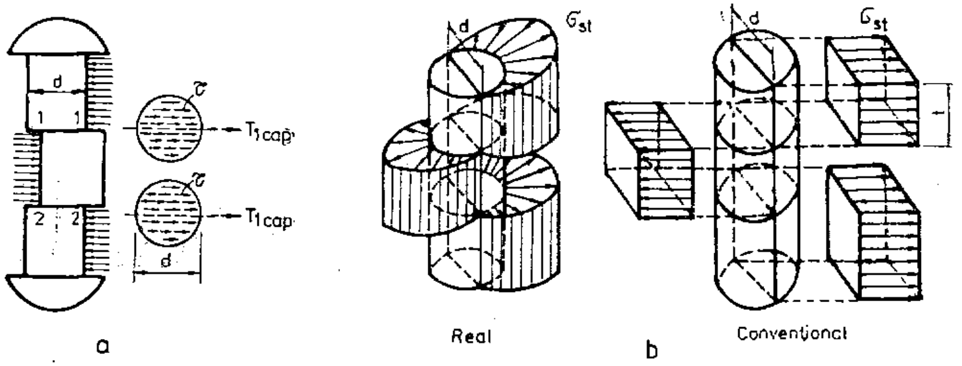


Fig. 8.43.

Rezistența admisibilă la forfecare τ_a depinde de destinația construcției, gruparea de încărcare, marca oțelului etc. și este prevăzută în normele de proiectare a construcțiilor metalice. În mod uzual s-a admis $\tau_a = 0{,}8\sigma_a$, unde σ_a este rezistența admisibilă a pieselor care se îmbină.

Notînd cu n_f numărul secțiunilor de forfecare pentru un nit, efortul capabil al nitului solicitat la forfecare este

$$R_f = n_f T_{1cap} = n_f \frac{\pi d^2}{4} \tau_a. \qquad (8.128)$$

Rezistența nitului la presiune pe gaură (R_{cg}). Un alt mod de cedare al unui nit este prin strivirea pieselor la contactul dintre tijă și peretele găurii pieselor îmbinate. Suprafețele de contact între tija nitului și pereții găurii sînt jumătăți de suprafețe laterale de cilindru. Distribuția eforturilor unitare σ_{st} pe aceste suprafețe este neuniformă dar pentru calcule practice se admite o distribuție convențională (fig. 8.43, *b*) uniformă pe diametrul nitului *d* și pe înălțimea piesei *t*. Dacă se notează cu σ_{ast} rezistența admisibilă la strivire a materialului pieselor din îmbinare, rezistența convențională a nitului la presiune pe gaură este

$$R_{cg} = A_{st}\sigma_{ast} \qquad (8.129)$$

unde A_{st} este aria minimă convențională pe care se exercită presiunile pe tija nitului și poate fi exprimată sub forma

$$A_{st} = d \sum t_{min} \qquad (8.130)$$

unde *d* este diametrul nitului iar $\sum t_{min}$ este suma minimă a grosimilor pieselor din îmbinare care au tendința de lunecare în același sens.

Rezistența admisibilă la strivire σ_{ast} este prevăzută în norme de proiectare funcție de tipul construcției, marca oțelului, gruparea de încărcare etc. În mod uzual, s-a admis $\sigma_{ast} = 2\sigma_a$, unde σ_a este rezistența admisibilă a materialului pieselor care se îmbină. Deci efortul capabil al unui nit la presiune pe gaură este

$$R_{cg} = d \sum t_{min}\sigma_{ast} \qquad (8.131)$$

Ținînd seama de cele două posibilități de cedare ale unui nit, forța pe care acesta o poate prelua și transmite fără depășirea rezistențelor admisibile poartă numele de rezistența nitului și se obține din condiția

$$R_{nit} = \min(R_f, R_{cg}). \qquad (8.132)$$

Calculul îmbinărilor nituite. Forța care se transmite printr-o îmbinare nituită acționează asupra fiecărui nit cu o componentă a cărei valoare nu trebuie să depășească rezistența acestuia. Determinarea acestor componente forță permite stabilirea nitului cel mai solicitat dintr-o îmbinare. După modul de determinare a componentelor forță care solicită niturile unei îmbinări se disting îmbinări nituite solicitate centric și îmbinări nituite solicitate excentric.

Îmbinări nituite solicitate centric. Dacă forța transmisă prin îmbinare trece prin centrul de greutate al îmbinării, aceasta solicită în mod egal toate niturile (fig. 8.44), componenta forță corespunzătoare unui nit avînd valoarea

$$V = \frac{N}{n} \qquad (8.133)$$

unde *n* este numărul de nituri al îmbinării.

Cunoscîndu-se forța ce solicită fiecare nit al îmbinării, aspectele de calcul ale acesteia sînt :

a) verificarea eforturilor unitare efective de forfecare și strivire

$$\tau_{ef} = \frac{V}{A_{ef}} = \frac{V}{n_f \frac{\pi d^2}{4}} \leqslant \tau_a = 0{,}8\,\sigma_a$$
$$\sigma_{ef} = \frac{V}{A_{st}} = \frac{V}{d \sum t_{min}} \leqslant \sigma_{ast} = 2\,\sigma_a\,; \qquad (8.134)$$

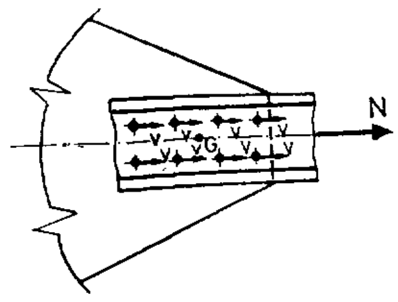


Fig. 8.44.

b) dimensionarea numărului de nituri necesar realizării îmbinării

$$n = \frac{N}{R_{nit}}. \qquad (8.135)$$

La stabilirea relației (8.135) s-a avut în vedere solicitarea uniformă a tuturor niturilor din îmbinare care poate fi admisă numai la limită, înainte de cedarea acesteia. De asemenea, dimensionarea se va face considerînd cea mai mare forță dintre *N* efectiv și *N* capabil ale barei ;

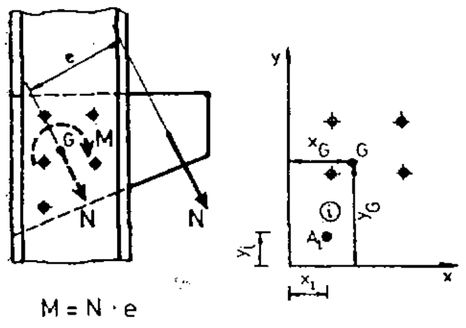


Fig. 8.45.

c) capacitatea portantă a unei nituiri este forța maximă ce se transmite prin îmbinare

$$N_{cap} = nR_{nit}. \tag{8.136}$$

Îmbinări nituite solicitate excentric. Dacă forța transmisă prin îmbinare nu trece prin centrul de greutate al acesteia, niturile sînt solicitate diferit deoarece reducînd forța în centrul de greutate al nituirii se obține o forță centrică și un moment (fig. 8.45)

$$M = N \cdot e. \tag{8.137}$$

Poziția centrului de greutate al îmbinării se determină față de un sistem de axe ortogonal xOy, ca centru de greutate al ariilor secțiunilor transversale ale niturilor (fig. 8.45)

$$x_G = \frac{\sum_1^n A_i x_i}{\sum_1^n A_i}; \quad y_G = \frac{\sum_1^n A_i y_i}{\sum_1^n A_i} \tag{8.138}$$

unde A_i este aria secțiunii transversale a nitului i din îmbinare iar n este numărul total de nituri

Dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_i = \ldots = A_n = A$, rezultă

$$x_G = \frac{\sum_1^n x_i}{n}; \quad y_G = \frac{\sum_1^n y_i}{n}. \tag{8.139}$$

Forța centrică solicită în mod egal toate niturile cu o componentă $V = N/n$ ce are direcția și sensul forței N. Momentul $M = Ne$ solicită diferit niturile îmbinării cu componente Q_i perpendiculare pe razele ce unesc niturile cu centrul de greutate al îmbinării și proporționale cu mărimea acestora (fig. 8.46, *a*).

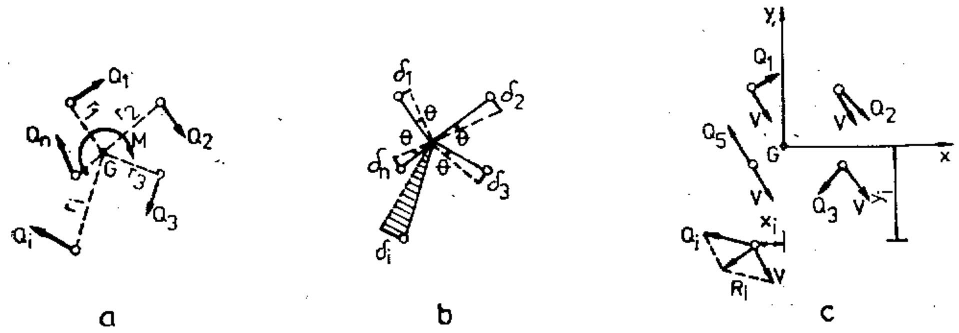


Fig. 8.46.

Pentru determinarea mărimii componentelor Q_i se poate scrie o relație de echivalență între momentul exterior M și momentele componentelor Q_i în raport cu centrul de greutate al îmbinării

$$M = Q_1 r_1 + Q_2 r_2 + \ldots + Q_i r_i + \ldots + Q_n r_n = \sum_1^n Q_i r_i. \tag{8.140}$$

Relația (8.140) constituie aspectul statistic al problemei și nu este suficientă pentru determinarea componentelor Q_i. Pentru dezvoltarea a încă $(n-1)$ ecuații se face apel la studiul geometric. Considerînd o rotire mică θ a pieselor îmbinării în jurul centrului de greutate al îmbinării, deplasările secțiunilor niturilor sînt proporționale cu raza r_i (fig. 8.46, *b*)

$$\theta = \frac{\delta_1}{r_1} = \frac{\delta_2}{r_2} = \ldots = \frac{\delta_i}{r_i} = \ldots = \frac{\delta_n}{r_n}. \tag{8.141}$$

Întrucît niturile se opun rotirii relative a pieselor din îmbinare, forțele ce se dezvoltă în fiecare nit sînt proporționale cu deplasările δ_i

$$Q_i = k\delta_i \tag{8.142}$$

unde k este un factor de proporționalitate.

Înlocuind relația (8.142) în relația (8.141) rezultă

$$\frac{Q_1}{r_1} = \frac{Q_2}{r_2} = \ldots = \frac{Q_i}{r_i} = \ldots = \frac{Q_n}{r_n} = q_0. \tag{8.143}$$

Mărimea q_0 reprezintă o caracteristică a îmbinării și poate fi interpretată ca valoarea componentei forță într-un nit situat la distanță unitară de centrul de greutate.

Introducînd fiecare termen al relației (8.143) în relația (8.140) rezultă

$$Q_1 = q_0 r_1; \ldots; Q_i = q_0 r_i; \ldots; Q_n = q_0 r_n \tag{8.144}$$

și

$$(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_i^2 + \ldots + r_n^2) q_0 = M \tag{8.145}$$

$$q_0 = \frac{M}{\sum_1^n r_i^2}. \tag{8.146}$$

Cunoscînd constanta q_0 se pot determina componentele Q_i

$$Q_i = r_i q_0 = \frac{M r_i}{\sum_1^n r_i^2}. \tag{8.147}$$

Forța totală care solicită un nit se obține adunînd vectorial componentele V datorate forței centrice și componentele Q_i datorate momentului

$$\bar{R}_i = \bar{V} + \bar{Q}_i \tag{8.148}$$

sau

$$R_i = \sqrt{V^2 + Q_i^2 + 2VQ_i \cos(\bar{V}, \bar{Q}_i)}. \tag{8.149}$$

Cunoscînd forța care solicită fiecare nit al îmbinării aspectele de calcul sînt cele prezentate în relațiile (8.134), (8.135), (8.136).

Trebuie remarcat că forța maximă se va dezvolta în unul din niturile cele mai depărtate de centrul de greutate al îmbinării întrucît

$$Q_{i\,max} = \frac{M}{\sum_{1}^{n} r_i^2} \cdot r_{i\,max}. \qquad (8.150)$$

8.4.3.2. **Îmbinări sudate.** Prin sudare se realizează îmbinarea unor piese metalice cu aceeași compoziție chimică sau compoziție chimică apropiată, ale căror suprafețe de îmbinare au fost aduse prin căldură în stare plastică, cu sau fără adaos de material.

Față de îmbinările nituite prezintă cîteva avantaje: se elimină slăbirile pieselor, economie de material și manoperă, necesită o întreținere mai redusă etc., dar și o serie de dezavantaje : introduce eforturi inițiale care pot fi de ordinul limitei de elasticitate sau chiar de curgere a materialului de bază. controlul calității sudurii este dificil și costisitor, are comportare nesatisfăcătoare la solicitări variabile etc.

Din punct de vedere al comportării la diferite solicitări și al rezistenței, cordoanele de sudură se clasifică în :

1) Cordoane de sudură în adîncime, care se realizează în general în cadrul grosimii pieselor. Cu sudură în adîncime se realizează îmbinările cap la cap (fig. 8.47, *a*) sau *îmbinările în T și în cruce (suduri în K sau semi K, fig. 8.47, b)*.

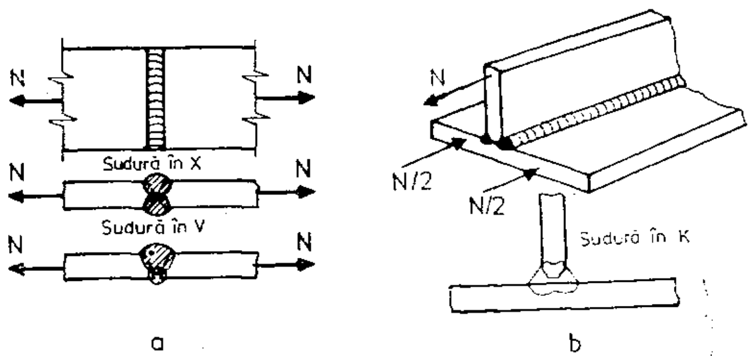


Fig. 8.47.

Funcție de grosimea pieselor care se sudează, înainte de sudare, marginile pieselor ce urmează a se îmbina se prelucrează în V, U sau X.

2) Cordoane de sudură în relief, care se realizează în afara grosimii pieselor. Sudurile în relief se pot folosi la toate tipurile de îmbinare, cu excepția îmbinării cap la cap și se execută fără prelucrarea marginilor. În funcție de poziția față de direcția solicitării, cordoanele de sudură în relief pot fi : paralele cu solicitarea (fig. 8.48, *a*), perpendiculare pe direcția solicitării, frontale (fig. 8.48, *b*) sau oblice (fig. 8.48, *c*). În secțiune transversală, sudurile în relief pot fi bombate, plane și ușor concave (v. fig. 8.48), *b*).

Grosimea de calcul a sudurii se notează cu *a* și este egală cu grosimea pieselor de îmbinat în cazul sudurii cap la cap sau cu înălțimea triunghiului isoscel înscris în secțiunea sudurii pentru suduri în relief (fig. 8.49, *a*).

Pentru stabilirea lungimii de calcul a sudurii, *l* se apreciază că la capetele cordonului de sudură, pe o lungime egală cu grosimea *a*, există porțiuni

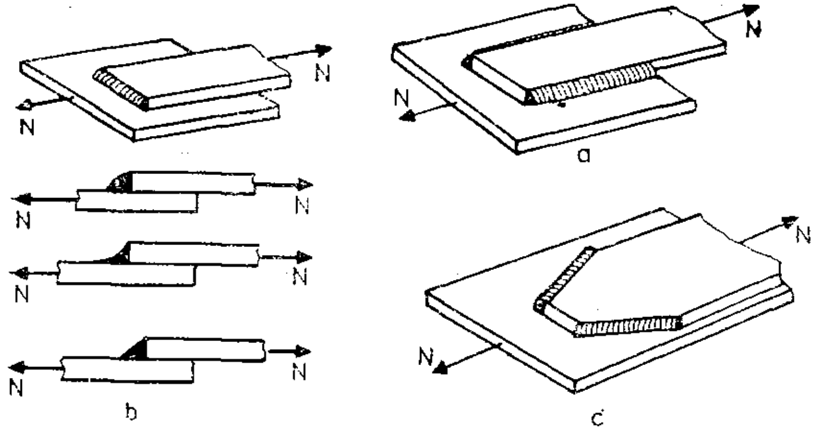


Fig. 8.48.

de calitate inferioară (datorită amorsării arcului și închiderii cordonului). Aceste porțiuni se scad din lungimea efectivă a sudurii l_s și rezultă lungimea de calcul l (fig. 8.49, *b*)

$$l = l_s - 2a. \qquad (8.151)$$

Ținînd seama de tipul sudurii, importanța construcției, dimensiunile pieselor de îmbinat, prin norme de proiectare se stabilesc dimensiuni minime, maxime și recomandabile pentru *a* și *l*.

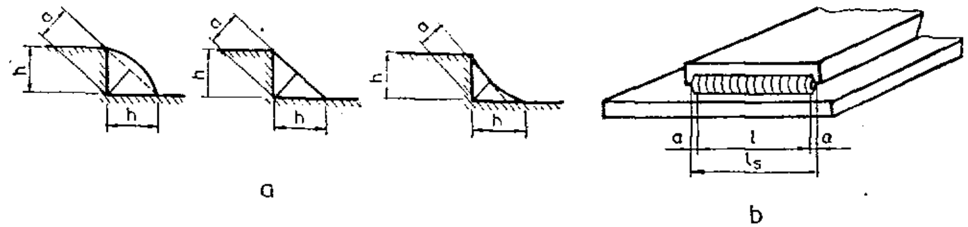


Fig. 8.49.

Calculul îmbinărilor sudate. Sudurile în adîncime (cap la cap) solicitate la întindere sau compresiune, perpendicular pe cordonul de sudură. se calculează pe baza relației

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_s} \leqslant \sigma_{as} \qquad (8.152)$$

în care : N este efortul axial de calcul, A_s — aria secțiunii de calcul a sudurii $A_s = l \cdot a$ (fig. 8.50, *a*), iar σ_{as} — rezistența admisibilă la întindere sau compresiune a sudurii. În mod uzual s-a considerat că :

$$\sigma_{as} = 0{,}8\,\sigma_a \text{ pentru întindere ;} \qquad (8.153)$$

$$\sigma_{as} = \sigma_a \text{ pentru compresiune}$$

unde σ_a este rezistența admisibilă pentru materialul de bază.

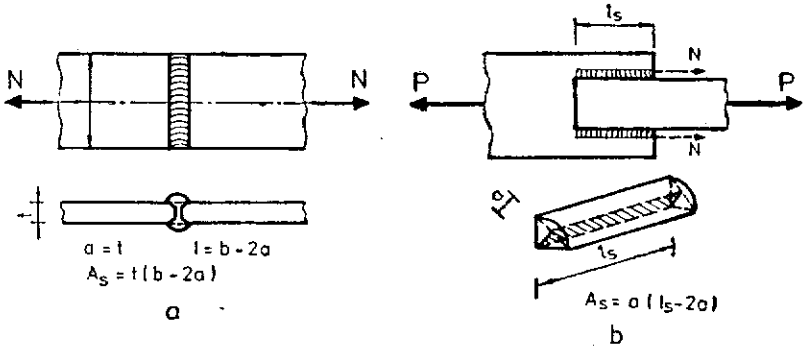


Fig. 8.50.

Sudurile în relief sînt solicitate în general la forfecare, care se consideră că are loc în planul bisector al secțiunii transversale a sudurii (fig. 8.50, *b*). Relația de calcul este

$$\tau_{ef} = \frac{N}{A_s} \leqslant \tau_{as} \tag{8.154}$$

unde τ_{as} este rezistența admisibilă la forfecare a sudurii. În mod uzual s-a considerat $\tau_{as} = 0{,}65\ \sigma_a$ unde σ_a este rezistența admisibilă a materialului care se sudează.

Avînd în vedere relațiile (8.153) și (8.154) aspectele de calcul ale cordoanelor de sudură sînt :

a) verificarea eforturilor unitare ce se dezvoltă în cordoanele de sudură

$$\sigma_{ef} = \frac{N}{A_s} \leqslant \sigma_{as}\ ; \quad \tau_{ef} = \frac{N}{A_s} \leqslant \tau_{as} \tag{8.155}$$

unde $A_s = \Sigma al$ reprezintă aria secțiunii cordoanelor de sudură solicitate ;

b) dimensionarea ariei secțiunii cordoanelor de sudură solicitate :

$$A_{s\,nec} = \frac{N}{\sigma_{as}}\ ; \quad A_{s\,nec} = \frac{N}{\tau_{as}}\ . \tag{8.156}$$

Pe baza lui $A_{s\,nec}$ se aleg grosimea și/sau lungimile cordoanelor de sudură astfel ca relațiile (8.155) să fie optim satisfăcute ;

c) capacitatea portantă a unei îmbinări sudate

$$N_{cap} = A_s\,\sigma_{as}\ ; \quad N_{cap} = A_s\tau_{as}. \tag{8.157}$$

Aplicația 8.11. Stîlpul unui parapet din lemn are alcătuirea din fig. 8.51, *a*. Să se verifice la forfecare pragul prinderii chertate fără luarea în considerare a prezenței șurubului de stringere. În cazul îmbinărilor cu praguri, rezistența la forfecare a lemnului de brad se ia $\tau_a = 10$ daN/cm².

Elementele parapetului pot fi schematizate sub forma unui sistem de două bare articulate fig. 8.51, *b*.

Efortul axial din contrafișa *BC* se determină din ecuația de moment în raport cu punctul *A*.

$$\Sigma M_A = 0\ ; \quad N_{BC}\cos 70°\cdot 1{,}30 - 1{,}5\cdot 1{,}5 = 0$$

$$N_{BC} = 5{,}06\ kN.$$

Secțiunea pragului (fig. 8.51, *c*) este solicitată la forfecare de componenta V_B verticală a efortului N_{BC}

$$V_B = N_{BC}\sin 70° = 5{,}06\cdot 0{,}9397 = 4{,}755\ \text{kN}.$$

Verificarea secțiunii :

$$\tau_{ef} = \frac{V_B}{A_{ef}} = \frac{475{,}50}{15\cdot 20} = 1{,}585\ \text{daN/cm}^2 < \tau_a = 10\ \text{daN/cm}^2.$$

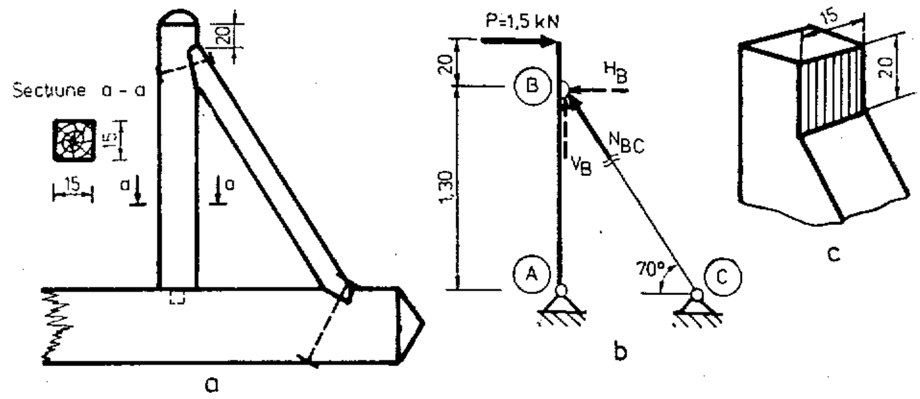


Fig. 8.51.

Aplicația 8.12. Să se dimensioneze înnădirea cu eclise solidarizate cu nituri a unei platbande de dimensiuni 220 × 12 solicitată axial (fig. 8.52).

Prinderea se realizează cu nituri ∅ 20 iar rezistențele admisibile sînt : $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² pentru platbandă și eclise și respectiv $\tau_a = 1\,120$ daN/cm², $\sigma_{a\,st} = 2\,800$ daN/cm² pentru nituri.

Dimensionarea înnădirii se va face la efortul capabil al platbandelor. Întrucît în dreptul primului șir de nituri efortul axial aferent platbandelor este maxim, deci secțiunea slăbită trebuie să fie minimă, în secțiunea *1—1* (fig. 8.52) se va dispune un singur nit. Secțiunea periculoasă poate fi în secțiunea *1—1* unde forța axială este maximă sau în secțiunea *2—2* unde aria efectivă este minimă.

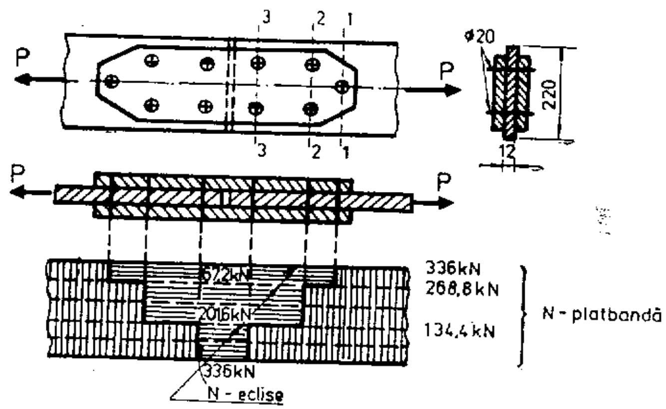


Fig. 8.52.

1) Determinarea efortului axial capabil aferent platbandelor:

$$A_{1\,net} = 22\cdot1{,}2 - 2\cdot1{,}2 = 24{,}00 \ \text{cm}^2;$$

$$A_{2\,net} = 22\cdot1{,}2 - 2\cdot2\cdot1{,}2 = 21{,}6 \ \text{cm}^2.$$

Se va admite că secțiunea periculoasă este cea corespunzătoare secțiunii *1—1* pentru care forța axială este maximă (dacă se are în vedere repartizarea efortului axial între platbande și eclise, prezentată în fig. 8.52).

$$P_{cap} = A_{1\,net}\,\sigma_a = 24{,}00\cdot1\,400 = 33\,600 \ \text{daN}.$$

2) Dimensionarea numărului de nituri necesar prinderii:

$$R_f = 2\cdot\frac{3{,}14\cdot2^2}{4}\cdot1\,120 = 7\,033 \ \text{daN}$$

$$R_{cg} = 2\cdot1{,}2\cdot2\,800 = 6\,720 \ \text{daN}$$

Se va lua $R_{nit} = 6\,720$ daN

$$n = \frac{P_{cap}}{R_{nit}} = \frac{33\,600}{6\,720} = 5 \ \text{nituri}.$$

Dispunerea niturilor se face ca în fig. 8.52 cu respectarea distanțelor recomandabile dintre nituri.

3) Verificarea platbandelor în secțiunea cea mai slăbită. Fiecare nit transmite de la platbandă la eclise un efort axial egal cu $P_{cap}/n = 6\,720$ daN. Diagramele eforturilor axiale în platbande și eclise sînt prezentate în fig. 8.52, deci în secțiunea *2—2* efortul axial aferent platbandei este $N_2 = 268{,}8$ kN.

$$\sigma_{ef} = \frac{N_2}{A_{2\,net}} = \frac{26\,880}{21{,}60} = 1\,244{,}44 \ \text{daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \ \text{daN/cm}^2.$$

4) Dimensionarea ecliselor. Eclisele trebuie să fie capabile să transmită întregul efort capabil al platbandelor ceea ce înseamnă că aria netă a secțiunii periculoase a ecliselor este egală cu aria netă a platbandelor

$$A^{ecl}_{net} = A^{pb}_{net} = 24{,}00 \ \text{cm}^2.$$

Alegînd eclise de 180 × 10 și avînd în vedere că secțiunea periculoasă pentru eclise este secțiunea *3—3* unde acestea sînt solicitate de întregul efort axial ce se transmite prin îmbinare, rezultă

$$A^{ecl}_{net} = 2(18\cdot1{,}0 - 2\cdot2\cdot1) = 28{,}00 \ \text{cm}^2$$

$$\sigma_{ef} = \frac{P_{cap}}{A^{ecl}_{net}} = \frac{33\,600}{28{,}00} = 1\,200 \ \text{daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \ \text{daN/cm}^2.$$

Aplicația 8.13. Să se determine numărul de nituri necesar prinderii barei din fig. 8.53, *a* la guseu.

Bara este alcătuită din două corniere cu aripi egale 80 × 80 × 10. Prinderea se realizează cu nituri ∅ 23. Pentru corniere, rezistența admisibilă este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² iar pentru nituri $\tau_a = 1\,120$ daN/cm² și $\sigma_{a\,st} = 2\,800$ daN/cm².

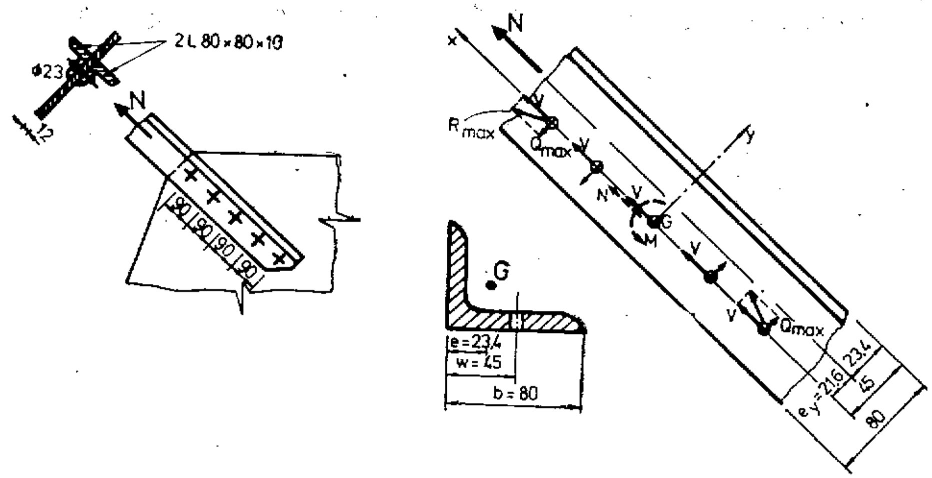


Fig. 8.53.

1) Determinarea capacității portante a barei. Dimensionarea prinderii se va face la efortul capabil al barei

$$N_{cap} = A_{net}\sigma_a = 25{,}60\cdot1\,400 = 35\,840 \ \text{daN}$$

$$A_{net} = A_{br} - A_{sl} = 2(15{,}10 - 2{,}3\cdot1) = 25{,}60 \ \text{cm}^2.$$

2) Determinarea numărului de nituri necesar prinderii barei în ipoteza nituirii solicitate centric

$$R_f = 2\cdot\frac{3{,}14\cdot2{,}3^2}{4}\cdot1\,120 = 9\,302 \ \text{daN}$$

$$\Sigma t_{min} = 1{,}2 \ \text{cm}$$

$$R_{cg} = 2{,}3\cdot1{,}2\cdot2\,800 = 7\,728 \ \text{daN}$$

$$R_{nit} = R_{cg} = 7\,728 \ \text{daN}$$

$$n = \frac{N_{cap}}{R_{nit}} = \frac{35\,840}{7\,728} = 4{,}637 \approx 5 \ \text{nituri}.$$

3) Verificarea nituirii în ipoteza solicitării excentrice. Prinderea unei corniere cu ajutorul niturilor se realizează întotdeauna cu o excentricitate întrucît șirul de nituri nu coincide cu axa barei. Astfel, dacă b este lățimea aripii cornierei, pentru $b = 50\ldots100$ mm găurile de nit se realizează la distanța $w = b/2 + 5$ mm, iar centrul de greutate al secțiunii cornierei, pe unde trece suportul forței axiale, este la distanța e (fig. 8.53, *b*). Față de centrul de greutate al nituirii, forța axială are o excentricitate

$$e_y = 45 - 23{,}4 = 21{,}60 \ \text{mm}.$$

Reducînd forţa axială capabilă în centrul de greutate al nituirii rezultă

$$N = 35\,840 \text{ daN}$$

$$M = N_{cap} e_y = 35\,840 \cdot 2{,}16 = 77\,414 \text{ daN}\cdot\text{cm}.$$

Componentele forţelor care solicită nitul cel mai depărtat de centrul de greutate sînt

$$V = \frac{N}{n} = \frac{35\,840}{5} = 7\,168 \text{ daN}$$

$$Q_{max} = \frac{Mr_{max}}{\sum_1^5 r_i^2} = \frac{77\,414 \cdot 18}{2 \cdot 18^2 + 2 \cdot 9^2} = 1\,720 \text{ daN}.$$

Compunînd V cu Q_{max} rezultă

$$R_{max} = \sqrt{V^2 + Q_{max}^2} = \sqrt{7\,168^2 + 1\,720^2} = 7\,371{,}5 \text{ daN} < R_{nit} = $$
$$= 7\,728 \text{ daN}.$$

Sporul de efort datorită considerării solicitării excentrice a prinderii este

$$\Delta R = \frac{7\,371{,}5 - 7\,168}{7\,168} = 2{,}84\%$$

ceea ce justifică neglijarea lui în analiză.

Aplicaţia 8.14. Pentru realizarea unei console scurte s-a adoptat detaliul constructiv din fig. 8.54. Să se verifice prinderea nituită avînd în vedere că pentru nituri $\tau_a = 1\,200$ daN/cm² şi $\sigma_{a,t} = 3\,000$ daN/cm².

1) Determinarea forţei maxime care solicită nitul cel mai încărcat. Prin reducerea forţei exterioare în centrul de greutate al nituirii (fig. 8.54) se obţine

$$N = P = 144 \text{ kN}$$

$$M = Pe_x = 144 \cdot 0{,}26 = 37{,}44 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

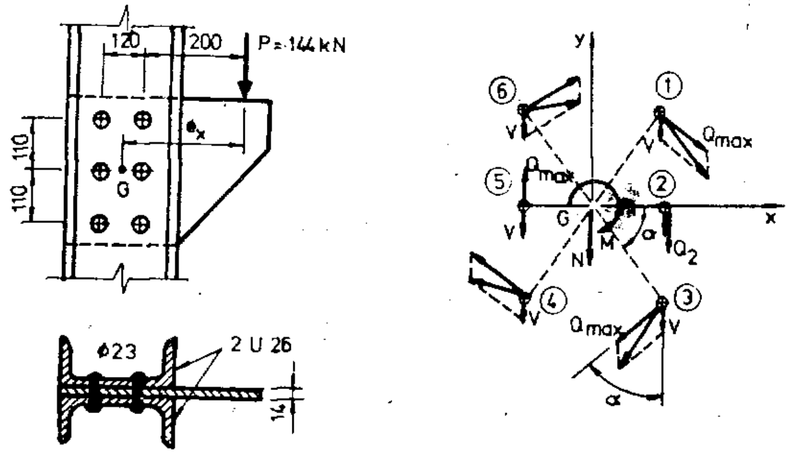


Fig. 8.54.

Niturile cele mai solicitate sînt cele mai depărtate de centrul de greutate al nituirii. Componentele forţă care le solicită sînt:

$$V = \frac{N}{n} = \frac{14\,400}{6} = 2\,400 \text{ daN}$$

$$Q_{max} = \frac{Mr_{max}}{\sum_1^6 r_i^2} = \frac{374\,400 \cdot 12{,}53}{4 \cdot 12{,}53^2 + 2 \cdot 6{,}0^2} = 6\,701{,}70 \text{ daN}$$

$$r_1 = r_3 = r_4 = r_6 = r_{max} = \sqrt{6^2 + 11^2} = 12{,}53 \text{ cm}$$

$$r_2 = r_5 = 6{,}00 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = 11/12{,}53 = 0{,}8779$$

$$R_{max} = \sqrt{V^2 + Q_{max}^2 + 2VQ_{max}\cos\alpha} =$$
$$= \sqrt{2\,400^2 + 6\,701{,}7^2 + 2 \cdot 2\,400 \cdot 6\,701{,}7 \cdot 0{,}8779} = 8\,883{,}3 \text{ daN}.$$

2) Determinarea rezistenţei nitului

$$R_f = 2 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 2{,}3^2}{4} \cdot 1\,200 = 9\,966{,}36 \text{ daN}$$

$$\sum t_{min} = 1{,}4 \text{ cm}$$

$$R_{cg} = 2{,}3 \cdot 1{,}4 \cdot 3\,000 = 9\,660 \text{ daN}$$

$$R_{nit} = 9\,660 \text{ daN}.$$

3) Verificarea prinderii

$$R_{max} = 8\,883{,}3 \text{ daN} < R_{nit} = 9\,660 \text{ daN}.$$

Aplicaţia 8.15. Diagonala unei grinzi cu zăbrele este alcătuită din două corniere cu aripi egale 100 × 100 × 10 şi este prinsă la guseu cu ajutorul sudurii (fig. 8.55). Să se dimensioneze lungimile cordoanelor de sudură astfel încît transmiterea efortului axial prin îmbinare să se facă centric.

Rezistenţa admisibilă pentru bară este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm² iar pentru sudură $\tau_{as} = 910$ daN/cm².

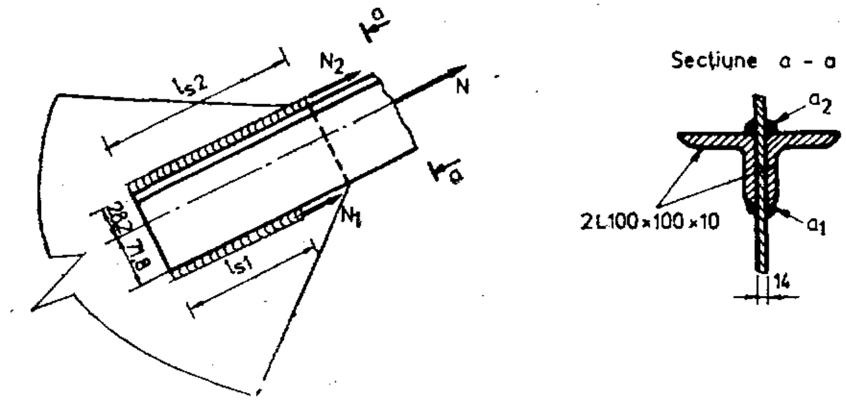


Fig. 8.55.

1) Determinarea capacității portante a barei. Dimensionarea prinderii se va face corespunzător efortului axial capabil al barei

$$N_{cap} = A_{ef}\sigma_a = 2 \cdot 19{,}20 \cdot 1\,400 = 53\,760 \text{ daN}.$$

2) Determinarea lungimilor cordoanelor de sudură. Pentru ca îmbinarea să fie solicitată centric trebuie ca rezultanta eforturilor N_1 și N_2 corespunzătoare celor două cordoane de sudură să aibă suportul pe axa barei (fig. 8.55). Cunoscînd poziția rezultantei și a celor două componente, mărimile acestora se determină din ecuații de moment în raport cu puncte situate pe suportul forței N_1, respectiv N_2

$$N \cdot 7{,}18 = N_2 \cdot 10\,; \quad N_2 = N \cdot \frac{7{,}18}{10} = 53\,760 \cdot 0{,}718 = 38\,600 \text{ daN}$$

$$N \cdot 2{,}82 = N_1 \cdot 10\,; \quad N_1 = N \cdot \frac{2{,}82}{10} = 53\,760 \cdot 0{,}282 = 15\,160 \text{ daN}.$$

Pentru grosimea aripii corniereí $t = 10$ mm și a gusecului $t_1 = 11$ mm, normele prevăd pentru grosimile sudurilor $a_1 \leqslant 0{,}7\, t$ și $a_2 \leqslant 0{,}85\, t$. Alegînd $a_1 = 7$ mm și $a_2 = 8$ mm rezultă următoarele lungimi de calcul pentru cordoanele de sudură :

$$l_{1nec} = \frac{1}{2}\,\frac{N_1}{a_1\tau_{as}} = \frac{1}{2}\,\frac{15\,160}{0{,}7 \cdot 910} = 11{,}90 \text{ cm}$$

$$l_{2nec} = \frac{1}{2}\,\frac{N_2}{a_2\tau_{as}} = \frac{1}{2}\,\frac{38\,600}{0{,}8 \cdot 910} = 26{,}50 \text{ cm}.$$

Lungimile efective ale cordoanelor de sudură vor fi :

$$l_{1s} = l_{1nec} + 2a_1 = 11{,}90 + 2 \cdot 0{,}7 = 13{,}30 \text{ cm}$$

$$l_{2s} = l_{2nec} + 2a_2 = 26{,}50 + 2 \cdot 0{,}8 = 28{,}10 \text{ cm}.$$

8.5. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE PURĂ

Secțiunea transversală a unui element de construcție este solicitată la încovoiere dacă în centrul de greutate al secțiunii torsorul de reducere al forțelor exterioare este reprezentat *numai de un vector moment încovoietor*.

Dacă vectorul moment încovoietor are ca suport una din axele de inerție principale ale secțiunii transversale, secțiunea este solicitată la încovoiere pură (fig. 8.56, *a*), în caz contrar secțiunea este solicitată la încovoiere oblică (fig. 8.56, *b*).

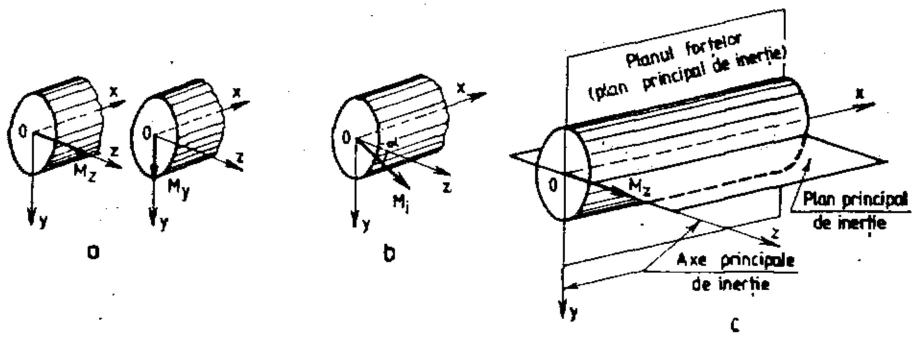


Fig. 8.56.

Întrucît vectorul moment încovoietor este normal pe planul forțelor exterioare, pentru ca o secțiune transversală să fie solicitată la încovoiere pură este necesar ca sistemul de forțe exterioare să fie conținut într-un plan principal de inerție care este și plan de simetrie pentru secțiune (fig. 8.56, *c*).

În fig. 8.57 sînt prezentate cîteva exemple de încărcare cu forțe exterioare care produc solicitarea de încovoiere pură în anumite secțiuni ale barelor respective.

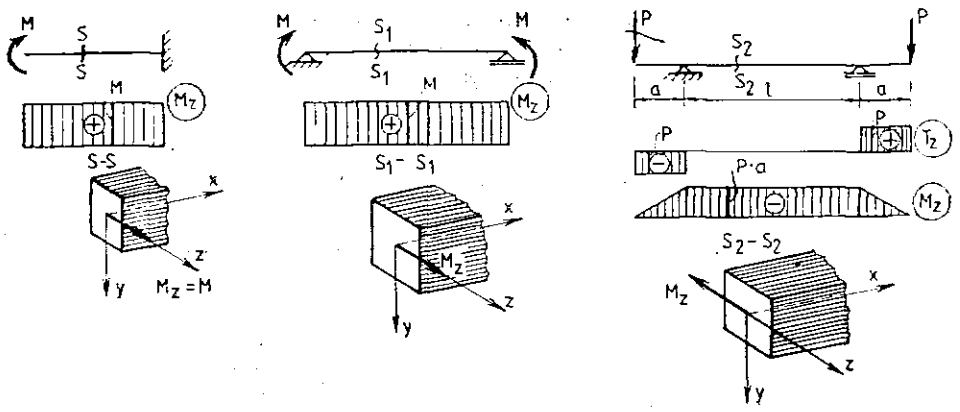


Fig. 8.57.

8.5.1. RELAȚIA DINTRE EFORTURILE UNITARE ȘI EFORTUL SECȚIONAL

În vederea stabilirii relației dintre efortul secțional M_z sau M_y și eforturile unitare este necesară cunoașterea naturii și a modului de distribuție a acestor eforturi unitare pe secțiunea transversală. Stabilirea tipului și a legii de distribuție a eforturilor unitare pe secțiunea transversală se realizează pe cale experimentală.

Studiul geometric. Pe suprafața laterală a unei grinzi se trasează o rețea de repere longitudinale paralele cu axa grinzii și repere transversale perpendiculare pe axa grinzii care materializează conturul exterior al secțiunilor transversale (fig. 8.58, *a*). Dacă bara este solicitată la încovoiere pură, după deformarea barei se constată următoarele (fig. 8.58, *b*) :

— Reperele longitudinale se curbează, cele de la partea superioară se scurtează iar cele de la partea inferioară se alungesc (fig. 8.58, *b*). Distanța dintre repere nu variază în lungul grinzii. Întrucît aceste repere marchează diferite fibre ale grinzii și întrucît cele situate la partea superioară se scurtează

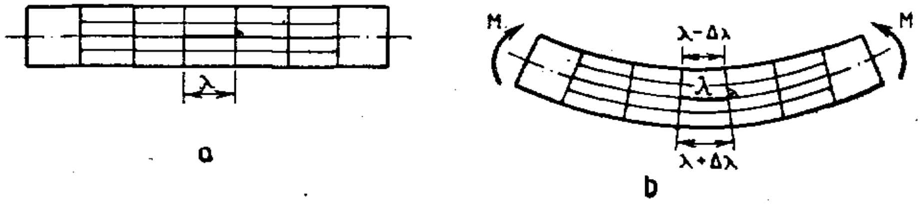


Fig. 8.58.

iar cele situate la partea inferioară se alungesc, rezultă că pe înălțimea grinzii, în secțiune longitudinală, există o fibră a cărei lungime rămîne constantă. Suprafața formată de totalitatea acestor fibre poartă numele de suprafață neutră (fig. 8.59).

Intersecția suprafeței neutre cu planul secțiunii transversale este o dreaptă numită axa neutră a secțiunii, iar intersecția suprafeței neutre cu planul încărcărilor exterioare (planul de simetrie al grinzii) este o curbă plană numită fibră medie deformată.

— Reperele transversale care marchează conturul secțiunilor transversale rămîn drepte și perpendiculare pe reperele longitudinale după deformare (ipoteza secțiunilor plane — J. Bernoulli).

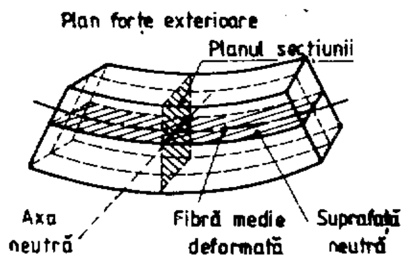


Fig. 8.59.

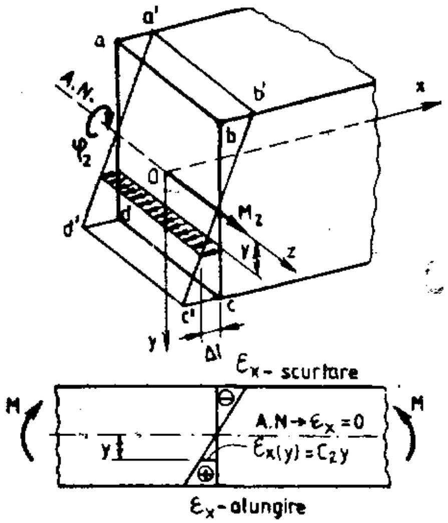


Fig. 8.60.

O secțiune plană *abcd* se va roti în jurul axei neutre, va ajunge în poziția *a'b'c'd'* și va rămîne plană (fig. 8.60). Punctele secțiunii situate la distanța y de axa neutră se vor deplasa cu cantitatea $\Delta l(y)$, fibrele corespunzătoare se vor alungi proporțional cu distanța y

$$\Delta l(y) = c_1 y \tag{8.158}$$

unde c_1 este un coeficient de proporționalitate.

Întrucît lungimea inițială a fibrelor este aceeași, rezultă că deformația specifică longitudinală ε_x este

$$\varepsilon_x(y) = \frac{\Delta l(y)}{l} = \frac{c_1}{l} y = c_2 y. \tag{8.159}$$

Relația (8.159) pune în evidență că deformațiile specifice sînt proporționale cu distanța y față de axa neutră (fig. 8.60).

Întrucît în cazul încovoierii pure deformarea barei se produce fără variații de unghiuri, în secțiunea transversală se dezvoltă numai eforturi unitare normale σ_x.

Studiul static. Pe un element de arie dA al unei secțiuni transversale solicitată la încovoiere pură se va dezvolta o forță elementară (fig. 8.61) dN a cărei valoare este

$$dN = \sigma_x \, dA. \tag{8.160}$$

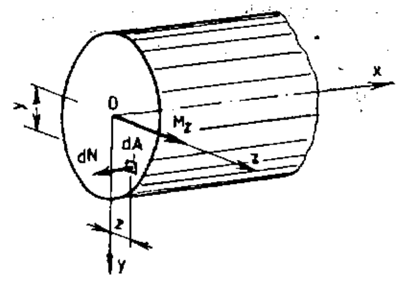


Fig. 8.61.

Avînd în vedere relațiile de echivalență statică rezultă

$$\int_A dN = 0\,; \qquad \int_A \sigma_x \, dA = 0 \tag{8.161}$$

$$\int_A y\, dN = M_z\,; \quad \int_A \sigma_x\, y\, dA = M_z \tag{8.162}$$

$$\int_A z\, dN = 0\,; \qquad \int_A \sigma_x\, z\, dA = 0. \tag{8.163}$$

Relațiile (8.159) și (8.161)—(8.163) nu sînt suficiente pentru a determina distribuția lui σ_x în secțiunea transversală.

Studiul fizic. Legătura dintre deformațiile specifice ε_x și eforturile unitare σ_x este dată de legea lui Hooke, întrucît solicitarea este presupusă în zona de proporționalitate a materialului

$$\sigma_x(y) = E\varepsilon_x(y) = Ec_2 y = cy \tag{8.164}$$

unde c este o constantă de proporționalitate ce urmează a se determina.

Relația (8.164) arată că eforturile unitare σ_x au distribuția dată de un plan care conține axa neutră a secțiunii, fiind proporționale cu distanța punctului față de axa neutră.

Introducînd relația (8.164) în relațiile de echivalență statică rezultă

$$c\int_A y\, dA = 0 \tag{8.165}$$

dar $\int_A y\, dA = S_z$ reprezintă momentul static al întregii secțiuni în raport cu axa neutră. Deoarece $S_z = 0$ înseamnă că axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale

$$c\int_A yz\, dA = 0 \tag{8.166}$$

dar $\int_A yz\, dA = I_{zy}$ reprezintă momentul de inerție centrifugal al secțiunii transversale. Întrucît $I_{zy} = 0$ și ținînd seama de relația (8.165) rezultă că axele Oz (axa neutră) și Oy sînt axe principale și centrale ale secțiunii transversale.

$$c\int_A y^2\, dA = M_z \tag{8.167}$$

unde $\int_A y^2\, dA = I_z$ este momentul de inerție central și principal al secțiunii transversale în raport cu axa Oz (axa neutră). Din relația (8.167) se determină constanta de proporționalitate c:

$$c = \frac{M_z}{I_z} \tag{8.168}$$

și pe baza acesteia expresia efortului unitar normal într-un punct pe secțiunea transversală situat la distanța y față de axa neutră:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y. \tag{8.169}$$

Relația (8.169) este cunoscută sub denumirea de formula lui Navier și arată că în toate punctele situate la aceeași distanță y de axa neutră efortul

unitar σ_x este acelaşi (fig. 8.62), putîndu-se reprezenta variaţia efortului unitar pe înălţimea secţiunii transversale cu o distribuţie liniară.

În relaţia (8.169) M_z şi y se introduc cu semnele lor. Momentele încovoietoare sînt considerate pozitive dacă vectorii moment au sensul pozitiv al axelor centrale şi principale. Semnul lui σ_x poate fi obţinut şi după examinarea efectului pe care îl are rotirea unei secţiuni asupra fibrelor situate între două secţiuni vecine. Efectul momentului $M_z > 0$ este prezentat în fig. 8.62.

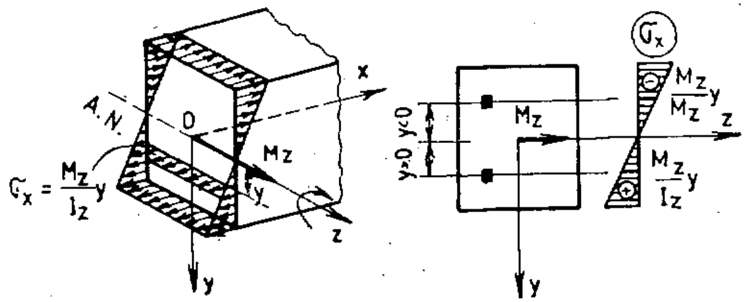


Fig. 8.62.

În cazul acţiunii momentului încovoietor $M_y > 0$, rotirea secţiunii (fig. 8.63) indică apariţia compresiunilor în puncte cu $z > 0$ şi a întinderilor în puncte cu $z < 0$.

Efortul unitar σ_x maxim se înregistrează la fibra cea mai depărtată de axa neutră

$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{M_z}{\dfrac{I_z}{y_{max}}} = \frac{M_z}{W_z} \qquad (8.170)$$

sau

$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} = \frac{M_y}{\dfrac{I_y}{z_{max}}} = \frac{M_y}{W_y}\,. \qquad (8.171)$$

Cantităţile $W_z = I_z/y_{max}$ respectiv $W_y = I_y/z_{max}$ se numesc module de rezistenţă la încovoiere, sînt caracteristici geometrice ale secţiunilor transversale depinzînd de forma şi dimensiunile acestora şi au dimensiunea $[L^3]$ (cm^3, m^3 etc.).

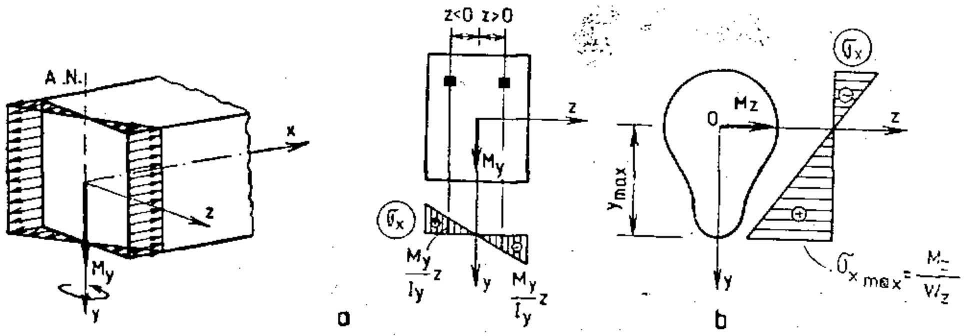


Fig. 8.63.

8.5.2. **ASPECTE DE CALCUL**

Relaţiile (8.170) respectiv (8.171) pot fi grupate generic într-o relaţie unică care permite tratarea unitară a aspectelor de calcul la încovoiere

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} \qquad (8.172)$$

unde M poate fi M_z sau M_y iar W poate fi W_z sau W_y.

Verificarea. Constă în compararea efortului unitar normal maxim efectiv cu rezistenţa admisibilă la încovoiere σ_a

$$\sigma_{ef\,max} = \frac{M_{max}}{W_{ef}} \leqslant \sigma_a. \qquad (8.173)$$

Dimensionarea. Constă în determinarea modulului de rezistenţă necesar pe baza căruia se aleg forma şi dimensiunile secţiunii transversale

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a}\,. \qquad (8.174)$$

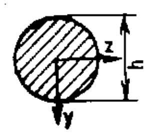
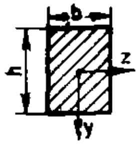
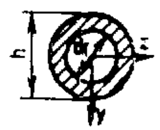
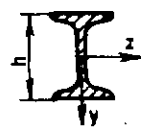
Alcătuirea raţională a unei secţiuni transversale solicitată la încovoiere constă în a găsi o formă astfel încît pentru o arie dată să rezulte un modul de rezistenţă cît mai mare. Compararea din punct de vedere economic a mai multor forme de secţiune cu aceeaşi înălţime se face examinînd valorile raportului

$$k = \frac{W}{Ah}\,. \qquad (8.175)$$

O secţiune este cu atît mai raţională cu cît k are valoare mai mare. În tabelul 8.3 sînt prezentate caracteristicile geometrice şi valorile coeficientului k pentru cîteva secţiuni curent utilizate.

Tabelul 8.3

Caracteristici geometrice pentru încovoiere

Forma secţiunii				
I_z	$\frac{\pi h^4}{64}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{\pi}{64}(h^4 - d_i^4)$	În tabele
W_z	$\frac{\pi h^3}{32}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{\pi h^3}{32}\left(1 - \frac{d_i^4}{h^4}\right)$	În tabele
k	0,125	0,167	0,125—0,250	0,309—0,323

Din examinarea valorilor înscrise în tabelul 8.3 rezultă că eficienţa secţiunilor creşte de la cerc spre secţiunea alcătuită cu două tălpi. Explicaţia rezultă din modul de distribuţie a materialului în jurul axei neutre. La sec-

țiunea circulară materialul este concentrat spre axa neutră (neeconomic) în timp ce la secțiunile tip I materialul este concentrat spre zonele depărtate de axa neutră.

Capacitatea portantă. Capacitatea portantă a secțiunii constă în determinarea momentului încovoietor maxim ce poate solicita o secțiune transversală dată astfel încît relația (8.173) să fie satisfăcută

$$M_{cap} = W_{ef}\sigma_a. \tag{8.176}$$

Dacă secțiunea transversală este nesimetrică față de axa de încovoiere (axa neutră) iar materialul are rezistența admisibilă la întindere σ_{ai} diferită de rezistența admisibilă la compresiune σ_{ac}, analiza trebuie efectuată separat atît pentru fibrele întinse cît și pentru cele comprimate.

Pentru exemplul din fig. 8.64, *a*, în cazul verificării trebuie îndeplinite următoarele condiții :

$$\sigma_{ef,i} = \frac{M_z}{I_z}\cdot h_i \leqslant \sigma_{ai}\,; \quad \sigma_{ef,c} = \frac{M_z}{I_z} h_s \leqslant \sigma_{ac}. \tag{8.177}$$

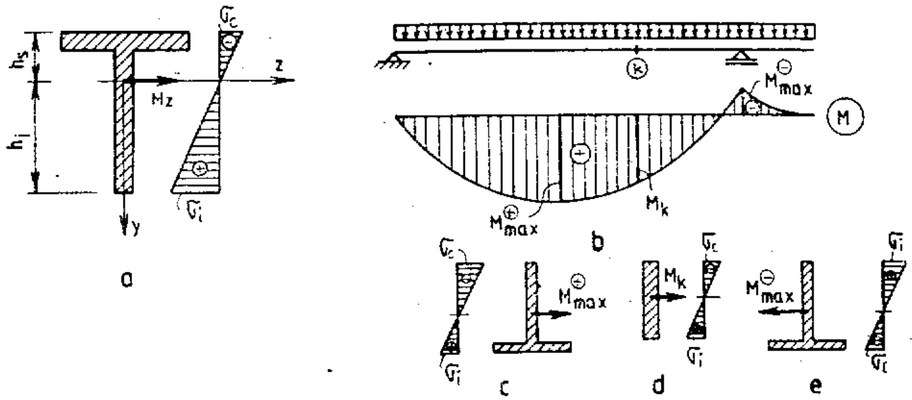


Fig. 8.64.

8.5.3. SECȚIUNE PERICULOASĂ

În general, la stabilirea secțiunii periculoase solicitate la încovoiere, trebuie considerate următoarele elemente : variația momentului încovoietor în lungul grinzii, variația secțiunii în lungul grinzii, secțiunea cea mai slăbită, comportarea diferită la întindere și compresiune a materialului.

Pentru exemplificare se consideră grinda din fig. 8.64, *b* cu secțiunea curentă prezentată în fig. 8.64, *c* și *e*. În secțiunea *k* grinda prezintă o slăbire, secțiunea corespunzătoare este prezentată în fig. 8.64, *d*.

Pentru verificarea grinzii, în orice secțiune trebuie ca $\sigma_{ef,i} \leqslant \sigma_{ai}$ și $\sigma_{ef,c} \leqslant \sigma_{ac}$. Dacă rezistențele admisibile ale materialului la întindere și compresiune sînt egale $\sigma_{ai} = \sigma_{ac}$, verificarea se va face în secțiunea slăbită și în secțiunea în care momentul încovoietor are valoare maximă. Dacă materialul are $\sigma_{ai} \neq \sigma_{ac}$, trebuie analizată situația celor trei secțiuni atît pentru fibrele întinse cît și pentru cele comprimate și îndeplinite condițiile (8.177).

8.5.4. DIMENSIONAREA ECONOMICA A GRINZILOR SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

Pentru o încărcare oarecare în poziție fixă, momentul încovoietor variază cu poziția secțiunii, iar dimensionarea grinzii cu secțiune constantă pe toată lungimea reprezintă o soluție neeconomică, întrucît materialul este utilizat la capacitatea sa maximă numai în secțiunea periculoasă la fibrele cele mai solicitate (fig. 8.65).

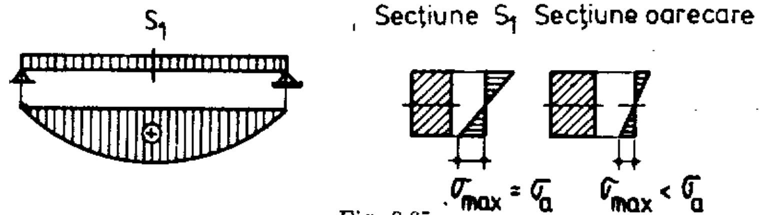


Fig. 8.65.

Pentru o utilizare rațională a materialului se impune ca modulul de rezistență să varieze pe lungimea grinzii corespunzător distribuției momentului încovoietor, astfel ca fibrele cele mai solicitate ale tuturor secțiunilor să fie încărcate cu aceeași valoare $\sigma_{max} = \sigma_a$. Forma unei grinzi care satisface această condiție se numește grindă de egală rezistență. Această formă se stabilește de la caz la caz în funcție de expresia analitică a momentului încovoietor și de forma adoptată pentru secțiune. Pentru exemplificare se consideră grinda în consolă din fig. 8.66, care are secțiune dreptunghiulară, urmînd să se stabilească modul de variație a dimensiunilor acesteia din condiția ca $\sigma_{max} = \sigma_a$ în orice secțiune a grinzii. Într-o secțiune curentă a grinzii, momentul încovoietor are expresia

$$M(x) = Px. \tag{8.178}$$

1) Înălțimea grinzii este constantă (h = const)

$$W_{x,\,nec} = \frac{M(x)}{\sigma_a} = \frac{Px}{\sigma_a} \tag{8.179}$$

$$\frac{b_x h^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_a}; \quad b_x = \frac{6P}{h^2\sigma_a}\cdot x. \tag{8.180}$$

Relația (8.180) arată că pentru h = const, lățimea grinzii variază liniar cu x (fig. 8.66, *a*). Lățimea maximă se obține în încastrare ($x = l$)

$$b_0 = \frac{6Pl}{h^2\sigma_a}. \tag{8.181}$$

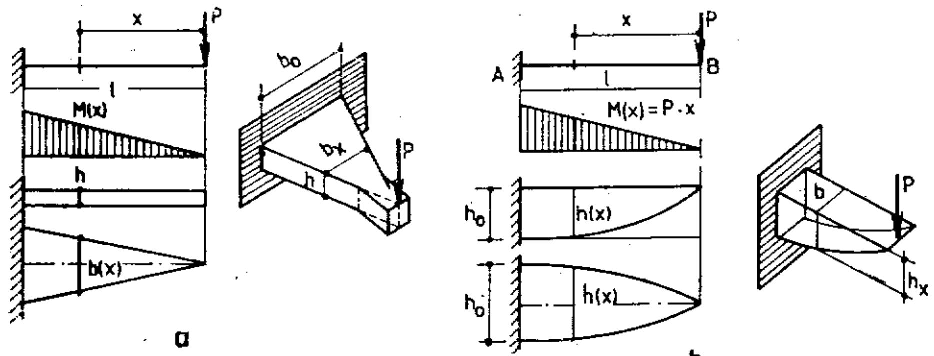


Fig. 8.66.

2) Lățimea secțiunii este constantă (b = const)

$$\frac{bh_x^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_a}; \quad h_x = \sqrt{\frac{6P}{b\sigma_a} \cdot x} = cx^{1/2}. \tag{8.182}$$

Deci, pentru b = const, înălțimea grinzii variază parabolic cu x (fig. 8.66, b). Înălțimea maximă se atinge în incastrare ($x = l$)

$$h_0 = \sqrt{\frac{6Pl}{b\sigma_a}}. \tag{8.183}$$

În practica curentă, variația caracteristicilor geometrice ale secțiunilor transversale în lungul grinzii se realizează în trepte. Este cazul, în special, a grinzilor metalice cu secțiune compusă din platbande și corniere la care variația secțiunii se obține prin modificarea grosimilor platbandelor sau prin eliminarea unor platbande.

Pentru exemplificare, s-a ales cazul unei grinzi simplu rezemate, cu secțiune compusă din platbande metalice (fig. 8.67), încărcată cu o forță uniform distribuită. Întrucît diagrama de momente încovoietoare are variație parabolică, teoretic și modulul de rezistență al diferitelor secțiuni transversale ar trebui să varieze parabolic. Practic, variația de secțiune se realizează în trepte prin întreruperea unor platbande ale tălpilor grinzii. Dimensionarea grinzii se face în secțiunea $3-3$ unde momentul încovoietor este maxim

$$W_{3\,nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a}. \tag{8.184}$$

Către reazeme, întrucît momentul încovoietor scade, este posibil să se micșoreze secțiunea prin înlăturarea platbandelor extreme ale tălpilor grinzii. Cunoscîndu-se modulele de rezistență W_2 și W_1 ale secțiunilor slăbite prin

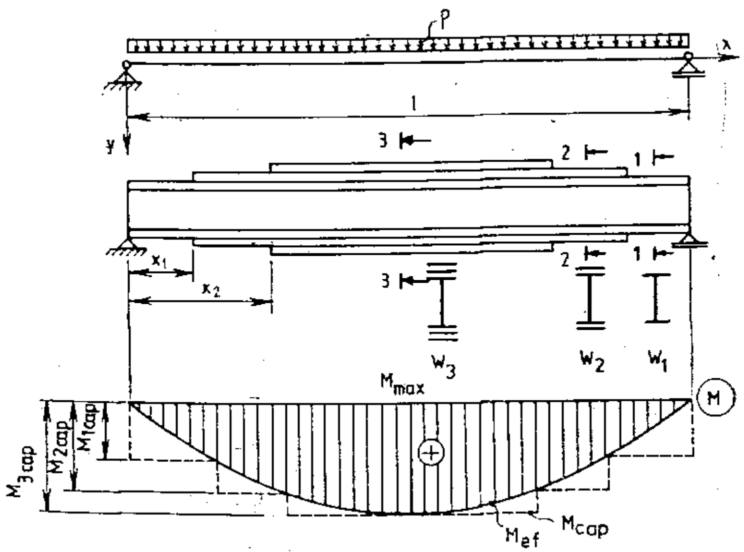


Fig. 8.67.

eliminarea platbandelor se pot determina momentele capabile ale celor două secțiuni $2-2$ și $1-1$ (fig. 8.67)

$$M_{2\,cap} = W_2\sigma_a; \quad M_{1\,cap} = W_1\sigma_a. \tag{8.185}$$

Distanțele x_1 și x_2 de la care se pot folosi secțiunile slăbite se determină din condiția

$$M_{ef} \leq M_{cap}. \tag{8.186}$$

Deci:

$$M(x_1) = M_{1\,cap}; \; M(x_2) = M_{2\,cap} \tag{8.187}$$

unde

$$M(x) = \frac{px}{2}(l - x). \tag{8.188}$$

Egalînd expresia momentului încovoietor într-o secțiune curentă cu momentul capabil se obține distanța măsurată de la reazem pînă unde se poate folosi secțiunea redusă considerată. Lungimea reală a platbandelor depășește lungimea teoretică determinată mai înainte, deoarece la distanțele x_1 respectiv x_2 platbandele întrerupte trebuie să lucreze efectiv în cadrul secțiunii.

Prin reprezentarea variației momentului capabil în lungul grinzii se obține diagrama M_{cap}. Această diagramă nu depinde de încărcarea grinzii ci numai de caracteristicile geometrice ale secțiunilor acesteia. Reprezentarea diagramelor momentelor încovoietoare efective M_{ef} și capabile M_{cap} este deosebit de sugestivă punînd în evidență siguranța grinzii și alcătuirea sa rațională. Cu cît M_{cap} este mai apropiat de diagrama M_{ef}, cu atît materialul grinzii este utilizat mai rațional.

La grinzile din beton armat, variația momentului încovoietor capabil se obține prin întreruperea armăturilor sau trecerea lor în alte zone ale secțiunilor transversale.

În cazul grinzilor încărcate cu forțe mobile, diagrama M_{ef} se înlocuiește cu curba înfășurătoare de momente încovoietoare.

Din condiția $M_{ef} \leq M_{cap}$ rezultă că diagrama M_{cap} nu trebuie să intersecteze curba înfășurătoare de momente, fiind însă cît mai aproape de aceasta.

Aplicația 8.16. Să se verifice grinda din lemn de brad cu secțiune dreptunghiulară 25 × 30 cm din fig. 8.68. La 1,00 m de reazemul din stînga, grinda are secțiunea slăbită (fig. 8.68, c). Rezistența admisibilă la încovoiere a lemnului de brad este $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Trebuie remarcat că, deși o secțiune curentă a grinzii este solicitată la un moment încovoietor și o forță tăietoare, efectele celor două eforturi pot fi studiate separat, considerînd în continuare numai efectul momentului încovoietor.

Secțiunea periculoasă poate fi în secțiunea cu moment încovoietor maxim sau secțiunea slăbită.

1) Verificarea secțiunii cu moment încovoietor maxim

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{25 \cdot 30^2}{6} = 3\,750 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{340\,000}{3\,750} = 90{,}67 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

2) Verificarea secțiunii slăbite

$$W_z = \frac{25 \cdot 25^2}{6} = 2\,604 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_a}{W_z} = \frac{255\,000}{2\,604} = 98{,}00 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2.$$

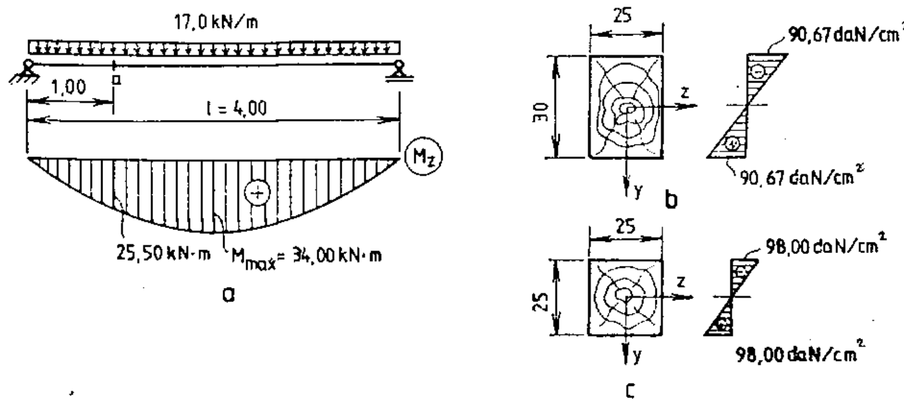


Fig. 8.68.

Rezultă că secțiunea periculoasă este secțiunea slăbită, deoarece în această secțiune se înregistrează cea mai mare valoare a efortului unitar.

Aplicația 8.17. Să se dimensioneze grinda din fig. 8.69 cu secțiunea alcătuită dintr-un profil laminat tip I. Rezistența admisibilă a oțelului se consideră $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Secțiunea periculoasă este cea corespunzătoare momentului încovoietor maxim

$$W_{z\,nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{210\,000}{1\,400} = 150 \text{ cm}^3.$$

Din tabele se alege profilul laminat I 18 cu $W_{z\,ef} = 161$ cm³. Verificarea secțiunii alese

$$\sigma_{ef} = \frac{M_{max}}{W_{z\,ef}} = \frac{210\,000}{161} = 1\,304{,}35 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

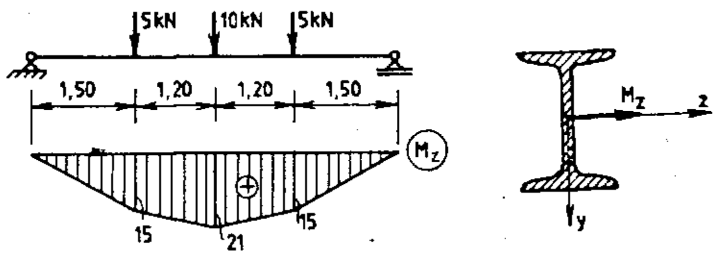


Fig. 8.69.

Aplicația 8.18. O grindă din beton precomprimat este așezată înainte de precomprimare pe două reazeme, conform fig. 8.70, *a*. Să se verifice grinda trasîndu-se diagramele σ în secțiunile de la mijlocul deschiderii și pe reazem.

Pentru betonul simplu, rezistența admisibilă la întindere este $\sigma_{ai} = 14$ daN/cm² iar la compresiune $\sigma_{ac} = 140$ daN/cm².

1) Determinarea poziției centrului de greutate

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{100 \cdot 10 \cdot 95 + 90 \cdot 8 \cdot 45}{100 \cdot 10 + 90 \cdot 8} \approx 74{,}00 \text{ cm}.$$

2) Determinarea momentului de inerție în raport cu axa de încovoiere, I_z

$$I_z = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + 100 \cdot 10 \cdot 21^2 + \frac{8 \cdot 90^3}{12} + 8 \cdot 90 \cdot 29^2 = 1\,540\,853 \text{ cm}^4.$$

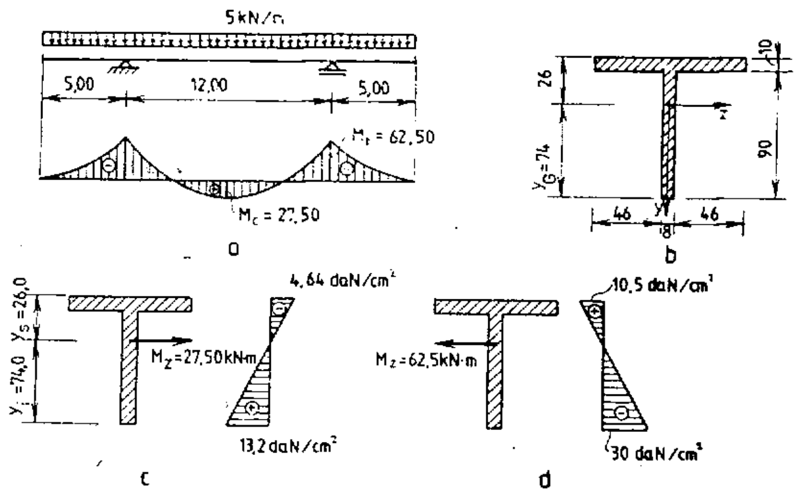


Fig. 8.70.

3) Verificarea secțiunii din mijlocul deschiderii (moment încovoietor maxim pozitiv), (fig. 8.70, *c*)

$$\sigma_i = \frac{M_c}{I_z} y_i = \frac{275\,000}{1\,540\,853} 74 = 13{,}20 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ai} = 14{,}0 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_s = \frac{M_c}{I_z} y_s = \frac{275\,000}{1\,540\,853} 26 = 4{,}64 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 140 \text{ daN/cm}^2.$$

4) Verificarea secțiunii de pe reazem (moment încovoietor maxim negativ), (fig. 8.70, *d*)

$$\sigma_i = \frac{M_r}{I_z} y_i = \frac{625\,000}{1\,540\,853} 74 = 30 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ac} = 140 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_s = \frac{M_r}{I_z} y_s = \frac{625\,000}{1\,540\,853} 26 = 10{,}5 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_{ai} = 14{,}00 \text{ daN/cm}^2$$

Deși momentul încovoietor din secțiunea de la mijlocul grinzii este mai mic, secțiunea periculoasă este cea corespunzătoare acestui moment, întrucît efortul unitar normal de întindere este aproape de rezistența admisibilă.

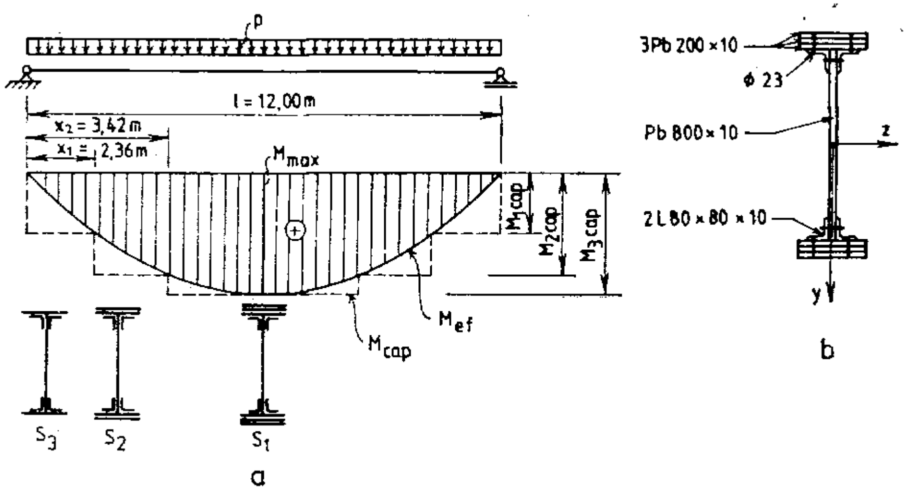


Fig. 8.71.

Aplicația 8.19. Să se determine intensitatea forței uniform distribuită maximă cu care se poate încărca grinda din fig. 8.71, *a*, care are secțiunea transversală compusă din platbande și corniere solidarizate cu nituri (fig. 8.71, *b*). Să se stabilească distanțele față de reazeme la care se pot întrerupe două dintre platbandele ce alcătuiesc tălpile grinzii. Rezistența admisibilă a oțelului se consideră $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

1) Determinarea momentului încovoietor maxim efectiv

$$M_{max\,ef} = \frac{pl^2}{8} = \frac{p \cdot 12^2}{8} = 18\,p\ [\text{kN}\cdot\text{m}].$$

2) Determinarea încărcării capabile din condiția

$$M_{max\,ef} = M_{cap}\ \text{unde}\ M_{cap} = W_{z\,net}\cdot\sigma_a,\ \text{iar}\ W_{z\,net} = I_{z\,net}/y_{max}.$$

La determinarea momentului de inerție net se vor scădea numai momentele de inerție ale găurilor niturilor de cap, întrucît se consideră că nu se așază toate cele șase nituri în aceeași secțiune transversală

$$I_{z\,br} = 2\left(\frac{20\cdot 3^3}{12} + 20\cdot 3\cdot 41{,}5^2\right) + 4(87{,}5 + 15{,}1\cdot 37{,}66^2) +$$

$$+ \frac{1\cdot 80^3}{12} = 335\,440\ \text{cm}^4$$

$$I_{z\,sl} = 4\left(\frac{2{,}3\cdot 4^3}{12} + 2{,}3\cdot 4\cdot 41^2\right) = 61\,910\ \text{cm}^4$$

$$I_{z\,net} = I_{z\,br} - I_{z\,sl} = 273\,530\ \text{cm}^4$$

$$W_{z\,net} = \frac{I_{z\,net}}{y_{max}} = \frac{273\,530}{43} = 6\,361\ \text{cm}^3.$$

$$M_{cap} = W_{z\,net}\sigma_a = 6\,361\cdot 1\,400 = 8\,905\,400\ \text{daN}\cdot\text{cm} = 890{,}54\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$890{,}54 = 18\,p \rightarrow p_{cap} = 49{,}47\ \text{kN/m}.$$

3) Determinarea distanțelor de întrerupere a platbandelor

— Secțiunea cu două platbande (S_2)

$$I_{z_2\,br} = 2\left(\frac{20\cdot 2^3}{12} + 20\cdot 2\cdot 41^2\right) + 4(87{,}5 + 15{,}1\cdot 37{,}66^2) +$$

$$+ \frac{1\cdot 80^3}{12} = 263\,187\ \text{cm}^4$$

$$I_{z_2\,sl} = 4\left(\frac{2{,}3\cdot 3^3}{12} + 2{,}3\cdot 3\cdot 40{,}5^2\right) = 45\,291\ \text{cm}^4$$

$$I_{z_2\,net} = 263\,187 - 45\,291 = 217\,896\ \text{cm}^4$$

$$W_{z_2\,net} = \frac{217\,896}{42} = 5\,188\ \text{cm}^3$$

$$M_{2\,cap} = W_{z_2\,net}\,\sigma_a = 5\,188\cdot 1\,400 = 7\,263\,200\ \text{daN}\cdot\text{cm} = 726{,}32\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

Într-o secțiune situată la distanța x de reazemul din stînga al grinzii, momentul încovoietor are expresia

$$M_x = \frac{pl}{2}\cdot x - \frac{px^2}{2} = 296{,}82x - 24{,}735\,x^2.$$

Secțiunea cu tălpile alcătuite din două platbande se poate utiliza pînă la distanța x_2 la care momentul capabil al secțiunii este egal cu momentul încovoietor efectiv

$$M_{x_2} = M_{2\,cap}\ \text{sau}\ 296{,}82\,x - 24{,}735x^2 = 726{,}32.$$

Rezolvînd ecuația se obțin valorile

$$x_2' = 3{,}42\ \text{m}\quad \text{și}\quad x_2'' = 8{,}58\ \text{m}.$$

— Secțiunea cu o singură platbandă (S_1)

$$I_{z_1\,br} = 2\left(\frac{20\cdot 1^3}{12} + 20\cdot 1\cdot 40{,}5^2\right) + 4(87{,}5 + 15{,}1\cdot 37{,}66^2) +$$

$$+ \frac{1\cdot 80^3}{12} = 194\,294\ \text{cm}^4$$

$$I_{z_1\,sl} = 4\left(\frac{2{,}3\cdot 2^3}{12} + 2{,}3\cdot 2\cdot 40^2\right) = 29\,446\ \text{cm}^4$$

$$I_{z_1\,net} = 194\,294 - 29\,446 = 164\,848\ \text{cm}^4$$

$$W_{z_1\,net} = \frac{164\,848}{41} = 4\,020{,}7\ \text{cm}^3$$

$$M_{1\,cap} = 4\,020{,}7\cdot 1\,400 = 5\,628\,956\ \text{daN}\cdot\text{cm} = 562{,}89\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{x_1} = M_{1\,cap};\quad 296{,}82x - 24{,}735x^2 = 562{,}89.$$

Rezolvînd ecuația se obțin valorile

$$x_1' = 2{,}36\ \text{m};\qquad x_1'' = 9{,}64\ \text{m}.$$

Comparativ cu diagrama de momente încovoietoare efectivă, diagrama M_{cap} și secțiunile transversale corespunzătoare sînt prezentate în fig. 8.71, *a*.

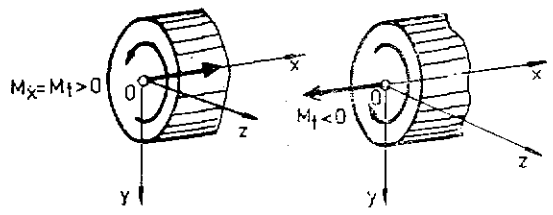
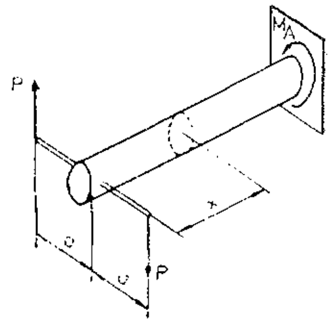


Fig. 8.72.



8.6. SOLICITAREA DE TORSIUNE

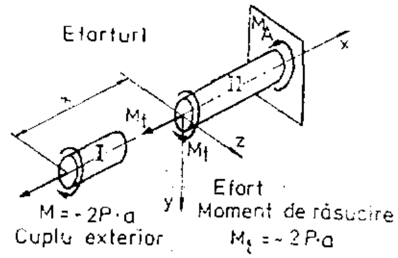


Fig. 8.73.

Secțiunea transversală a unui element de construcție tip bară este solicitată la torsiune (răsucire) dacă în centrul de greutate al secțiunii torsorul de reducere al forțelor exterioare este reprezentat numai de un vector moment după axa barei (fig. 8.72).

Întrucît ipoteza geometrică cu caracter general admisă în cazul solicitării de torsiune este aceea a nedeformabilității secțiunii transversale, rezultă că pot fi rezolvate prin mijloacele Rezistenței materialelor numai cazurile barelor drepte cu secțiune circulară sau inelară.

Solicitarea de torsiune este un fenomen predominant în cazul arborilor de transmisie, a osiilor, resoartelor etc. În practică, solicitarea de torsiune este însoțită de alte solicitări și în special de încovoiere. Întrucît cele două solicitări produc efecte diferite, pot fi studiate separat (fig. 8.73).

8.6.1. RELAȚIA DINTRE EFORTURILE UNITARE ȘI EFORTUL SECȚIONAL

Tipul și modul de distribuție al eforturilor unitare care apar pe o secțiune transversală solicitată la torsiune se stabilesc pe cale experimentală, analizînd modul în care se deformează o bară dreaptă cu secțiune circulară, acționată de un moment de torsiune constant pe lungimea barei.

Studiul geometric. Pe suprafața exterioară a barei analizate se trasează un caroiaj format dintr-o serie de repere longitudinale echidistante după direcția generatoarelor, care marchează fibrele longitudinale ale barei, și o serie de repere transversale (cercuri directoare) care marchează conturul exterior al secțiunilor transversale ale barei (fig. 8.74, *a*). Sub acțiunea momentelor de torsiune bara se deformează (fig. 8.74, *b*).

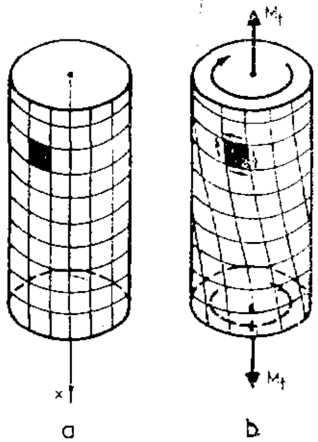


Fig. 8.74.

După deformare se constată că axa barei rămîne dreaptă, distanțele dintre repere rămîn nemodificate iar cercurile directoare au forma și diametrul inițial. Aceste observații permit să se tragă concluzia că cel puțin pe contur sec-

țiunile plane înainte de deformare rămîn plane și după deformare. De asemenea, se constată că generatoarele de pe suprafața laterală se strîmbă devenind arce de elice (v. fig. 8.74, *b*), un dreptunghi de pe suprafața laterală se deformează fără modificarea lungimilor laturilor, devenind un paralelogram.

Deformarea barei în interiorul său este dificil de studiat, de aceea se admite ipoteza că și în interior se menține același mod de deformare cu cel înregistrat pe suprafața laterală a barei. Rezultă că secțiunile transversale se rotesc una față de alta ca și cum ar fi rigide, razele unei secțiuni transversale rămîn drepte și se rotesc cu același unghi cu care se rotește întreaga secțiune.

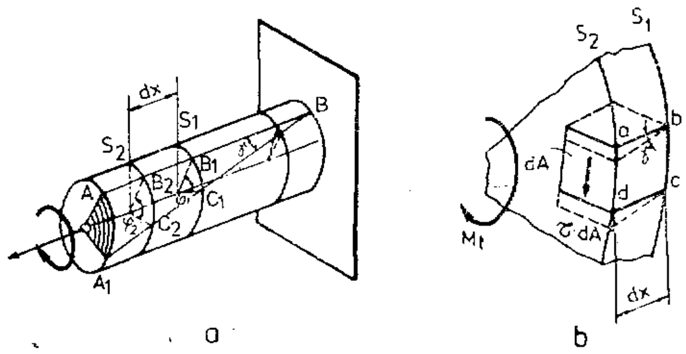


Fig. 8.75.

Două secțiuni transversale situate la distanța dx (fig. 8.75, *a*) se rotesc relativ cu unghiul $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Întrucît distanțele dintre secțiuni nu se modifică după deformare, rezultă că nu apar deformații specifice longitudinale ($\varepsilon_x = 0$) și în consecință nici eforturi unitare ($\sigma_x = 0$). Datorită rotirii relative a celor două secțiuni, suprafața elementară *abcd* își modifică forma cu unghiul de lunecare γ. În consecință, în planul secțiunii transversale se dezvoltă eforturi unitare tangențiale τ, ale căror direcții sînt tangente la cercurile parcurse de elementele de suprafață în timpul rotirii secțiunii (fig. 8.75, *b*).

Rotirea relativă $d\varphi$ a două secțiuni situate la distanța dx se numește rotire elementară, iar rotirea relativă a două secțiuni situate la distanță unitară poartă numele de rotire specifică de torsiune, θ, și are dimensiunea $1/L$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (8.189)$$

Deoarece razele unei secțiuni transversale rămîn drepte și se rotesc cu aceeași cantitate cu care se rotește secțiunea, pe baza fig. 8.76 rezultă lungimea arcului C_2C_3

$$C_2C_3 = R d\varphi. \qquad (8.190)$$

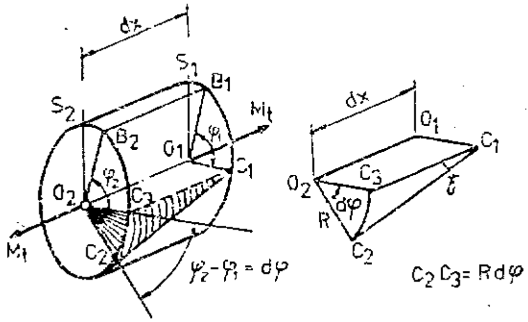


Fig. 8.76.

Rotirea elementară fiind mică, arcul C_2C_3 poate fi asimilat cu o dreaptă şi din triunghiul $C_1C_2C_3$ rezultă

$$\frac{\overline{C_2C_3}}{\overline{C_1C_3}} = \frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\gamma \approx \gamma \qquad (8.191)$$

sau

$$R\theta = \gamma. \qquad (8.192)$$

Concluziile obţinute la periferia secţiunii se extind pentru întreaga suprafaţă, astfel că pentru un element de arie $\mathrm{d}A$ situat la distanţa r de centrul secţiunii se poate scrie

$$r\theta = \gamma \qquad (8.193)$$

ceea ce reprezintă sinteza studiului geometric al torsiunii barelor cu secţiune circulară.

Studiul static. Pe o suprafaţă elementară situată la distanţa r de centrul secţiunii se dezvoltă o forţă elementară $\tau\mathrm{d}A$ care faţă de punctul O produce un moment elementar (fig. 8.77, *a*):

$$\mathrm{d}M_t = (\tau\mathrm{d}A)r. \qquad (8.194)$$

Avînd în vedere relaţiile de echivalenţă statică, rezultă că momentul de torsiune M_t reprezintă rezultanta momentelor elementelor $\mathrm{d}M_t$

$$M_t = \int_A \mathrm{d}M_t = \int_A \tau r\mathrm{d}A. \qquad (8.195)$$

Relaţia (8.195) conţine o nedeterminare şi anume legea de variaţie a eforturilor unitare τ pe secţiunea transversală.

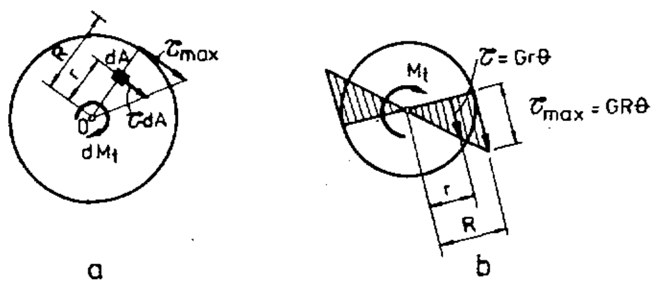


Fig. 8.77.

Studiul fizic. Întrucît fenomenul are loc în zona de proporţionalitate a comportării materialului, este valabilă legea lui Hooke, deci:

$$\tau = G\gamma = Gr\theta. \qquad (8.196)$$

Întrucît G şi θ sînt constante, rezultă că efortul unitar variază în secţiunea transversală proporţional cu distanţa de la centrul secţiunii la punctul considerat (fig. 8.77, *b*).

Introducînd relaţia (8.196) în (8.195) rezultă

$$M_t = G\theta\int_A r^2\mathrm{d}A. \qquad (8.197)$$

Dar $I_0 = \int_A r^2\mathrm{d}A$ reprezintă momentul de inerţie polar al secţiunii. Deci

$$M_t = G\theta I_0 \text{ sau } \theta = \frac{M_t}{GI_0}. \qquad (8.198)$$

Din relaţiile (8.198) şi (8.196) se obţine expresia efortului unitar tangenţial

$$\tau = \frac{M_t}{I_0}r. \qquad (8.199)$$

Relaţia (8.199) arată că distribuţia lui τ în lungul unei raze din secţiunea transversală este liniară, cu valoare zero în centrul secţiunii şi maximă pe conturul acesteia (v. fig. 8.77, *b*)

$$\tau_{max} = \tau_{contur} = \frac{M_t}{I_0}R = \frac{M_t}{W_0} \qquad (8.200)$$

unde $W_0 = I_0/R$ este modulul de rezistenţă polar.

Pentru secţiuni circulare

$$I_0 = \frac{\pi D^4}{32}; \quad W_0 = \frac{\pi D^3}{16} \qquad (8.201)$$

iar pentru secţiuni inelare

$$I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4); \quad W_0 = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \qquad (8.202)$$

D fiind diametrul exterior, iar d — diametrul interior.

8.6.2. ASPECTE DE CALCUL

Verificarea. Verificarea constă în compararea efortului unitar tangenţial maxim cu rezistenţa admisibilă τ_a

$$\tau_{ef\ max} = \frac{M_t}{W_0} \leqslant \tau_a. \qquad (8.203)$$

Dimensionarea. Dimensionarea constă în determinarea caracteristicilor geometrice ale unei secţiuni astfel încît $\tau_{max} < \tau_a$. Dimensiunile secţiunii se aleg pe baza modulului de rezistenţă polar necesar

$$W_{0nec} = \frac{M_t}{\tau_a}. \qquad (8.204)$$

Pentru secţiuni circulare, diametrul necesar poate fi explicitat

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16W_{0\,nec}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_a}}. \qquad (8.205)$$

În cazul secţiunilor inelare, intervin doi parametri (D şi d) astfel că pentru rezolvarea problemei, pe criterii economice, se alege raportul D/d. În acest caz rezultă

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi\tau_a(1 - d^4/D^4)}}. \qquad (8.206)$$

Capacitatea portantă. Capacitatea portantă a unei secţiuni constă în stabilirea momentului de torsiune maxim care poate solicita secţiunea

$$M_{t\ cap} = W_0 \tau_a. \tag{8.207}$$

8.6.3. DEFORMAŢIA BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CIRCULARĂ SOLICITATE LA TORSIUNE

Prin deformare, secţiunile transversale ale unei bare solicitate la un moment de torsiune constant se rotesc una faţă de cealaltă. Interesează rotirea relativă a două secţiuni situate la distanţă finită l_{AB} (fig. 8.78, *a*) dacă bara are secţiune constantă şi este solicitată de un moment de torsiune M_t.

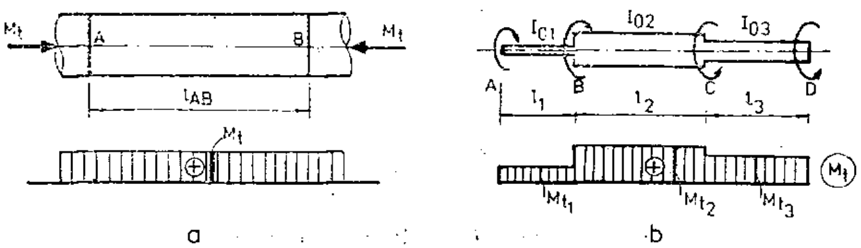


Fig. 8.78.

Din expresia rotirii de torsiune specifică rezultă

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_0} \text{ deci } d\varphi = \frac{M_t}{GI_0} dx. \tag{8.208}$$

Prin integrare, rezultă rotirea relativă între două secţiuni situate la distanţă finită

$$\varphi_{AB} = \int_A^B \frac{M_t}{GI_0} dx. \tag{8.209}$$

Întrucît $M_t = \text{const}$ şi $GI_0 = \text{const}$ pe distanţa dintre cele două secţiuni

$$\varphi_{AB} = \frac{M_t}{GI_0} l_{AB} \tag{8.210}$$

unde GI_0 poartă numele de rigiditate la torsiune.

Dacă o bară dreaptă este alcătuită din mai multe tronsoane cu secţiuni circulare de raze diferite, iar momentul de torsiune variază de la tronson la tronson (fig. 8.78, *b*), rotirea relativă a secţiunilor de la capetele barei se obţine însumînd rotirile relative calculate pe fiecare tronson în parte

$$\varphi_{AD} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = \frac{M_{t1} l_1}{GI_{01}} + \frac{M_{t2} l_2}{GI_{02}} + \frac{M_{t3} l_3}{GI_{03}}. \tag{8.211}$$

8.6.4. TORSIUNEA BARELOR CU SECŢIUNE DREPTUNGHIULARĂ ŞI A BARELOR CU PEREŢI SUBŢIRI CU PROFIL DESCHIS

În cazul barelor cu secţiune diferită de cea circulară, ca efect al solicitării de torsiune apar deplasări normale pe secţiunea transversală care deplanează secţiunea. Se admite că bara este solicitată la torsiune liberă dacă are secţiune constantă, momentul de torsiune M_t este constant pe toată lungimea barei şi nu are legături care să împiedice deformarea barei. În aceste condiţii deplanările sînt aceleaşi în toate secţiunile transversale ale barei, fibrele longitudinale ale barei nu mai rămîn drepte după deformare, dar nu îşi modifică lungimea de la o secţiune la alta. Deci deformaţia specifică longitudinală $\varepsilon_x = 0$ şi în consecinţă $\sigma_x = 0$. În secţiunea transversală a barelor solicitate la torsiune liberă se dezvoltă numai eforturi unitare tangenţiale τ_{xy} şi τ_{xz}. Determinarea distribuţiei acestora în secţiunea transversală este dificilă prin procedeele Rezistenţei materialelor şi, în consecinţă, în continuare se dau numai cîteva indicaţii intuitive asupra formei acestor distribuţii.

Pe suprafaţa laterală a unei bare cu secţiune dreptunghiulară se desenează o reţea rectangulară de repere longitudinale şi transversale (fig. 8.79). Bara solicitată la torsiune liberă se deformează, fapt ce se marchează prin modificarea formei reţelei. Se constată că dreptunghiurile de lîngă muchiile barei rămîn tot dreptunghiuri (lunecarea $\gamma = 0$), în timp ce dreptunghiurile de la mijlocul feţelor laterale devin paralelograme cu oblicitate maximă (lunecarea γ_{max}). Pe baza legii lui Hooke, $\tau = G\gamma$, rezultă că în secţiunea transversală, pe conturul acesteia, se dezvoltă eforturi unitare tangenţiale τ paralele cu conturul secţiunii (fig. 8.80, *a*).

Valoarea maximă a lui τ pe contur are loc la mijlocul laturilor mari ale secţiunii. În interiorul secţiunii se poate admite o distribuţie a eforturilor τ de forma celei prezentate în figura 8.80, *a*.

Dacă se notează cu h latura mare a secţiunii şi cu b latura mică, pentru calculul practic se pot utiliza relaţiile:

— momentul de inerţie la torsiune

$$I_t = \alpha_1 b^3 h; \tag{8.212}$$

— modulul de rezistenţă la torsiune

$$W_t = \alpha b^2 h; \tag{8.213}$$

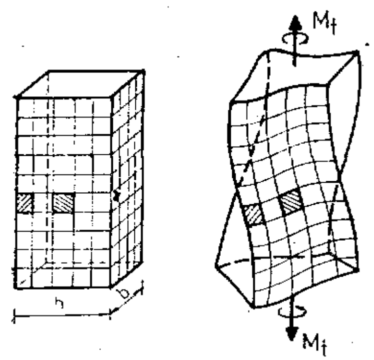


Fig. 8.79.

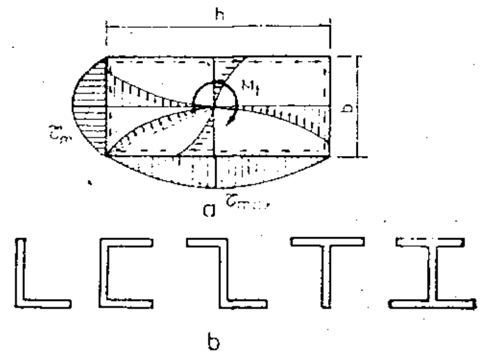


Fig. 8.80.

— τ_{max} la mijlocul laturii mari

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}; \tag{8.214}$$

— τ_m la mijlocul laturii mici

$$\tau_m = \frac{M_t}{\beta b^2 h}; \tag{8.215}$$

— torsiunea specifică

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}. \tag{8.216}$$

Coeficienţii α, β, α_1 depind de raportul h/b al laturilor secţiunii dreptunghiulare şi sînt daţi în tabelul 8.4.

Tabelul 8.4

Coeficienţi pentru calculul secţiunii dreptunghiulare la torsiune

h/b	1,00	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	6,00	8,00	10,00	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,208	0,270	0,290	0,309	0,333	0,354	0,379	0,402	0,414	0,422	0,448
α_1	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Din tabel se constată că pentru secţiuni dreptunghiulare înguste la care $h/b > 10$ se poate admite $\alpha = \alpha_1 = 1/3$ şi

$$W_t = \frac{1}{3} b^2 h; \quad I_t = \frac{1}{3} b^3 h. \tag{8.217}$$

Pentru o secţiune cu pereţi subţiri de tipul celor prezentate în fig. 8.80, *b*, cu profil deschis, se aplică ipoteza că la torsiune liberă secţiunile transversale nu se deformează în planul lor, deci toate elementele secţiunii au aceeaşi rotire specifică θ. Secţiunea transversală se descompune în elemente dreptunghiulare subţiri b_1h_1, $b_2h_2, \ldots, b_nh_n$. Momentul de torsiune M_t se descompune în componentele $M_{1t}, M_{2t} \ldots, M_{nt}$ care revin fiecărui dreptunghi elementar. Exprimînd condiţia ca rotirea specifică să fie aceeaşi pentru fiecare dreptunghi, rezultă

$$\theta = \frac{M_{1t}}{GI_{t_1}} = \frac{M_{2t}}{GI_{t_2}} = \ldots = \frac{M_{nt}}{GI_{tn}} \tag{8.218}$$

de unde:

$$\theta = \frac{M_{1t} + M_{2t} + \ldots + M_{nt}}{G(I_{t_1} + I_{t_2} + \ldots + I_{tn})} = \frac{M_t}{GI_t} \tag{8.219}$$

în care:

$$M_t = \sum_1^n M_{it} \text{ şi } I_t = \sum_1^n I_{it} = \frac{1}{3}\sum_1^n b_i^3 h_i. \tag{8.220}$$

Caracteristica I_t reprezintă momentul de inerţie la torsiune al secţiunii transversale totale.

Efortul unitar tangenţial maxim se dezvoltă la mijlocul dreptunghiului elementar cu b_{max} şi are expresia

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} b_{max}. \tag{8.221}$$

Pentru profile laminate, momentul de inerţie la torsiune se afectează cu un coeficient supraunitar, η, introdus pe bază experimentală, pentru ţine seama de sporul de rigiditate datorită racordărilor profilului

$$I_t = \frac{1}{3}\sum_1^n \eta_i b_i^3 h_i. \tag{8.222}$$

Sînt recomandate următoarele valori pentru acest coeficient: pentru corniere, $\eta = 1{,}00$; pentru profil U şi T, $\eta = 1{,}10$; pentru profil I, $\eta = 1{,}25$.

Aplicaţia 8.20. Să se dimensioneze tija unei chei de strîns tirfoane dacă asupra ei se acţionează cu un cuplu de strîngere (fig. 8.81). De asemenea, să se determine rotirea relativă a secţiunilor de la capetele tijei. Rezistenţa admisibilă la torsiune este $\tau_a = 900$ daN/cm², iar modulul de elasticitate transversal $G = 810\,000$ daN/cm².

Momentul de torsiune este dat de momentul cuplului

$$M_t = 25 \cdot 40 = 1\,000 \text{ daN}\cdot\text{cm}$$

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1\,000}{3{,}14 \cdot 900}} = 1{,}782 \text{ cm}.$$

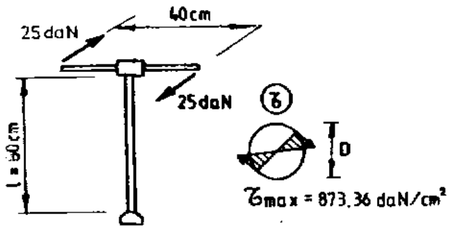


Fig. 8.81.

Se alege $D = 18$ mm.

Verificarea secţiunii alese

$$W_0 = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}8^3}{16} = 1{,}145 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{ef\,max} = \frac{M_t}{W_0} = \frac{1\,000}{1{,}145} = 873{,}36 \text{ daN/cm}^2 < \tau_a = 900 \text{ daN/cm}^2.$$

Rotirea relativă a secţiunilor de capăt ale tijei

$$\varphi_{rel} = \frac{M_t l}{GI_0}; \quad I_0 = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}8^4}{32} = 1{,}0306 \text{ cm}^4$$

$$\varphi_{rel} = \frac{1\,000 \cdot 80}{810\,000 \cdot 1{,}0306} = 0{,}0958 \text{ rad}.$$

Aplicaţia 8.21. Să se verifice bara cu secţiune tubulară din fig. 8.82, *a* şi să se determine rotirea capătului barei ($\tau_a = 700$ daN/cm²; $G = 810\,000$ daN/cm²).

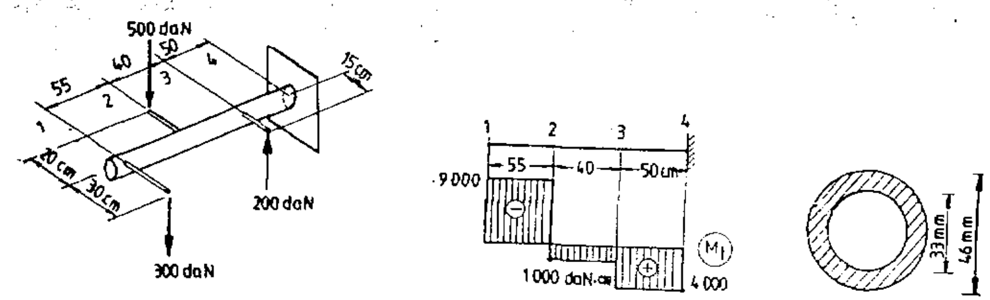


Fig. 8.82.

Secțiunea periculoasă este cea corespunzătoare momentului de torsiune maxim

$$\tau_{ef\,max} = \frac{M_{t\,max}}{W_0} = \frac{9\,000}{14{,}05} = 640{,}6\ \text{daN/cm}^2 < \tau_a = 700\ \text{daN/cm}^2$$

$$W_0 = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \frac{3{,}14\cdot 4{,}6^3}{16}\left(1 - \frac{3{,}3^4}{4{,}6^4}\right) = 14{,}05\ \text{cm}^3$$

$$I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{3{,}14}{32}(4{,}6^4 - 3{,}3^4) = 32{,}31\ \text{cm}^4.$$

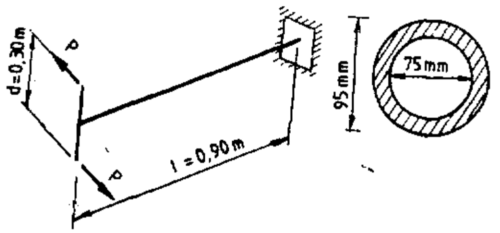
Rotirea secțiunii de capăt se obține prin sumarea rotirilor calculate pe fiecare tronson în parte

$$\varphi_1 = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{34} = -\frac{M_{t_{12}} l_{12}}{GI_0} + \frac{M_{t_{23}} l_{23}}{GI_0} + \frac{M_{t_{34}} l_{34}}{GI_0}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{810\,000\cdot 32{,}31}(-9\,000\cdot 55 + 1\,000\cdot 40 + 4\,000\cdot 50) = -0{,}00974\ \text{rad}.$$

Aplicația 8.22. Să se determine mărimea forțelor P care pot solicita bara tubulară din fig. 8.83 ($\tau_a = 900$ daN/cm²).

Fig. 8.83.



Momentul de torsiune efectiv constant pe lungimea barei este

$$M_{t\,ef} = Pd = 0{,}3P[\text{kN}\cdot\text{m}].$$

Momentul de torsiune capabil

$$M_{t\,cap} = W_0\tau_a = 102{,}95\cdot 900 = 92\,655\ \text{daN}\cdot\text{cm} = 9{,}265\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$W_0 = \frac{3{,}14\cdot 9{,}5^3}{16}\left(1 - \frac{7{,}5^4}{9{,}5^4}\right) = 102{,}95\ \text{cm}^3.$$

Valoarea maximă a forțelor P se determină din condiția

$$M_{t\,ef} = M_{t\,cap};\quad 9{,}265 = 0{,}3\,P;\quad P_{cap} = 30{,}88\ \text{kN}.$$

9. Solicitări compuse

Sub denumirea convențională de solicitări compuse se vor înțelege atît solicitările în care, pe baza suprapunerii liniare a efectelor, se analizează distribuțiile eforturilor unitare σ sau τ din diferite combinații de solicitări simple, cît și solicitările care conduc în diferite puncte din secțiunea transversală la existența concomitentă a eforturilor unitare σ și τ.

9.1. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE OBLICĂ

Secțiunea transversală a unui element de construcție este solicitată la *încovoiere oblică* dacă *în* centrul de greutate al secțiunii, torsorul de reducere al forțelor exterioare este reprezentat de un vector moment încovoietor a cărui direcție nu coincide cu una din axele de inerție principale ale secțiunii (fig. 9.1).

Întrucît vectorul moment încovoietor M_i poate fi *descompus în două componente raportate* la axele de inerție principale ale secțiunii transversale, solicitarea de încovoiere oblică este o solicitare compusă din punctul de vedere al clasificării adoptate în cap. 8.

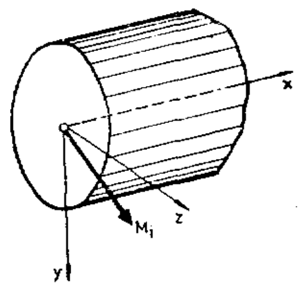


Fig. 9.1.

Situațiile de încărcare care conduc la solicitarea de încovoiere oblică sînt:

1) Un sistem de forțe exterioare situat într-un plan care conține axa barei Ox dar nu coincide cu unul din planurile principale de inerție (fig. 9.2, *a*). În acest caz, vectorul moment încovoietor M_i este perpendicular pe planul forțelor, iar direcția sa este diferită de cea a axelor de inerție principale, Oy sau Oz. Momentul încovoietor M_i

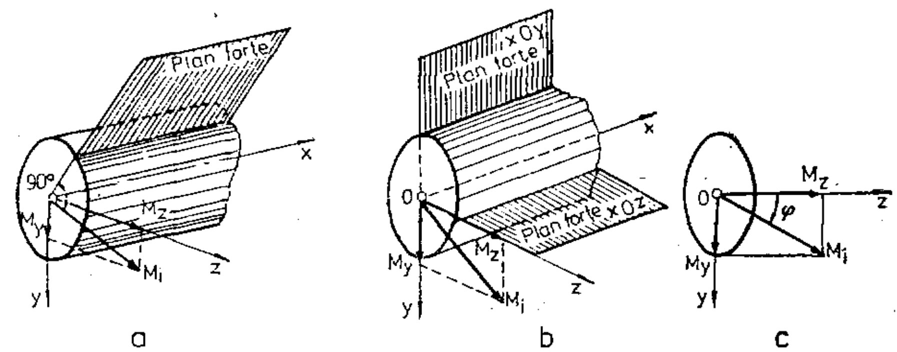


Fig. 9.2.

poate fi descompus în componentele M_y și M_z după axele de inerție centrale și principale ale secțiunii

$$M_y = M_i \sin \varphi ; \qquad M_z = M_i \cos \varphi. \tag{9.1}$$

2) Două sisteme de forțe cuprinse în planurile principale de inerție (fig. 9.2, *b*). Din încărcările situate în planul xOy se obține momentul încovoietor M_z iar din cele situate în planul xOz se obține componenta M_y. Cele două componente pot fi compuse obținîndu-se vectorul moment M_i

$$M_i = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \tag{9.2}$$

În ambele cazuri de încărcare secțiunea transversală este solicitată în același mod — cîte un vector încovoietor pe fiecare din cele două axe principale de inerție (M_y și M_z).

9.1.1. RELAȚIA DINTRE EFORTURILE UNITARE ȘI EFORTURILE SECȚIONALE

Relația dintre efortul secțional M_i și eforturile unitare conține doi termeni : unul dintre ei reprezintă solicitarea secțiunii la încovoiere pură produsă de M_y, iar celălalt solicitarea secțiunii la încovoiere pură produsă de M_z. În consecință, pe secțiunea transversală se vor dezvolta numai eforturi unitare normale σ_x, iar variația acestora poate fi analizată prin suprapunerea în orice punct a efectelor parțiale

$$\sigma_x = \sigma_x^{M_y} + \sigma_x^{M_z}. \tag{9.3}$$

Pentru un punct k din secțiunea transversală (fig. 9.3, *a*) conform formulei lui Navier se obține

$$\sigma_{x(k)}^{M_z} = \frac{M_z}{I_z} y_k ; \qquad \sigma_{x(k)}^{M_y} = -\frac{M_y}{I_y} z_k \tag{9.4}$$

unde semnele eforturilor unitare au fost stabilite pe baza diagramelor de eforturi unitare σ_x.

Suprapunînd efectele parțiale

$$\sigma_{x(k)} = \frac{M_z}{I_z} y_k - \frac{M_y}{I_y} z_k. \tag{9.5}$$

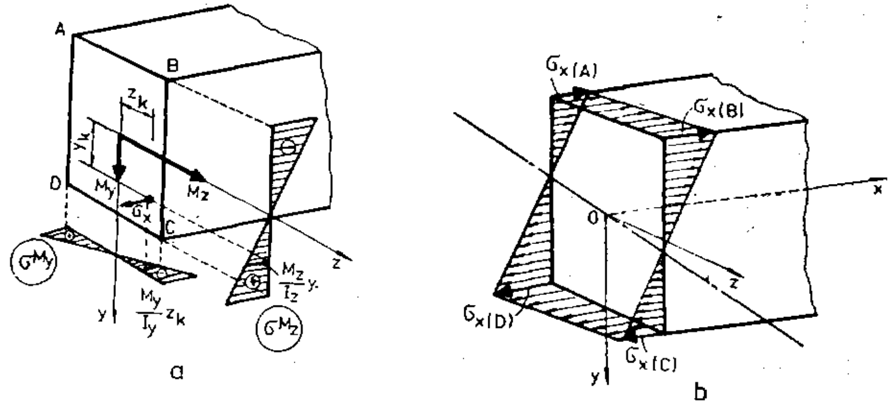


Fig. 9.3.

Este recomandabil ca pentru stabilirea efortului unitar σ_x într-un punct de pe secțiunea transversală, eforturile secționale (M_y și M_z) și coordonatele punctului (y și z) să se introducă în valori absolute, iar semnele termenilor se iau din diagramele σ corespunzătoare. Astfel, expresia efortului unitar σ_x poate fi scrisă sub forma generală

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z. \tag{9.6}$$

Eforturile unitare σ_x maxime se obțin în punctele în care cele două efecte au valorile absolute cele mai mari și sînt de același semn (fig. 9.3, *b*)

$$\sigma_{x\,max}^{+} = \sigma_{x(D)} = \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D \tag{9.7}$$

$$\sigma_{x\,max}^{-} = \sigma_{x(B)} = -\frac{M_z}{I_z} y_B - \frac{M_y}{I_y} z_B. \tag{9.8}$$

9.1.2. AXA NEUTRĂ

Axa neutră este locul geometric al punctelor de pe secțiunea transversală pentru care $\varepsilon_x = 0$ deci eforturile unitare normale $\sigma_x = 0$. În convenția de semn din fig. 9.4 se consideră un punct de coordonate (y, z) aparținînd axei neutre, deci $\sigma_x = 0$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0. \tag{9.9}$$

Relația (9.9) reprezintă ecuația unei drepte care trece prin originea sistemului de axe, deci axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale. Notînd cu α unghiul dintre axa neutră și axa principală de maxim O_z se obține

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z} \frac{I_z}{I_y}, \tag{9.10}$$

Dar $M_y/M_z = \operatorname{tg} \varphi$, unde φ este unghiul dintre M_i și axa principală de maxim O_z, deci :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{I_z}{I_k}. \tag{9.11}$$

Relația (9.11) arată că în cazul general $I_z \neq I_y$, axa neutră nu coincide cu vectorul moment încovoietor. Dacă axa Oz este axă principală de maxim, $I_z > I_y$ și $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi$, iar dacă axa Oy este axă principală de maxim, $I_y > I_z$ și $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi$. Rezultă că axa neutră se găsește în același cadran cu vectorul moment încovoietor M_i și are o poziție între suportul vectorului M_i și axa centrală principală de minim.

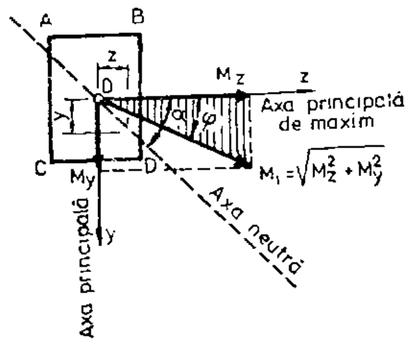


Fig. 9.4.

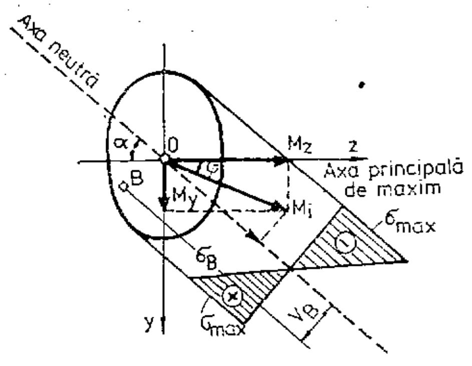


Fig. 9.5.

Punctele cele mai depărtate de axa neutră, obținute prin tangente la conturul secțiunii paralele cu axa neutră, sînt puncte în care σ_x are valori maxime (fig. 9.5).

9.1.3. ASPECTE DE CALCUL

Verificarea. Verificarea presupune stabilirea secțiunii transversale pentru care combinația de momente încovoietoare M_y și M_z este cea mai defavorabilă, trasarea diagramei σ_x față de axa neutră, calculul valorii $\sigma_{x\,max}$ și compararea cu σ_a. Calculul valorii $\sigma_{x\,max}$ se face fie folosind suprapunerea efectelor cu ajutorul diagramelor σ_x față de axele principale de inerție, fie diagrama σ_x față de axa neutră. Pentru secțiuni la care axele principale sînt și axe de simetrie, relațiile de verificare sînt

$$\sigma^{+}_{ef\,max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_{at}\,; \quad \sigma^{-}_{ef\,max} = -\frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} \leqslant \sigma_{ac}. \tag{9.12}$$

Dimensionarea. Constă în alegerea dimensiunilor unei secțiuni de formă dată, astfel ca efortul unitar normal σ_x în punctul cel mai solicitat de pe secțiune să nu depășească valoarea rezistenței admisibile. Problema are rezolvare directă numai pentru secțiuni cu forme geometrice particulare și cu un raport mediu cunoscut între modulele de rezistență principale. Relația de dimensionare în acest caz este

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \sigma_a \tag{9.13}$$

unde necunoscute sînt mărimile W_z și W_y. Dacă se cunoaște anticipat raportul $k = W_z/W_y$, relația de dimensionare devine

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{kM_y}{W_z} = \sigma_a \tag{9.14}$$

de unde:

$$W_{z\,nec} = \frac{M_z + kM_y}{\sigma_a}. \tag{9.15}$$

După dimensionare este obligatorie verificarea secțiunii alese întrucît valoarea lui k utilizată a fost o valoare medie informativă. Formula (9.15) este aplicabilă numai cînd secțiunea se poate înscrie într-un dreptunghi iar colțurile acestuia aparțin efectiv secțiunii.

La secțiunile dreptunghiulare raportul k poate fi ales de la început pe baza raportului h/b al laturilor. Informativ, pentru secțiuni din oțel laminat tip U, $k_{med} = 4{,}2\ldots7{,}5$, iar pentru secțiuni tip I, $k_{med} = 7{,}3\ldots9{,}4$.

În cazul secțiunilor cu forme arbitrare la care raportul k nu este cunoscut, problema dimensionării se rezolvă prin alegeri succesive de secțiuni și verificarea acestora pînă la îndeplinirea condiției

$$\sigma_{max} \leqslant \sigma_a. \tag{9.16}$$

Capacitatea portantă. Constă în stabilirea valorii momentului încovoietor capabil M_i pe o direcție dată, pentru o secțiune cu dimensiuni și caracteristici de material cunoscute. Condiția de determinare a lui $M_{i\,cap}$ este ca în punctul cel mai solicitat de pe secțiune $\sigma_{max} = \sigma_a$. Pentru secțiuni de formă particulară la care se cunoaște poziția în secțiune a punctului cel mai solicitat se poate stabili o formulă de calcul (secțiuni inscriptibile într-un dreptunghi).

Astfel, pe baza relației (9.13) și a expresiilor componentelor

$$M_y = M_i \sin\varphi \text{ și } M_z = M_i \cos\varphi \tag{9.17}$$

se poate scrie

$$M_i\left(\frac{\cos\varphi}{W_z} + \frac{\sin\varphi}{W_y}\right) = \sigma_a \tag{9.18}$$

de unde:

$$M_{i\,cap} = \frac{\sigma_a}{\dfrac{\cos\varphi}{W_z} + \dfrac{\sin\varphi}{W_y}}. \tag{9.19}$$

Aplicația 9.1. Să se verifice grinda simplu rezemată din fig. 9.6, *a* confecționată din oțel laminat profil I40. Rezistența admisibilă la încovoiere se consideră $\sigma_a = 1\,500$ daN/cm².

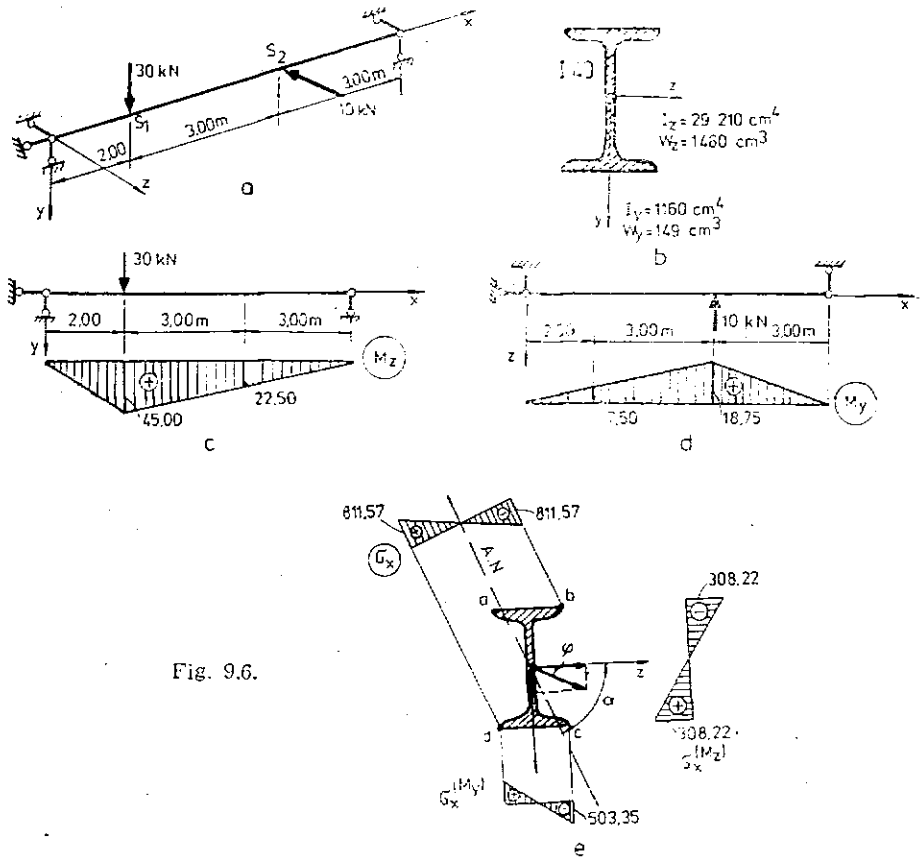


Fig. 9.6.

Diagramele de momente încovoietoare produse de cele două sisteme de forțe exterioare independente, ce acționează în cele două plane principale de inerție sînt prezentate în fig. 9.6, *c* și *d*.

Secțiunea periculoasă se va găsi între secțiunile S_1 ($M_{z\,max} = 45{,}0$ kN·m, $M_y = 7{,}5$ kN·m) și S_2 ($M_z = 22{,}5$ kN·m, $M_{y\,max} = 18{,}75$ kN·m). Se va analiza pe rînd situația fiecărei secțiuni.

1) Secțiunea S_1 ($M_{z\,max} = 45{,}0$ kN·m ; $M_y = 7{,}5$ kN·m).

Pe baza diagramelor σ_x din componentele M_z și M_y rezultă că punctele cele mai solicitate sînt *b*, respectiv *d* (fig. 9.6, *e*).

$$\sigma^+_{max} = \sigma^-_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{45\cdot10^4}{1\,460} + \frac{7{,}5\cdot10^4}{149} =$$

$$= 811{,}57 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,500 \text{ daN/cm}^2.$$

Poziția axei neutre față de axa Oz este

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi\frac{I_z}{I_y} \text{ unde } \operatorname{tg}\varphi = \frac{M_y}{M_z} = \frac{7{,}5}{45} = 0{,}167\,;\ \varphi = 9°27'44''$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}167\frac{29\,210}{1\,160} = 4{,}197\,;\ \alpha = 76°35'51''.$$

Diagrama σ_x față de axa neutră este prezentată în fig. 9.6, *e*.

2) Secțiunea S_2 ($M_z = 22{,}50$ kN·m, $M_{y\,max} = 18{,}75$ kN·m).

Întrucît componentele M_z și M_y au același semn cu cele din secțiunea S_1, rezultă că punctele cele mai solicitate sînt tot *b* și *d*

$$\sigma^+_{max} = \sigma^-_{max} = \frac{22{,}5\cdot10^4}{1\,460} + \frac{18{,}75\cdot10^4}{149} = 1\,412{,}5 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,500 \text{ daN/cm}^2.$$

Secțiunea S_2 este secțiune periculoasă întrucît în această secțiune combinația M_z, M_y conduce la cel mai mare efort unitar σ_x.

Aplicația 9.2. Să se dimensioneze pana de acoperiș notată cu *G* în fig. 9.7, *a*. Pana este confecționată din lemn de brad, cu secțiune de formă dreptunghiulară (fig. 9.7, *b*) și rezistență admisibilă $\sigma_a = 100$ daN/cm².

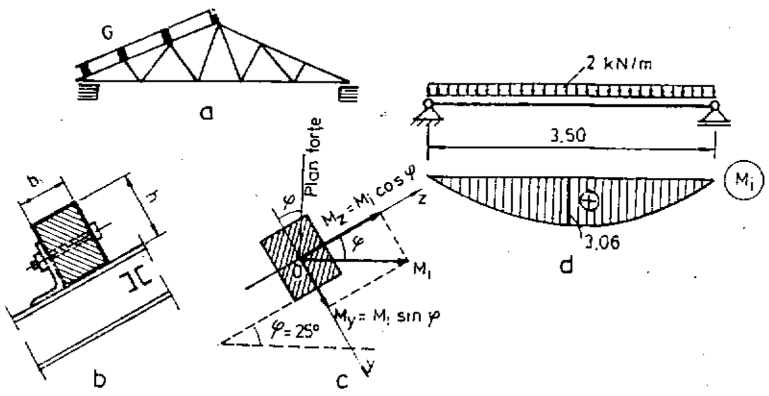


Fig. 9.7.

Între două ferme pana se consideră simplu rezemată, încărcată cu o forță uniform distribuită gravitațională. Diagrama de momente încovoietoare este prezentată în fig. 9.7, *d*. Secțiunea periculoasă este cea corespunzătoare momentului încovoietor maxim $M_i = 3{,}06$ kN·m.

Deoarece planul forțelor nu conține nici una din axele principale de inerție ale secțiunii transversale, vectorul moment încovoietor va fi descompus în componente după axele principale (fig. 9.7, *c*)

$$M_{i\,max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{2\cdot3{,}5^2}{8} = 3{,}06 \text{ kN·m}$$

$$M_{z\,max} = M_{i\,max}\cos\varphi = 3{,}06\cdot\cos 25° = 2{,}77 \text{ kN·m}$$

$$M_{y\,max} = M_{i\,max}\sin\varphi = 3{,}06\cdot\sin 25° = 1{,}29 \text{ kN·m}.$$

Pentru secțiuni dreptunghiulare $k = W_z/W_y = h/b$. Alegînd raportul laturilor $h/b = 1{,}5$ rezultă $k = 1{,}5$.

$$W_{z\,nec} = \frac{M_z + kM_y}{\sigma_a} = \frac{2{,}77\cdot10^4 + 1{,}5\cdot1{,}29\cdot10^4}{100} = 470{,}5 \text{ cm}^3.$$

Se alege secțiunea cu dimensiunile $h = 16$ cm și $b = 11$ cm cu

$$W_{zef} = \frac{bh^2}{6} = \frac{11\cdot16^2}{6} = 469{,}33 \text{ cm}^3\,;\quad W_{yef} = \frac{b^2h}{6} = \frac{11^2\cdot16}{6} = 322{,}67 \text{ cm}^3$$

Verificarea secțiunii adoptate

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{2{,}77\cdot10^4}{469{,}33} + \frac{1{,}29\cdot10^4}{322{,}67} = 99{,}00 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a =$$

$$= 100 \text{ daN/cm}^2.$$

Aplicația 9.3. Un stîlp confecționat din două profile laminate tip U26 este solicitat de două sisteme de forțe (fig. 9.8, *a*). Să se determine valoarea forței concentrate *P* care poate acționa asupra stîlpului după direcția axei *Oy*. Rezistența admisibilă este $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

Diagramele de momente încovoietoare datorate încărcării distribuite și respectiv încărcării concentrate sînt prezentate în fig. 9.8, *b*. Secțiunea periculoasă este cea corespunzătoare încastrării deoarece atît M_y cît și M_z au valori maxime

$$M_y = 20 \text{ kN·m}\,;\ M_z = 4P \text{ kN·m}.$$

Încărcarea concentrată *P* se va determina din condiția ca în punctul cel mai solicitat din secțiunea periculoasă $\sigma_{max} = \sigma_a$. Pe baza diagramelor de eforturi unitare σ_x (fig. 9.8, *c*) rezultă că punctul *b*, respectiv *d* sînt cele mai solicitate. Deci :

$$\sigma^+_{max} = \sigma^-_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \sigma_a.$$

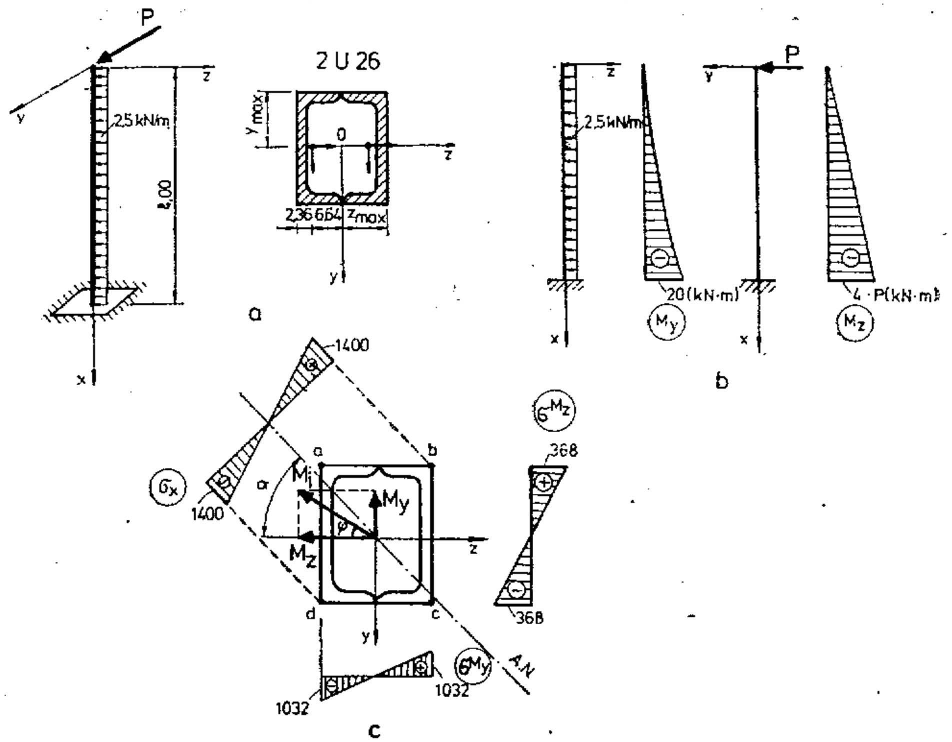


Fig. 9.8.

Din tabele pentru profilul U26 rezultă $I_{z1} = 4\,820$ cm^4, $I_{y1} = 317$ cm^4, $A = 48{,}3$ cm^2, deci caracteristicile geometrice ale secțiunii totale sînt :

$$I_z = 2I_{z1} = 2\cdot 4\,820 = 9\,640 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2(I_{y1} + A\cdot 6{,}64^2) = 2(317 + 48{,}3\cdot 6{,}64^2) = 4\,893 \text{ cm}^4,$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{9\,640}{13{,}0} = 741{,}54 \text{ cm}^3; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = 543{,}67 \text{ cm}^3.$$

Din relația

$$\frac{4P\cdot 10^2}{741{,}54} + \frac{20\cdot 10^4}{543{,}67} = 1\,400$$

se determină valoarea încărcării $P = 1\,913$ daN $= 19{,}13$ kN.

Cu valoarea P obținută, momentul încovoietor M_z este

$$M_z = 19{,}13\cdot 4 = 76{,}52 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Pentru stabilirea poziției axei neutre se determină unghiul pe care acesta îl face cu axa de maxim Oz

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi \frac{I_z}{I_y} = 0{,}261\,\frac{9\,640}{4\,893} = 0{,}514\,; \quad \alpha = 27°13'37''$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_y}{M_z} = \frac{20}{76{,}52} = 0{,}261\,; \quad \varphi = 14°38'51''.$$

Diagrama σ față de axa neutră în secțiunea periculoasă este prezentată în fig. 9.8, c.

9.2. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE CU FORȚA AXIALĂ

Secțiunea transversală a unui element de construcție este solicitată la încovoiere cu forță axială, dacă torsorul de reducere al forțelor exterioare este reprezentat fie de o forță axială și un vector moment încovoietor în centrul de greutate al secțiunii (fig. 9.9, a), fie de o forță normală pe secțiunea transversală și excentrică față de centrul de greutate al acesteia (fig. 9.9, b).

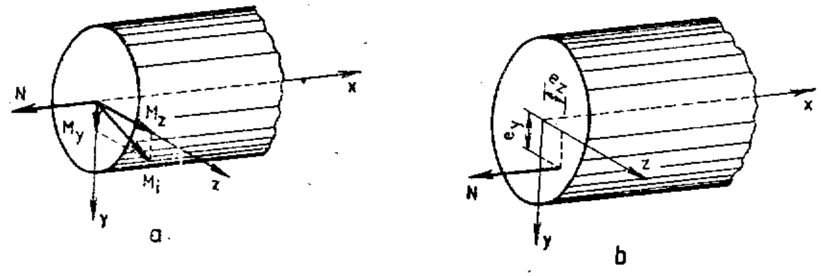


Fig. 9.9.

Pe baza relațiilor de echivalență statică se poate trece de la o situație la cealaltă a aceleiași tip de solicitare :

a) acțiunea simultană a eforturilor N, M_y, M_z este echivalentă cu acțiunea unei forțe N paralelă cu axa barei și excentrică față de centrul de greutate al secțiunii transversale cu excentricitățile

$$e_y = \frac{M_z}{N}; \quad e_z = -\frac{M_y}{N}; \tag{9.20}$$

b) forța normală N, excentrică față de centrul de greutate al secțiunii, se poate reduce față de acest punct la o forță axială N și două momente încovoietoare

$$M_z = Ne_y\,; \; M_y = -Ne_z. \tag{9.21}$$

În fig. 9.10 sînt prezentate cîteva exemple de elemente de construcție care sînt solicitate la încovoiere cu forță axială.

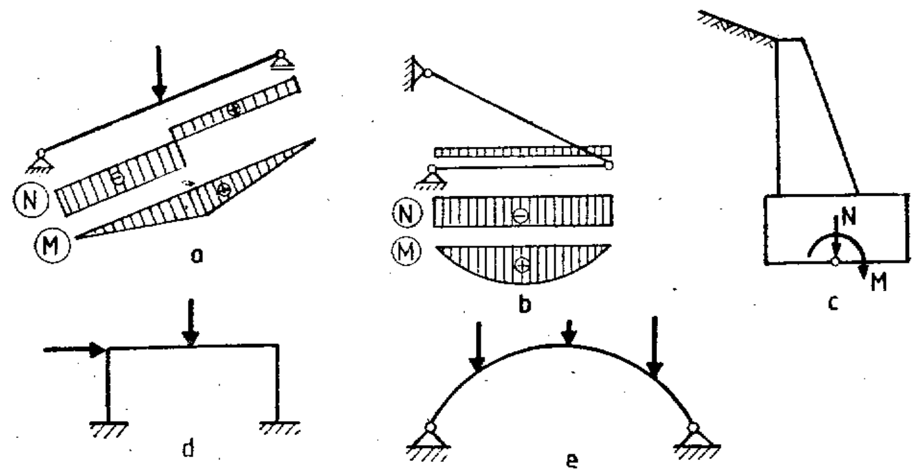


Fig. 9.10.

9.2.1. RELAȚIA DINTRE EFORTURILE UNITARE ȘI EFORTURILE SECȚIONALE

Ținînd seama că atît efortul axial N cît și momentul încovoietor M_t produc eforturi unitare de aceeași natură și direcție, expresia efortului unitar normal într-un punct de pe secțiunea transversală se obține adunînd algebric efectele produse de fiecare efort secțional în parte

$$\sigma_{x(k)} = \sigma^{N}_{x(k)} + \sigma^{M_y}_{x(k)} + \sigma^{M_z}_{x(k)} \tag{9.22}$$

dar efortul unitar normal în punctul k produs de fiecare efort secțional considerat pozitiv (fig. 9.11) este

$$\sigma^{N}_{x(k)} = \frac{N}{A}; \quad \sigma^{M_y}_{x(k)} = -\frac{M_y}{I_y} z_k; \quad \sigma^{M_z}_{x(k)} = \frac{M_z}{I_z} y_k. \tag{9.23}$$

Suprapunînd efectele rezultă

$$\sigma_{x(k)} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_k + \frac{M_z}{I_z} y_k. \tag{9.24}$$

Este recomandabil ca pentru stabilirea expresiei efortului unitar σ_x într-un punct al secțiunii transversale, eforturile secționale (N, M_y, M_z) și coordonatele punctului (y și z) să se introducă în valoare absolută, iar semnele termenilor se iau din diagramele σ_x corespunzătoare (fig. 9.11). Astfel, expresia lui σ_x poate fi scrisă sub forma generală

$$\sigma_x = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y. \tag{9.25}$$

Dacă se ține seama de relațiile

$$I_z = A i_z^2; \quad I_y = A i_y^2 \tag{9.26}$$

unde i_z și i_y sînt raze de inerție (girație), se înlocuiesc parametrii solicitării N, M_y, M_z cu parametrii echivalenți N, e_y, e_z și ținînd seama de relațiile (9.21), expresia efortului unitar σ_x într-un punct k se poate scrie sub forma

$$\sigma_{x(k)} = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_y}{i_z^2} y\right) \tag{9.27}$$

sau, în general

$$\sigma_x = \frac{N}{A}\left(\pm 1 \pm \frac{e_z}{i_y^2} z \pm \frac{e_y}{i_z^2} y\right). \tag{9.28}$$

Efortul unitar σ_x maxim se obține în punctul în care cele trei efecte au valorile absolute cele mai mari și sînt de același semn. Pentru cazul secțiunii din fig. 9.11, σ_x maxim se obține în punctul d

$$\sigma_{max} = \sigma_d = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}. \tag{9.29}$$

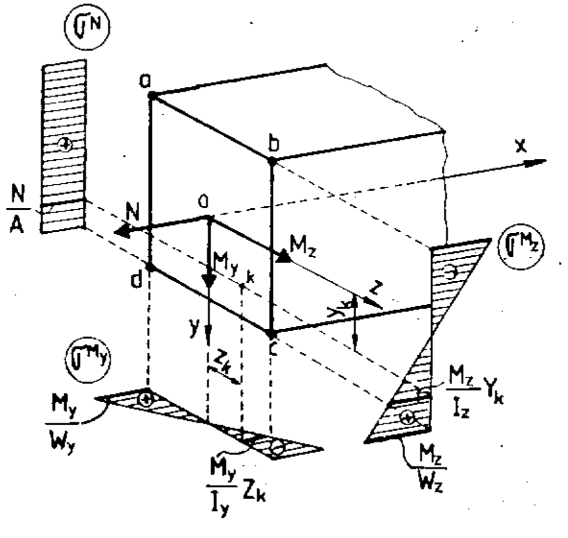


Fig. 9.11.

9.2.2. AXA NEUTRĂ

Se consideră un punct al axei neutre de coordonate y și z. Din condiția $\sigma_x = 0$ în punctul considerat se obține ecuația axei neutre. Pentru $N \neq 0$ în relația (9.27) rezultă

$$\frac{e_z}{i_y^2} z + \frac{e_y}{i_z^2} y + 1 = 0. \tag{9.30}$$

Din relația (9.30) rezultă că ecuația axei neutre este o dreaptă care nu trece prin originea sistemului de axe (centrul de greutate al secțiunii), iar poziția ei nu depinde de sensul forței axiale. Tăieturile axei neutre pe axele Oz și Oy (fig. 9.12. a) sînt:

$$y_A = 0; \quad z_A = -\frac{i_y^2}{e_z} \tag{9.31}$$

$$z_B = 0; \quad y_B = -\frac{i_z^2}{e_y}. \tag{9.32}$$

Din relațiile (9.31) și (9.32) rezultă că axa neutră intersectează axele centrale și principale de inerție în cadranul opus aceluia în care se găsește forța normală excentrică N.

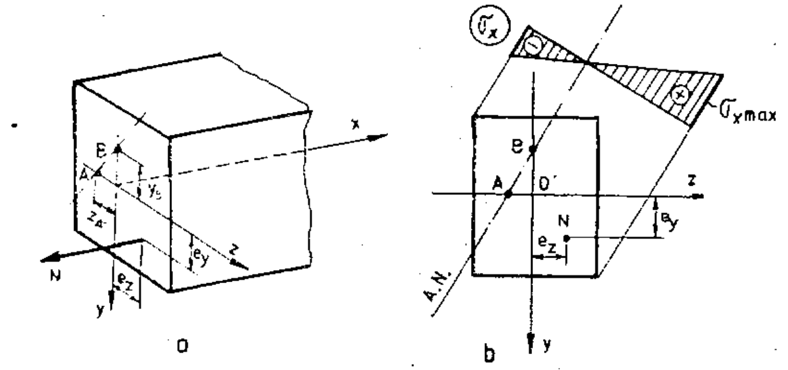


Fig. 9.12.

Punctele cele mai solicitate din secțiune sînt cele mai depărtate de axa neutră, obținute prin tangente la conturul secțiunii transversale paralele cu axa neutră (fig. 9.12, b).

Proprietăți ale axei neutre. Proprietățile axei neutre sînt următoarele:

a) poziția axei neutre nu depinde de mărimea forței normale excentrice N, ci numai de poziția punctului de aplicație al acesteia și de caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale;

b) dacă punctul de aplicație al forței normale excentrice N se deplasează pe o dreaptă ce trece prin centrul de greutate al secțiunii (fig. 9.13, a), axa neutră se deplasează paralel cu ea însăși și anume, cînd punctul de aplicație se apropie de centrul de greutate, axa neutră se depărtează de acesta.

c) dacă punctul de aplicație al forței normale excentrice N se deplasează pe o dreaptă oarecare (fig. 9.13, b), axa neutră se rotește în jurul unui punct fix C, care este punctul de aplicație al forței normale N pentru dreapta P_1P_4 considerată ca axă neutră.

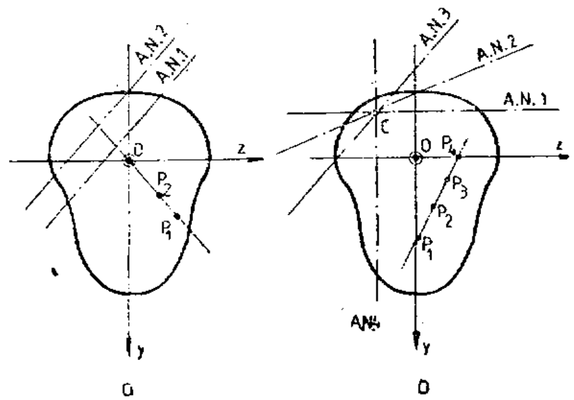


Fig. 9.13.

9.2.3. ASPECTE DE CALCUL

Verificarea. Verificarea constă în determinarea efortului unitar normal maxim și compararea acestuia cu rezistența admisibilă. În cazul secțiunilor dreptunghiulare sau care pot fi înscrise într-un dreptunghi ale cărui colțuri aparțin secțiunii, punctele cele mai solicitate coincid cu colțurile dreptunghiului. Pentru acest tip de secțiune relația de verificare este

$$\sigma_{ef\ max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leqslant \sigma_a. \tag{9.33}$$

Dimensionarea. Constă în alegerea formei și dimensiunilor secțiunii transversale astfel ca efortul unitar normal σ_x în punctul cel mai solicitat de pe secțiune să nu depășească valoarea rezistenței admisibile. Avînd în vedere numărul mare de parametri care intervin, în practică se preferă să se efectueze o antedimensionare a secțiunii care se îmbunătățește succesiv pînă se respectă condiția de verificare.

Capacitatea portantă. Constă în stabilirea unor componente ale sistemului de forțe exterioare, din condiția ca în punctul cel mai solicitat al unei secțiuni date și caracteristici de material cunoscute, efortul unitar normal maxim să fie egal cu rezistența admisibilă.

9.2.4. SÎMBURELE CENTRAL AL UNEI SECȚIUNI

Solicitarea de încovoiere cu forță axială conduce la deplasarea axei neutre funcție de poziția forței normale excentrice N. Rezultă că diagrama eforturilor unitare normale poate prezenta diferite forme după cum axa neutră taie secțiunea transversală (fig. 9.14, *a*), este tangentă la aceasta (fig. 9.14, *b*) sau nu intersectează secțiunea (fig. 9.14, *c*). Fiecărei poziții a axei neutre îi corespunde un punct de aplicație al forței normale excentrice N.

Poziția axei neutre are o importanță deosebită pentru materialele care se comportă diferit la solicitarea de întindere și compresiune (beton simplu, piatră, zidărie de cărămidă, pămînt etc.). La astfel de materiale este de dorit ca întreaga secțiune transversală să fie solicitată la compresiune. În aceste

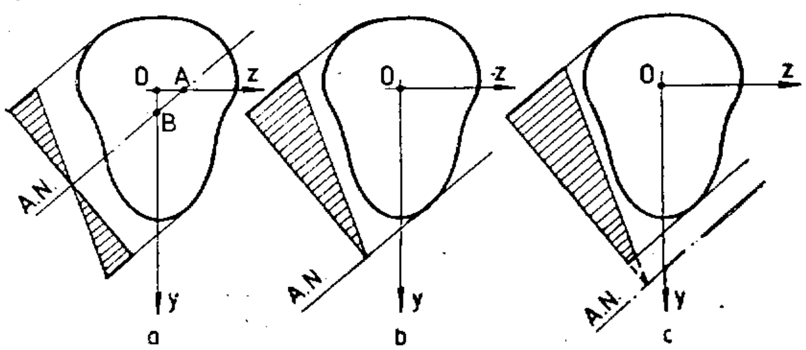


Fig. 9.14.

condiții se pune problema determinării pozițiilor punctului de aplicație al forței normale excentrice N, astfel ca pe secțiunea transversală eforturile unitare σ_x să nu își schimbe semnul.

În zona centrului de greutate al secțiunii transversale există un domeniu, numit sîmbure central al secțiunii, care se bucură de proprietatea că dacă forța normală excentrică are punctul de aplicație în interiorul domeniului, eforturile unitare normale sînt de același semn pe întreaga secțiune (semnul lui N). Conturul sîmburelui central se determină ducînd axe neutre tangente la secțiune, care nu o intersectează, și determinînd pentru fiecare axă poziția forței excentrice corespunzătoare. Sîmburele central are o formă convexă deoarece totalitatea tangentelor care nu taie secțiunea închid un contur convex chiar dacă secțiunea are intrînduri.

Cunoscînd poziția axei neutre (tăieturile), se pot stabili coordonatele punctului de aplicație a forței excentrice

$$e_z = -\frac{i_y^2}{z_A}; \quad e_y = -\frac{i_z^2}{y_B}. \tag{9.34}$$

Punctul de coordonate (e_z, e_y) trebuie astfel amplasat încît să fie opus axei neutre considerate în raport cu centrul de greutate al secțiunii transversale.

În exemplul din fig. 9.15, O este centrul de greutate iar Oz și Oy sînt axele de inerție principale și centrale ale secțiunii transversale.

Pentru axa neutră $AN1$ tangentă la secțiune cu tăieturile z_{A1} și y_{B1} corespunde punctul *1* de aplicație al forței normale N, de coordonate $e_{z1} = -i_y^2/z_{A1}$; $e_{y1} = -i_z^2/y_{B1}$, în cadranul opus tăieturilor. Similar, pentru axa neutră $AN2$ tangentă la secțiune corespunde punctul de aplicație al forței N notat *2*. Conform proprietăților axei neutre, cînd aceasta se rotește în jurul punctului fix C_1 din poziția $AN1$ în poziția $AN2$, punctul de aplicație al forței normale N se deplasează pe dreapta *1—2*. În continuare se determină punctele *3* și *4* corespunzătoare axelor neutre $AN3$ și $AN4$, completîndu-se conturul sîmburelui central cu

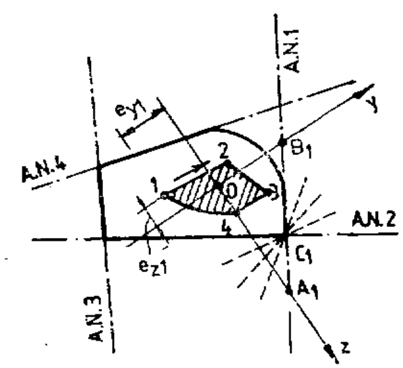


Fig. 9.15.

laturile $2-3$ și $3-4$. Între punctele 4 și 1 conturul sîmburelui central este curb, diferite puncte de pe curbă obținîndu-se ducînd axe neutre tangente la conturul curb al secțiunii, între pozițiile $AN4$ și $AN1$.

În fig. 9.16 sînt prezentate contururile sîmburelui central pentru cîteva secțiuni cu forme geometrice simple.

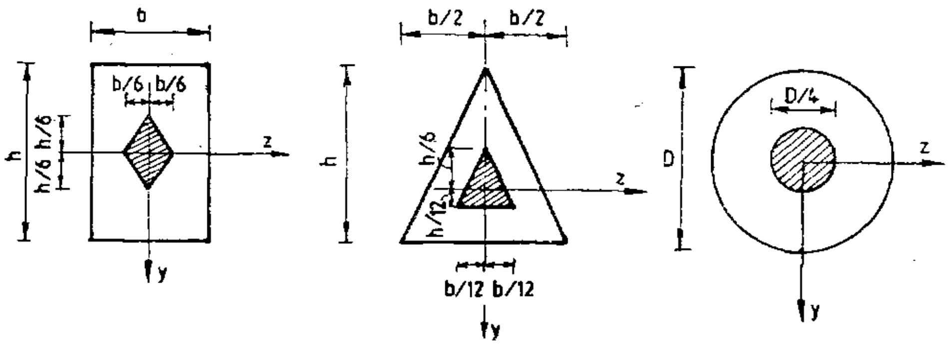


Fig. 9.16.

9.2.5. ZONA ACTIVĂ

În practica curentă a construcțiilor se întîlnesc situații cînd în secțiunea de contact dintre două materiale nu poate fi asigurată preluarea eforturilor unitare normale de întindere. În această categorie intră suprafața de rezemare a fundațiilor pe teren. În alte situații, cum este cazul masivelor de beton simplu, zidărie, piatră naturală etc., rezistența la întindere este așa de redusă, încît în practică este neglijată.

În situațiile arătate mai înainte se urmărește ca forța normală excentrică de compresiune să acționeze în interiorul sîmburelui central al secțiunii transversale, caz în care pe secțiune se dezvoltă numai eforturi unitare normale de compresiune. Dacă forța normală excentrică nu este în interiorul sîmburelui central, dar rămîne în interiorul conturului secțiunii, axa neutră taie secțiunea și o parte a acesteia ar trebui să fie solicitată la întindere, ceea ce este incompatibil cu proprietatea materialului de a nu rezista la întindere. Zona din secțiune care ar fi solicitată la întindere rămîne inactivă, iar echivalența statică în secțiunea transversală trebuie să se realizeze între forța normală excentrică N și eforturile unitare σ_x ce acționează pe o zonă din secțiune, numită zonă activă. Linia care separă zona activă de zona inactivă se numește axă neutră și este deplasată față de situația cînd materialul ar fi capabil să reziste la întindere, ca urmare a redistribuirii eforturilor unitare normale pe secțiunea transversală.

Problema determinării zonei active este dificilă în cazul secțiunilor nesimetrice sau în cazul cînd forța normală excentrică N nu acționează pe o axă de simetrie a secțiunii. De aceea, în continuare se vor analiza două cazuri particulare: secțiune de formă dreptunghiulară și secțiune cu o axă de simetrie, iar forța normală excentrică N acționează pe axa de simetrie.

Secțiune de formă dreptunghiulară. Uzual, secțiunile de rezemare a blocurilor de fundație au formă dreptunghiulară. În cazul zidurilor de sprijin, analiza se efectuează pe tronsoane semnificative pentru care caracteristicile

geometrice ale zidului de sprijin și caracteristicile mecanice ale terenului de fundare sînt aceleași. În mod obișnuit, calculele se efectuează pentru o lungime de 1,00 m a zidului de sprijin.

Sistemul de forțe exterioare care acționează zidul de sprijin sînt greutatea proprie G și împingerea pămîntului E (fig. 9.17). Torsorul de reducere al acestui sistem de forțe în centrul de greutate al secțiunii tălpii fundației poate fi reprezentat de o forță normală N, o forță tangențială H și un moment M. Întrucît componenta H nu produce eforturi unitare normale, în analiză se va considera numai acțiunea lui N și M asupra secțiunii. Acțiunea forței normale N și a momentului M este echivalentă cu acțiunea forței normale excentrice cu excentricitatea (fig. 9.18)

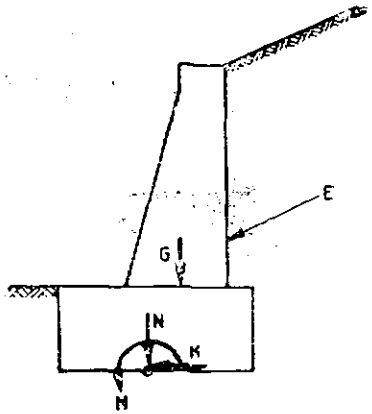


Fig. 9.17.

$$e = \frac{M}{N}. \tag{9.35}$$

Dacă forța normală excentrică se găsește în interiorul sîmburelui central ($e \leqslant h/6$) al secțiunii tălpii fundației (fig. 9.18, b), axa neutră nu taie secțiunea, eforturile unitare normale au același semn pe întreaga secțiune.

Dacă forța normală excentrică este în afara sîmburelui central al secțiunii ($h/2 \geqslant e > h/6$), axa neutră taie secțiunea și întrucît între talpa fundației și teren nu pot exista eforturi unitare de întindere, diagrama σ se modifică (fig. 9.18, c). Rezultanta diagramei σ trebuie să echilibreze forța normală excentrică N. Pentru aceasta, trebuie ca cele două forțe să aibă același suport iar mărimea rezultantei R_σ să fie egală cu mărimea forței N (fig. 9.19).

Din prima condiție rezultă că diagrama σ acționează numai pe o zonă din secțiunea tălpii fundației, și anume pe înălțimea $h_a = 3c$ în care

$$c = \frac{h}{2} - e \tag{9.36}$$

deci zona activă are o arie $A_a = 3bc$.

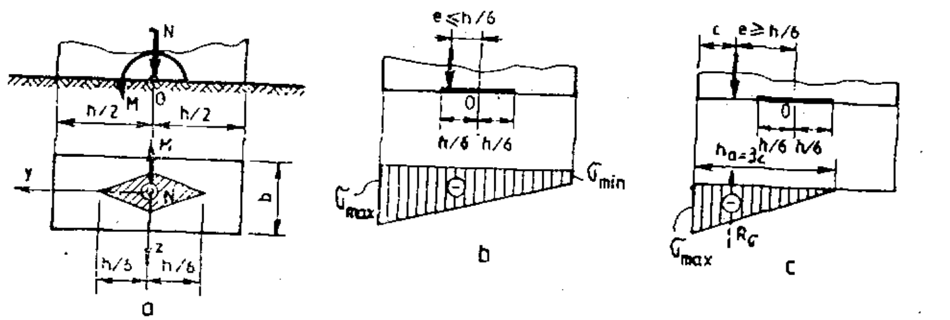


Fig.9.18.

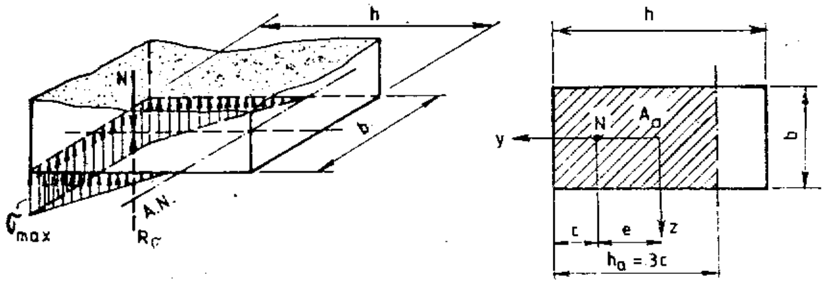


Fig. 9.19.

Din a doua condiție se obține valoarea efortului unitar normal maxim

$$N = R_\sigma\,;\ R_\sigma = \frac{1}{2}\cdot 3bc\,\sigma_{max} \tag{9.37}$$

sau

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3bc} = \frac{2N}{A_a}. \tag{9.38}$$

Secțiune cu o axă de simetrie. Se consideră cazul unei secțiuni cu o axă de simetrie (fig. 9.20), iar forța normală excentrică se aplică pe axa de simetrie în afara sîmburelui central al secțiunii.

Considerînd distribuția eforturilor unitare σ liniară față de axa neutră, efortul unitar într-un punct situat la distanța y de axa neutră are expresia

$$\sigma = \frac{y}{h_a}\,\sigma_{max}. \tag{9.39}$$

Introducînd această expresie în relațiile de echivalență

$$N = \int_{A_a}\sigma\,dA\,;\ Na = \int_{A_a}(\sigma\,dA)y \tag{9.40}$$

rezultă

$$\frac{\sigma_{max}}{h_a}\int_{A_a} y\,dA = N\,;\ \frac{\sigma_{max}}{h_a}\int_{A_a} y^2\,dA = Na. \tag{9.41}$$

Se notează :

$S_n = \int_{A_a} y\,dA$ — momentul static al zonei active față de axa neutră ;

$I_n = \int_{A_a} y^2\,dA$ — momentul de inerție al zonei active față de axa neutră.

Cu aceste notații, relațiile (9.41) se scriu

$$\frac{\sigma_{max}}{h_a}S_n = N\,;\ \frac{\sigma_{max}}{h_a}I_n = Na. \tag{9.42}$$

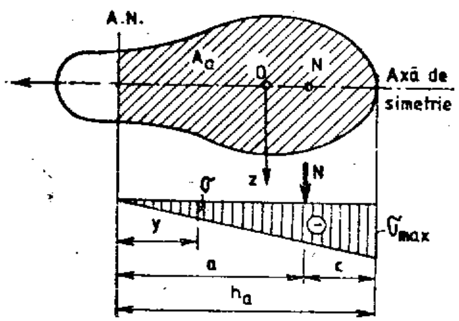


Fig. 9.20.

Eliminînd pe σ_{max} din relațiile (9.42) se obține poziția axei neutre

$$a = I_n/S_n. \tag{9.43}$$

Pentru o secțiune oarecare, determinarea lui a și deci a lui h_a rezultă prin încercări. Se alege o poziție a axei neutre și se verifică dacă este îndeplinită relația (9.43). Se modifică poziția axei neutre pînă cînd această relație este îndeplinită. După precizarea poziției axei neutre se determină σ_{max} din relația (9.42).

$$\sigma_{max} = \frac{N}{S_n}h_a. \tag{9.44}$$

Aplicația 9.4. Să se verifice stîlpul din fig. 9.21 confecționat din oțel laminat I40. Să se traseze în secțiunea periculoasă diagrama σ_x față de axa neutră. Rezistența admisibilă se consideră $\sigma_a = 1\,400$ daN/cm².

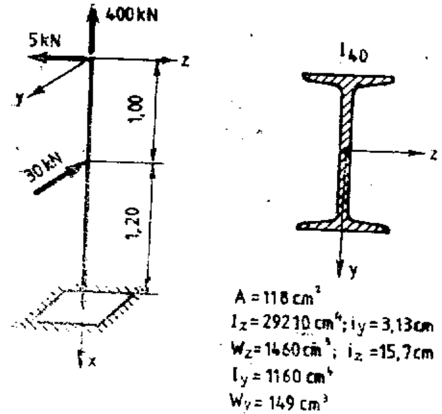


Fig. 9.21.

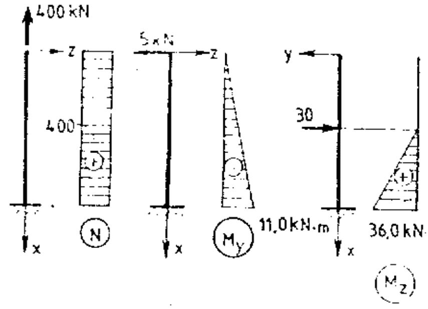


Fig. 9.22.

Diagramele de eforturi produse de acțiunea independentă a fiecărei încărcări sînt prezentate în fig. 9.22. Secțiunea periculoasă este secțiunea de încastrare unde forța axială N și momentele încovoietoare M_y și M_z sînt maxime. Punctul cel mai solicitat din secțiunea periculoasă este c (fig. 9.23).

$$\sigma^{+}_{ef\ max} = \sigma^{c}_{ef} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{400\cdot 10^2}{118} + \frac{11\cdot 10^4}{149} + \frac{36\cdot 10^4}{1\,460} =$$

$$= 1\,323{,}8\ \text{daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400\ \text{daN/cm}^2.$$

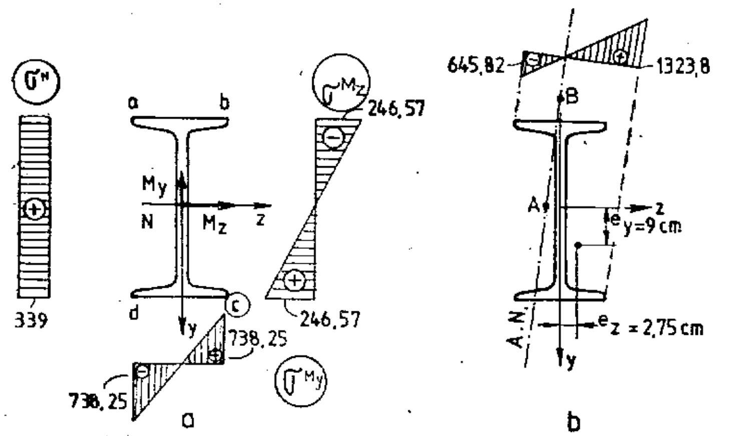


Fig. 9.23.

În vederea stabilirii poziției axei neutre se determină excentricitățile forței normale N

$$e_z = -\frac{M_y}{N} = -\frac{-11{,}00}{400} = 0{,}0275 \text{ m}; \quad e_y = \frac{M_z}{N} = \frac{36{,}00}{400} = 0{,}09 \text{ m}.$$

Tăieturile axei neutre cu sistemul de axe de inerție principal și central sînt:

$$y_A = 0; \; z_A = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{3{,}13^2}{2{,}75} = -3{,}56 \text{ cm}$$

$$z_B = 0; \; y_B = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{15{,}7^2}{9{,}00} = -27{,}38 \text{ cm}.$$

Diagramele σ_x din efectele parțiale sînt prezentate în fig. 9.23, *a*, iar poziția axei neutre și diagrama σ_x în raport cu aceasta în fig. 9.23, *b*.

Aplicația 9.5. Să se dimensioneze grinda din fig. 9.24, *a*, confecționată din lemn de brad cu secțiunea de formă dreptunghiulară ($h/b = 1{,}5$). Rezistența admisibilă este $\sigma_a = 100$ daN/cm².

Diagramele de eforturi datorate încărcării exterioare sînt prezentate în fig. 9.24, *a*. Secțiunea periculoasă este secțiunea de la mijlocul grinzii, la stînga punctului de aplicație al forței concentrate. Dimensionarea se va face în această secțiune unde diagramele de eforturi unitare sînt cele prezentate în fig. 9.24, *b*.

$$\sigma_{max}^- = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = \sigma_a.$$

Dar $N = 18$ kN; $M_z = 30$ kN·m; $A = hb = 1{,}5\, b^2$; $W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{3}{8} b^3$

Deci

$$\frac{18\cdot 10^2}{1{,}5 b^2} + \frac{30\cdot 10^4}{\frac{3}{8} b^3} = 100 \text{ sau } b^3 - 12b - 8\,000 = 0.$$

Soluția ecuației este $b_{nec} = 20{,}2$ cm.

Din considerente constructive se alege $b = 20$ cm și $h = 31$ cm.

Verificarea secțiunii alese conduce la

$$\sigma_{ef\,max}^- = \frac{N}{A_{ef}} + \frac{M_z}{W_{zef}} = \frac{18\cdot 10^2}{620} + \frac{30\cdot 10^4}{3203{,}33} = 96{,}55 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 100 \text{ daN/cm}^2$$

$$A_{ef} = 31\cdot 20 = 620 \text{ cm}^2; \; W_{z\,ef} = \frac{20\cdot 31^2}{6} = 3\,203{,}33 \text{ cm}^3.$$

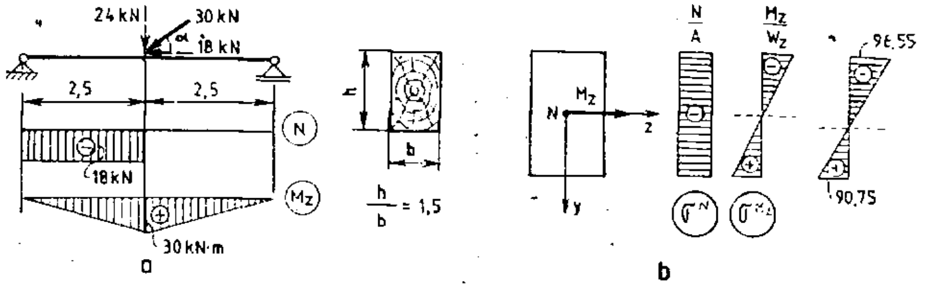


Fig. 9.24.

Diagrama σ_x față de axa neutră în secțiunea periculoasă este prezentată în fig. 9.24, *b*.

Aplicația 9.6. Grinda simplu rezemată de deschidere l și secțiune de formă dreptunghiulară bh este încărcată cu o forță uniform distribuită și este pretensionată cu un cablu rectiliniu așezat la limita inferioară a sîmburelui central al secțiunii (fig. 9.25). Să se determine forța de precomprimare P astfel ca în secțiunea de la mijlocul grinzii să nu apară eforturi unitare de întindere.

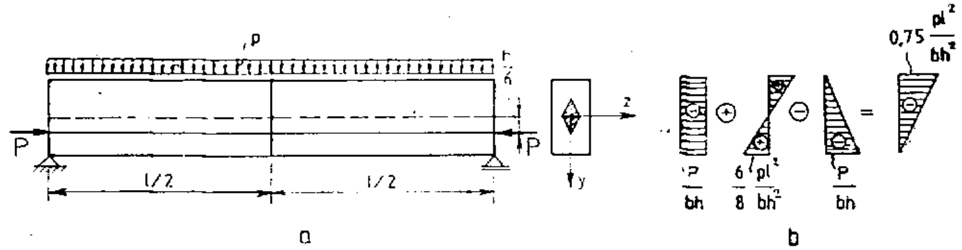


Fig. 9.25.

În secțiunea de la mijlocul deschiderii încărcarea distribuită produce un moment încovoietor

$$M_{z1} = \frac{pl^2}{8}$$

iar forța P de precomprimare, o forță axială și un moment încovoietor

$$N = -P; \; M_{z2} = -P\cdot\frac{h}{6}$$

deci în centrul de greutate al secțiunii rezultă solicitările

$$N = -P \text{ și } M_z = \frac{pl^2}{8} - P\cdot\frac{h}{6}.$$

Din condiția de anulare a efortului unitar normal la fibra inferioară a secțiunii rezultă valoarea forței de precomprimare

$$\sigma_{ef}^+ = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = 0 \text{ sau } -\frac{P}{bh} + \frac{6}{bh^2}\left(\frac{pl^2}{8} - \frac{Ph}{6}\right) = 0$$

$$P_{nec} = 0{,}375\,\frac{pl^2}{h}.$$

Diagramele de eforturi unitare produse de acțiunile separate ale eforturilor secționale sînt prezentate în fig. 9.25, *b*.

Pentru valoarea stabilită a forței de precomprimare, efortul unitar normal la fibra superioară are valoarea (v. fig. 9.25, *b*)

$$\sigma_{ef\,max}^- = -\frac{0{,}375 pl^2}{bh^2} - \frac{0{,}375 pl^2}{bh^2} = -0{,}75\,\frac{pl^2}{bh^2}.$$

Aplicația 9.7. Să se traseze sîmburele central pentru secțiunea T din fig. 9.26.

1) Caracteristici geometrice ale secțiunii transversale

$$y_G = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{100\cdot 10\cdot 95 + 90\cdot 8\cdot 45}{100\cdot 10 + 90\cdot 8} = 74{,}0 \text{ cm}$$

$A = 100\cdot10 + 90\cdot8 = 1\ 720\ \text{cm}^2$

$$I_z = \frac{100\cdot10^3}{12} + 100\cdot10\cdot21^2 + \frac{8\cdot90^3}{12} + 90\cdot8\cdot29^2 = 1{,}541\cdot10^6\ \text{cm}^4$$

$$I_y = \frac{10\cdot100^3}{12} + \frac{90\cdot8^3}{12} = 0{,}837\cdot10^6\ \text{cm}^4.$$

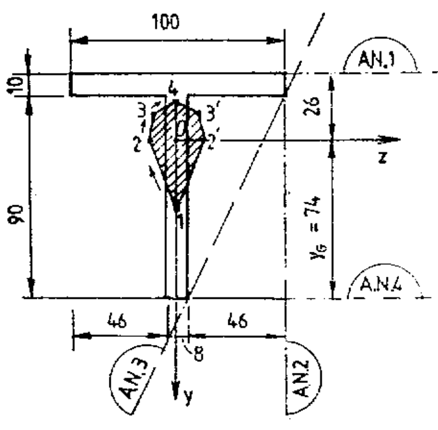


Fig. 9.26.

2) Raze de inerție (de girație) în raport cu axele de inerție principale și centrale.

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1{,}541\cdot10^6}{1\ 720} = 896{,}00\ \text{cm}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{0{,}837\cdot10^6}{1\ 720} = 486{,}60\ \text{cm}^2.$$

3) Axe neutre trangente la conturul secțiunii:

— axa neutră *AN1* (punctul *1*)

$$z_{A1} = \infty;\quad e_{z1} = 0$$

$$y_{B1} = -26{,}0\ \text{cm};\ e_{y1} = -\frac{i_z^2}{y_{B1}} = -\frac{896}{-26{,}0} = 34{,}5\ \text{cm};$$

— axa neutră *AN2* (punctul *2*)

$$z_{A2} = 50{,}0\ \text{cm};\ e_{z2} = -\frac{i_y^2}{z_{A2}} = -\frac{486{,}6}{50} = -9{,}73\ \text{cm}$$

$$y_{B2} = \infty;\ e_{y2} = 0;$$

— axa neutră *AN3* (punctul *3*)

$$z_{A3} = 41{,}8\ \text{cm};\ e_{z3} = -\frac{486{,}6}{41{,}8} = -11{,}64\ \text{cm}$$

$$y_{B3} = 81{,}8\ \text{cm};\ e_{y3} = -\frac{896}{81{,}8} = -10{,}95\ \text{cm};$$

— axa neutră *AN4* (punctul *4*)

$$z_{A4} = \infty;\ e_{z4} = 0$$

$$y_{B4} = 74{,}0\ \text{cm};\ e_{y4} = -\frac{896}{74{,}0} = -12{,}10\ \text{cm}.$$

Poziționînd coordonatele punctelor de aplicație ale forței normale excentrice și ținînd seama de proprietățile axei neutre se poate trasa conturul poligonal *1—2—3—4*. Întrucît secțiunea este simetrică în raport cu axa *Oy*, punctele *2'* și *3'* sînt simetrice față de această axă cu punctele *2* și respectiv *3*. Poziționînd și aceste puncte, se poate închide conturul sîmburelui central.

Aplicația 9.8. Culeea unui pod are secțiunea transversală prezentată în fig. 9.27. Pentru un metru liniar suprastructura podului transmite o reacțiune care are componentele $V = 350$ kN și $H = 30$ kN. Să se traseze diagrama σ pe rostul fundație-teren.

Calculele se efectuează pentru o lungime a culeii de 1,00 m. Forțele care acționează asupra rostului elevație-teren sînt: greutatea proprie a elementelor culeii, reacțiunile suprastructurii și împingerea pămîntului.

1) Evaluarea încărcărilor (fig. 9.28, *a*)

$$G_1 = V_1\gamma = 1{,}50\cdot5{,}40\cdot1{,}00\cdot22 = 178{,}2\ \text{kN}$$

$$G_2 = V_2\gamma = \frac{1}{2}\cdot4{,}50\cdot0{,}60\cdot1{,}00\cdot22 = 29{,}7\ \text{kN}$$

$$G_3 = V_3\gamma = 1{,}50\cdot3{,}00\cdot1{,}00\cdot22 = 99\ \text{kN}$$

$$E_1 = 10\cdot6{,}90 = 69\ \text{kN}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\cdot40\cdot6{,}90 = 138{,}0\ \text{kN}.$$

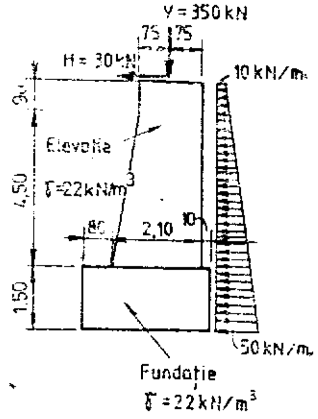


Fig. 9.27.

2) Reducerea încărcărilor exterioare în centrul de greutate al secțiunii rostului fundație-teren (fig. 9.28, *b*)

$$N = V + G_1 + G_2 + G_3 = 350 + 178{,}2 + 29{,}7 + 99 = 656{,}90\ \text{kN}$$

$$M = 30\cdot6{,}90 + 69\cdot3{,}45 + 138{,}0\cdot2{,}30 + 29{,}7\cdot0{,}50 - 178{,}2\cdot0{,}65 - 350\cdot0{,}65 = 433{,}97\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

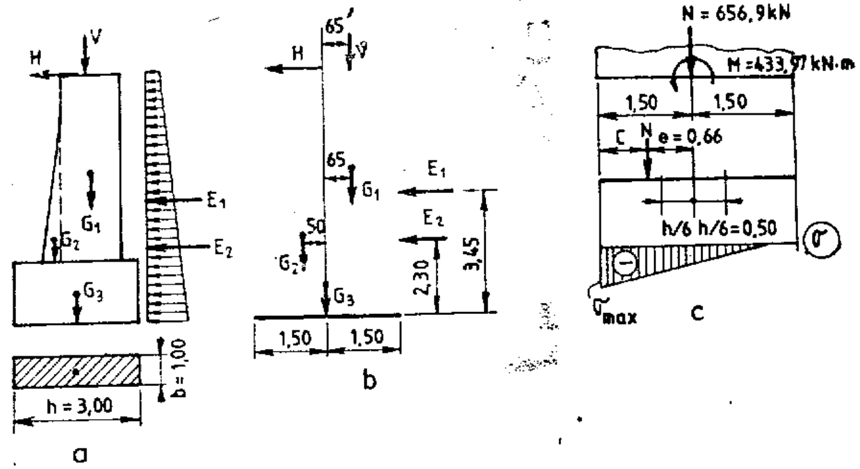


Fig. 9.28.

Efectele forței axiale și a momentului încovoietor sînt echivalente cu efectul unei forțe normale excentrice (fig. 9.28, *c*) situată la distanța *e* față de centrul de greutate a secțiunii:

$$e = \frac{M}{N} = \frac{433{,}97}{656{,}90} = 0{,}66\ \text{m};\quad \frac{h}{6} = \frac{3{,}00}{6} = 0{,}50\ \text{m}$$

Întrucît $e > h/6$ și $e < h/2$, forța normală excentrică este în afara sîmburelui central, deci efortul unitar σ_{max} se calculează luînd în considerare secțiunea activă

$$c = \frac{h}{2} - e = 1{,}50 - 0{,}66 = 0{,}84\ \text{m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{3bc} = \frac{2\cdot656{,}90}{3\cdot1{,}0\cdot0{,}84} = 521{,}35\ \text{kN/m}^2.$$

9.3. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE CU FORŢĂ TĂIETOARE

Secţiunea transversală a unui element de construcţie este solicitată la încovoiere cu forţă tăietoare, dacă torsorul de reducere al forţelor exterioare este reprezentat de un vector moment încovoietor şi un vector forţă tăietoare (M_z şi T_z sau M_y şi T_y) în centrul de greutate al secţiunii (fig. 9.29, *a*, *b*).

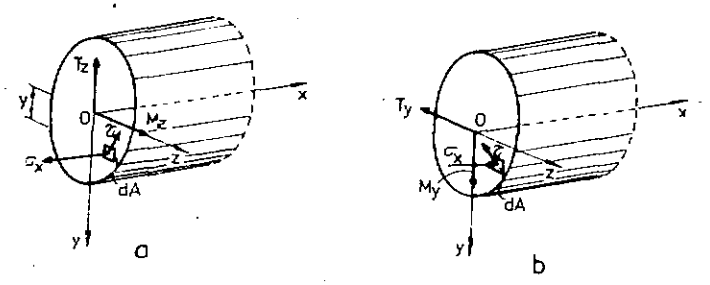


Fig. 9.29.

Efectele fiecărui efort secţional asupra secţiunii transversale pot fi studiate independent, urmînd a suprapune într-un punct efectele după legi specifice. Întrucît efectul momentului încovoietor a fost studiat în paragraful 8.5, în cele ce urmează se va analiza distribuţia eforturilor unitare tangenţiale τ produse de forţa tăietoare T_z (sau T_y) acţionînd simultan cu momentul încovoietor M_z (sau M_y).

Solicitarea de încovoiere cu forţă tăietoare este o solicitare predominantă în cazul elementelor de construcţie din alcătuirea structurilor de rezistenţă de tip grindă sau cadru (fig. 9.30).

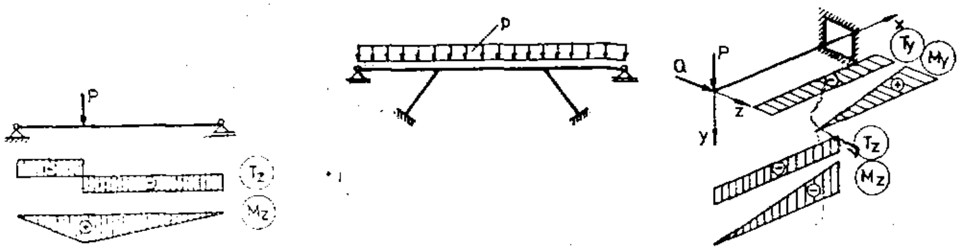


Fig. 9.30.

9.3.1. EFORTURI UNITARE PE SECŢIUNEA TRANSVERSALĂ. DUALITATEA EFORTURILOR UNITARE TANGENŢIALE

O grindă simplu rezemată încărcată cu un sistem de forţe exterioare situat în planul principal de inerţie al axei Oy, are secţiunile transversale solicitate la momentul încovoietor M_z şi forţa tăietoare T_z. Într-un punct al secţiunii transversale, eforturile secţionale M_z şi T_z produc eforturile unitare σ_x şi τ. Pentru început se consideră că efortul unitar τ are aceeaşi direcţie şi sens cu forţa tăietoare T_z, fiind notat τ_{xy}. În acest caz, un volum elementar în jurul unui punct situat în planul secţiunii transversale (fig. 9.31, *a*) este acţionat de eforturi unitare numai pe feţele ale căror normale sînt pa-

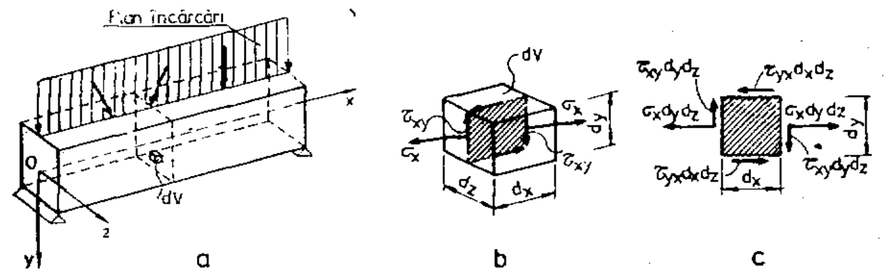


Fig. 9.31.

ralele cu axele Ox şi Oy (fig. 9.31, *b*). Conform relaţiilor de echivalenţă între eforturile secţionale M_z şi T_z şi eforturile unitare σ_x şi τ_{xy}, pe faţa a cărei normală este paralelă cu axa Ox acţionează efortul unitar normal σ_x şi efortul unitar tangenţial τ_{xy} (fig. 9.31, *b*). Pentru ca elementul de volum să fie în echilibru trebuie ca şi pe celelalte feţe ale sale să acţioneze eforturi unitare ca în fig. 9.31, *b*.

Întrucît toate componentele eforturilor unitare sînt situate într-un plan (planul xOy), pentru exprimarea echilibrului elementului de volum se utilizează sistemul de forţe elementare plan (fig. 9.31, *c*), obţinut prin multiplicarea eforturilor unitare cu ariile corespunzătoare.

Ecuaţiile de proiecţii pe direcţiile normalelor Ox şi Oy fiind satisfăcute, din ecuaţia de momente în raport cu centrul elementului se obţine

$$2(\tau_{xy}\,dy\,dz)\frac{dx}{2} - 2(\tau_{yx}\,dx\,dz)\frac{dy}{2} = 0 \tag{9.45}$$

şi după simplificarea cu produsul $dx\,dy\,dz$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \tag{9.46}$$

Relaţia (9.46) constituie principiul dualităţii eforturilor unitare tangenţiale. Conform acestui principiu: pe două suprafeţe ortogonale eforturile unitare tangenţiale perpendiculare pe muchia comună sînt egale şi converg spre această muchie sau diverg de la aceasta.

9.3.2. DISTRIBUŢIA EFORTURILOR UNITARE TANGENŢIALE PE SECŢIUNEA TRANSVERSALĂ

Pentru stabilirea modului de variaţie a eforturilor unitare tangenţiale pe secţiunea transversală se adoptă următoarele ipoteze:

a) grinda este dreaptă cu secţiunea transversală constantă în lungul ei;

b) secţiunea transversală are o axă de simetrie (axa după care este dirijată forţa tăietoare);

c) grinda nu este încărcată pe suprafaţa laterală cu forţe paralele cu axa sa;

d) pentru distribuţia efortului unitar normal σ_x pe secţiunea transversală este valabilă formula lui Navier.

Direcţia efortului unitar tangenţial τ nu poate fi precizată decît în puncte cu poziţii particulare în cadrul secţiunii. Dacă se consideră în secţiunea transversală a unei grinzi un element de arie lîngă conturul secţiunii, efortul

unitar tangențial $\bar{\tau}$ ce acționează pe acest element are direcție oarecare și poate fi descompus în componentele: τ_t tangentă la conturul secțiunii în punctul considerat și τ_n, normală pe t în planul secțiunii în același punct (fig. 9.32, *a*)

$$\bar{\tau} = \tau_t \bar{t} + \tau_n \bar{n} \tag{9.47}$$

unde $\bar{t}$ și $\bar{n}$ sînt versorii axelor considerate.

În baza principiului dualității eforturilor unitare tangențiale, efortului unitar τ_n din planul secțiunii ar trebui să-i corespundă τ_n pe suprafața laterală a grinzii. Deoarece prin ipoteza de încărcare nu există acțiuni exterioare pe suprafața laterală a grinzii în direcția axei, rezultă că $\tau_n = 0$ și $\bar{\tau} = \tau_t \bar{t}$, deci în punctele de pe conturul secțiunii transversale, efortul unitar tangențial τ este întotdeauna orientat după tangenta la contur în punctul considerat (fig. 9.32, *b*).

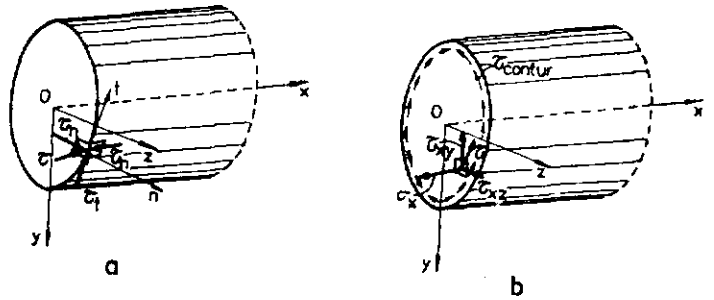


Fig. 9.32.

Într-un punct din interiorul secțiunii transversale, efortul unitar tangențial poate avea o direcție arbitrară și va fi analizat prin componentele paralele cu axele principale de inerție τ_{xy} și τ_{xz} (v. fig. 9.32, *b*).

Relația dintre efortul secțional T_z și eforturile unitare. Pentru stabilirea unei relații între forța tăietoare T_z și componentele τ_{xy} și τ_{xz} ale efortului unitar τ se dispune numai de relațiile de echivalență (v. fig. 9.29, *a*)

$$\int_A \tau_{xy}\, dA = T_z \tag{9.48}$$

$$\int_A \tau_{xz}\, dA = 0 \tag{9.49}$$

$$\int_A \sigma_x y\, dA = M_z. \tag{9.50}$$

Relația (9.50) a fost utilizată la stabilirea legăturii dintre σ_x și M_z (v. § 8.5). Relațiile de echivalență (9.48) și (9.49) nu sînt suficiente pentru precizarea unei legături între forța tăietoare T_z și eforturile unitare τ_{xy} și τ_{xz}. Problema poate fi rezolvată numai dacă se introduc ipoteze privind distribuția eforturilor unitare τ pe secțiunea transversală. Ipotezele de lucru introduse în continuare sînt aplicabile numai secțiunilor transversale care admit ca axă de simetrie suportul forței tăietoare.

Distribuțiile componentelor efortului unitar tangențial vor rezulta pe baza următoarelor considerente (fig. 9.33):

— forța tăietoare T_z acționează pe axa de simetrie Oy;

— pe o linie AB din secțiunea transversală, perpendiculară pe axa Oy, în punctele de pe contur A și B, τ are aceeași valoare, datorită simetriei, iar direcția este tangentă la conturul secțiunii în A respectiv B. Cele două tangente se intîlnesc pe axa Oy în punctul D;

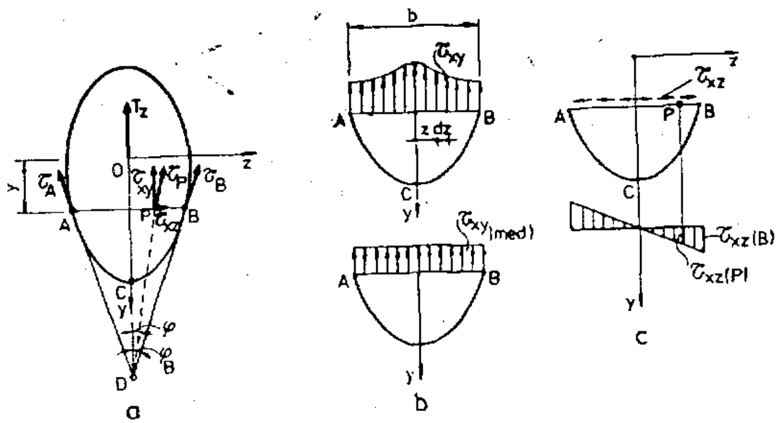


Fig. 9.33.

— într-un punct arbitrar P pe linia AB direcția lui τ_P nu este cunoscută, dar avînd în vedere că direcția lui τ de pe axa Oy trece și ea prin punctul D se poate admite (mai ales în cazul secțiunilor cu lățimea mică) că τ_P are direcția PD. Descompunînd τ_P în componentele τ_{xy} și τ_{xz} și ținînd seama că $\tau_{xz} = \tau_{xy}\, \mathrm{tg}\, \varphi$ rezultă că, avînd cunoscută distribuția componentei τ_{xy}, se stabilește direct cea a componentei τ_{xz};

— pe linia AB (fig. 9.33, *b*) componenta τ_{xy} are o variație necunoscută dar simetrică față de axa Oy (nu schimbă de semn pe intervalul AB). Pentru secțiuni cu lățimea redusă se poate admite ca distribuția reală a lui τ_{xy} să se înlocuiască cu o distribuție medie pe lățimea $AB = b$

$$\int_A^B \tau_{xy}\, dz = \tau_{xy\,med}\, b. \tag{9.51}$$

Pentru simplificarea notării în continuare $\tau_{xy\,med}$ va fi notat τ_{xy}.

În baza ipotezelor enunțate mai înainte se poate scrie

$$\tau_{xz(B)} = \tau_{xy} \cdot \mathrm{tg}\, \varphi_B \quad \text{și} \quad \tau_{xz(P)} = \tau_{xy} \cdot \mathrm{tg}\, \varphi \tag{9.52}$$

sau

$$\tau_{xz(P)} = \tau_{xz(B)} \frac{\mathrm{tg}\, \varphi}{\mathrm{tg}\, \varphi_B}. \tag{9.53}$$

Rezultă că τ_{xz} variază liniar pe dreapta AB, are valoare zero în dreptul axei Oy și schimbă de semn pe intervalul AB (fig. 9.33, *c*).

Din examinarea echilibrului unui element de grindă de lungime dx separat prin secțiunile S_1 și S_2 (fig. 9.34), rezultă că existența eforturilor unitare tangențiale τ_{xy} se justifică numai prin acțiunea simultană a eforturilor secționale T_z și M_z.

O secționare cu un plan longitudinal paralel cu planul Oxz la distanța y de acesta (fig. 9.34, *b*), va pune în evidență următoarele forțe elementare de legătură:

$X = \int_{(ABC)} \sigma_x\, dA$ — rezultanta forțelor elementare $\sigma_x\, dA$ ce acționează pe suprafața ABC din secțiunea S_1;

$X + dX = \int_{(A'B'C')} (\sigma_x + d\sigma_x)\, dA$ — rezultanta forțelor elementare $(\sigma_x + d\sigma_x)\, dA$ ce acționează pe suprafața $A'B'C'$ din secțiunea S_2;

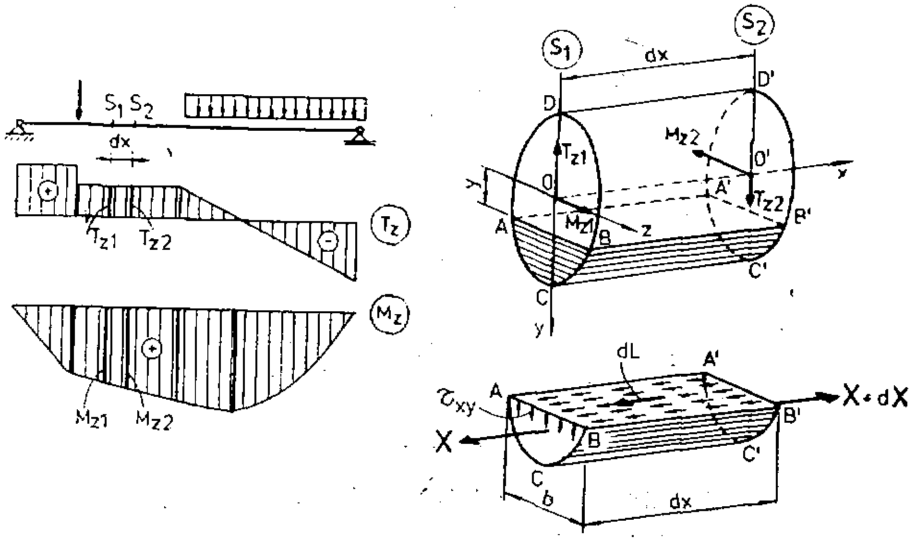


Fig. 9.34.

$dL = \tau_{xy} b dx$ — rezultanta forțelor elementare $\tau_{xy} dA$ ce acționează pe suprafața $ABB'A'$ din secțiunea longitudinală (conform dualității cu eforturile unitare τ_{xy} din secțiunea ABC).

Exprimînd echilibrul părții secționate prin ecuații de protecție pe direcția axei Ox, rezultă

$$-X - dL + X + dX = 0 \tag{9.54}$$

sau

$$dX = dL \tag{9.55}$$

în care: $dL = \tau_{xy} b dx$ iar $dX = \int_{(ABC)} d\sigma_x \, dA$.

Pentru distribuția lui σ_x fiind admisă formula lui Navier, rezultă

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \text{ deci } d\sigma_x = \frac{dM_z}{I_z} y \tag{9.56}$$

și

$$dX = \int_{(ABC)} \frac{dM_z}{I_z} y \, dA = \frac{dM_z}{I_z} \int_{(ABC)} y \, dA = \frac{dM_z}{I_z} S_{z(ABC)} \tag{9.57}$$

unde: $S_{z\,(ABC)} = \int_{(ABC)} y \, dA$ reprezintă momentul static al suprafeței ABC din secțiunea transversală în raport cu axa Oz (axa neutră).

Introducînd relația (9.57) în (9.55) rezultă

$$\tau_{xy} b \, dx = \frac{dM_z}{I_z} S_{z\,(ABC)} \text{ sau } \tau_{xy} = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_{z(ABC)}}{b I_z} \tag{9.58}$$

dar

$$\frac{dM_z}{dx} = T_z \tag{9.59}$$

deci rezultă expresia componentei τ_{xy} a efortului unitar tangențial cunoscută sub denumirea de formula lui Juravski

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_{z(ABC)}}{b I_z}. \tag{9.60}$$

În relația (9.60) τ_{xy} este efortul unitar tangențial mediu pe lățimea b a secțiunii transversale; T_z — forța tăietoare din secțiune; $S_{z\,(ABC)}$ — momentul static în raport cu axa neutră (axa Oz) al suprafeței ABC din secțiune (suprafața care tinde să lunece); b — lățimea secțiunii la nivelul y la care se calculează τ_{xy}; I_z — momentul de inerție al întregii secțiuni în raport cu axa Oz (axa neutră).

Se fac următoarele observații:

1) Pentru exprimarea momentului static se poate utiliza fie aria ABC situată sub linia AB, fie ADB situată deasupra liniei AB. Deoarece axa neutră este axă centrală a întregii secțiuni se poate scrie

$$A_{ACBD} = A_{ABC} + A_{ADB} \text{ și } S_{z\,(ACBD)} = S_{z\,(ABC)} + S_{z\,(ADB)} = 0 \tag{9.61}$$

deci:

$$|S_{z\,(ABC)}| = |S_{z\,(ADB)}|. \tag{9.62}$$

2) În formula lui Juravski T_z și I_z fiind constante, τ_{xy} variază pe înălțimea secțiunii cu raportul S_z/b. Valoarea maximă pentru τ_{xy} se obține la nivelul y pentru care raportul S_z/b este maxim. În cazul secțiunilor cu $b = \text{const}$, valoarea maximă pentru τ_{xy} se obține la nivelul axei neutre, unde $S_z = \max$.

3) În cazul încovoierii pure, distribuția lui σ_x este aceeași în toate secțiunile grinzii, deci $dX = 0$, și rezultă imediat $\tau_{xy} = 0$. Fără o variație a momentului încovoietor M_z nu pot apărea eforturi unitare τ_{xy} pe secțiunea transversală.

Variația eforturilor unitare tangențiale pe înălțimea secțiunii. Se vor considera în continuare cîteva secțiuni caracteristice.

Secțiune dreptunghiulară (fig. 9.35, *a*). La nivelul y expresia efortului unitar τ_{xy} este

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_z}{b I_z} \tag{9.63}$$

unde: $T_z = \text{const}$, $b = \text{const}$, $I_z = \dfrac{bh^3}{12}$ iar S_z este momentul static al suprafeței hașurate în raport cu axa neutră Oz

$$S_{z(ABC)} = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \tag{9.64}$$

Deci:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot \frac{1}{2} b\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{6T_z}{bh}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{T_z}{bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{T_z}{A}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \tag{9.65}$$

Rezultă că τ_{xy} variază parabolic pe înălțimea secțiunii transversale. Pentru $y = \pm h/2$ rezultă $\tau_{xy} = 0$, iar pentru $y = 0$ (axa neutră) τ_{xy} are valoare maximă

$$\tau_{xy\,max} = 1{,}5\frac{T_z}{A}. \tag{9.66}$$

Secțiune circulară (fig. 9.35, *b*). La nivelul y față de axa neutră τ_{xy} are expresia (9.63) unde $T_z = \text{const}$, $b = 2R\sin\alpha$, $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$ iar S_z este momentul static al suprafeței hașurate ABC în raport cu axa neutră

$$S_{z\,(ABC)} = \int_{(ABC)} ds \tag{9.67}$$

$$ds = (2\xi d\eta)\eta\,;\ \xi = R\sin\varphi\,;\ \eta = R\cos\varphi\,;\ d\eta = R\sin\varphi\, d\varphi \tag{9.68}$$

$$S_{z\,(ABC)} = 2\int_{(ABC)} \xi\eta\, d\eta = 2\int_{(ABC)} R^3\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = -2R^3\frac{\sin^2\varphi}{3}\Bigg|_\alpha^0 = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha(1-\cos^2\alpha). \tag{9.69}$$

Înlocuind în expresia lui $S_{z\,(ABC)}$ pe $\cos^2\alpha$ cu y^2/R^2 se obține

$$\tau_{xy} = \frac{T_z\cdot\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)}{2R\sin\alpha\cdot\pi R^4/4} = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{\pi R^2}\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right) = \frac{4}{3}\,\frac{T_z}{A}\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right). \tag{9.70}$$

Rezultă că τ_{xy} variază parabolic cu y. Pentru $y = \pm R$ rezultă $\tau_{xy} = 0$, iar pentru $y = 0$ (axa neutră) τ_{xy} are valoare maximă

$$\tau_{xy\,max} = \frac{4}{3}\cdot\frac{T_z}{A}. \tag{9.71}$$

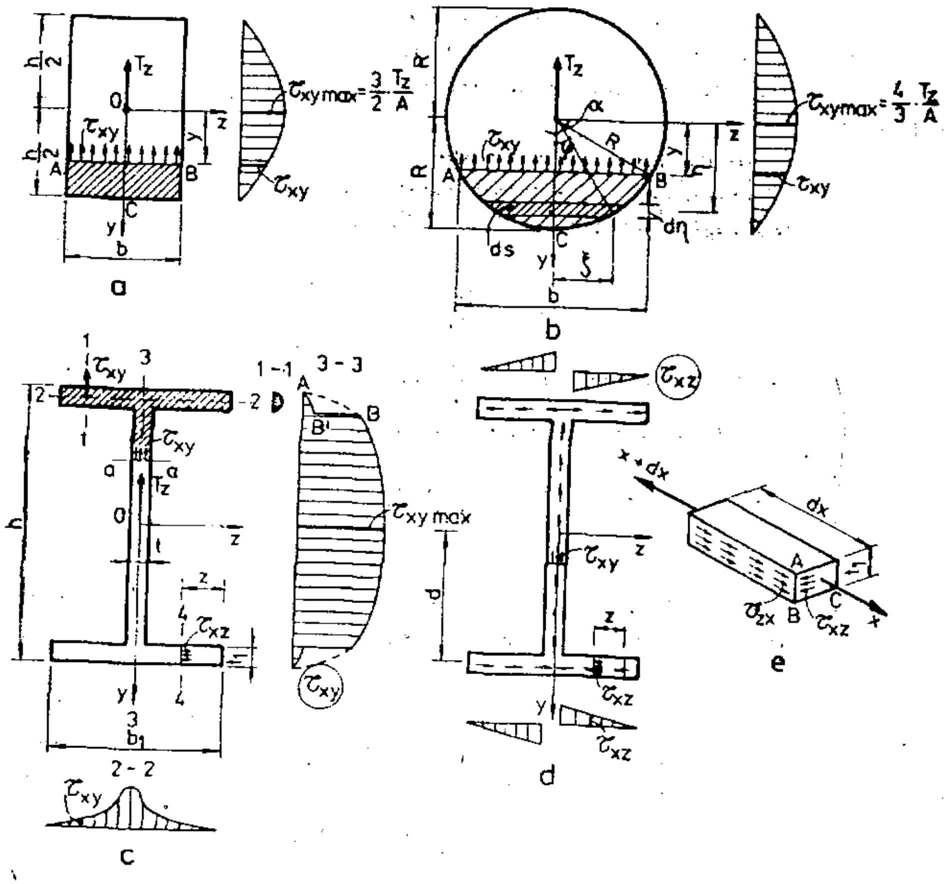


Fig. 9.35.

Secțiune cu pereți subțiri tip I (fig. 9.35, *c*, *d*). Pentru linia $1-1$ situată pe talpa secțiunii, efortul unitar τ_{xy} (normal pe conturul secțiunii) are variația parabolică cu valori nule la ambele fețe ale tălpii și valori mici. Din punct de vedere practic, se poate afirma că forța tăietoare nu se transmite prin tălpile secțiunii.

Pentru o linie $3-3$ prin inimă, în expresia lui τ_{xy} la nivelul $a-a$, momentul static S_z se referă la suprafața hașurată iar lățimea secțiunii este $b = t$. Deci, pe intervalul dintre cele două tălpi, S_z este variabil iar T_z, b, I_z constante, τ_{xy} variază parabolic, cu valori minime în punctele de intersecție ale inimii cu tălpile și valoare maximă în dreptul axei neutre Oz.

Pentru o linie $2-2$ prin talpa secțiunii ,pentru τ_{xy} nu se mai poate considera o valoare medie întrucît dacă pe tălpi el are valori nesemnificative, în dreptul inimii se constată o creștere apreciabilă a acestuia (fig. 9.35, *c*). De aceea, este mai aproape de realitate ca la evaluarea lui τ_{xy} pe tălpi să se considere drept lățime b, grosimea inimii t (prin care practic se transmite forța tăietoare) și nu lățimea tălpii b_1. Aceasta înseamnă că în diagrama lui τ_{xy} se poate uni A cu B în mod aproximativ printr-o dreaptă. Dacă la determinarea lui τ_{xy} s-ar fi introdus lățimea tălpii b_1, atunci apărea curba AB' care pune în evidență un salt în diagrama de variație a lui τ_{xy}, ceea ce nu este corect.

Întrucît efortul unitar tangențial τ este în puncte de pe conturul secțiunii paralel cu acesta, rezultă că la profile cu pereți subțiri τ este practic paralel, cu conturul pe toată grosimea profilului, indiferent de direcția forței tăietoare. Deci, pe tălpile profilului trebuie determinat τ_{xz} paralel cu laturile tălpii și constant pe grosimea acesteia (fig. 9.35, *d*). Procedînd analog ca la stabilirea expresiei lui τ_{xy}, separînd un element de lungime dx și secțiune ABC se obține

$$\tau_{xz} = \frac{T_z S_{z(ABC)}}{t_1 I_z} \tag{9.72}$$

unde $S_{z\,(ABC)}$ este momentul static al ariei ABC în raport cu axa neutră Oz

$$S_{z\,(ABC)} = (t_1 z)d \tag{9.73}$$

și rezultă

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{I_z}\cdot d\cdot z \tag{9.74}$$

deci τ_{xz} pe tălpile secțiunii are o variație liniară.

Avînd în vedere că atît τ_{xy} pe inima secțiunii cît și τ_{xz} pe tălpile acesteia sînt paralele cu conturul, sensul lor rezultă funcție de sensul forței tăietoare T_z, fluxul lui τ trebuie să „curgă" în sensul forței tăietoare (fig. 9.35, *d*).

9.3.3. GRINZI CU SECȚIUNE COMPUSĂ SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE CU FORȚĂ TĂIETOARE

Dimensionarea grinzilor cu deschidere mare sau încărcate cu forțe exterioare mari nu se poate întotdeauna realiza cu sortimentele de material disponibile. În acest caz, secțiunea transversală trebuie alcătuită din mai multe elemente, astfel ca modulul de rezistență al ansamblului secțiunii să fie cel puțin egal cu cel necesar. Astfel, se ajunge la secțiuni din lemn cu elemente

suprapuse (fig. 9.36, *a*) sau la secțiuni metalice compuse din platbande și profile laminate (fig. 9.36, *b*).

Dacă se analizează comportarea la încovoiere a unei grinzi alcătuite din două elemente suprapuse (fig. 9.37, *a*) se pot face următoarele observații:

1) Dacă cele două grinzi suprapuse nu sînt solidarizate între ele, în absența frecărilor, deformația lor se produce independent, rezultînd o deplasare relativă pe suprafața de contact, deplasare vizibilă în secțiunile de capăt (fig. 9.37, *b*). Rotirile secțiunilor fiecărei grinzi componente se fac în jurul axelor neutre proprii, diagrama eforturilor unitare normale σ_x prezentîndu-se ca în fig. 9.37, *b*.

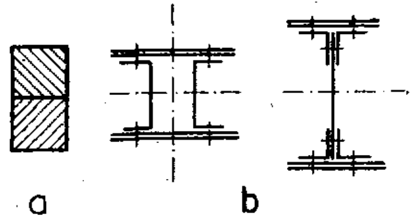


Fig. 9.36.

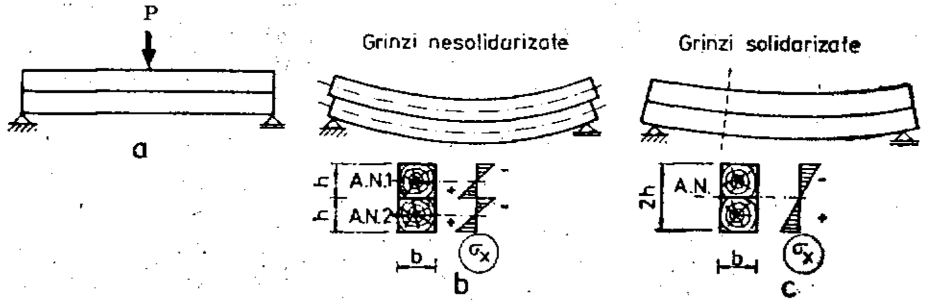


Fig. 9.37.

Momentul capabil al ansamblului celor două grinzi este suma momentelor capabile ale fiecărei grinzi.

$$M'_{z\ cap} = 2M_{z1\ cap} = 2W_{z1}\sigma_a = \frac{bh^2}{3}\sigma_a. \tag{9.75}$$

2) Dacă cele două grinzi suprapuse sînt solidarizate astfel ca lunecarea dintre cele două grinzi să fie împiedicată, rotirile secțiunilor se produc în jurul axei neutre a secțiunii unitare. Diagrama eforturilor unitare normale σ_x se prezintă ca în fig. 9.37, *c*. Momentul capabil al secțiunii unitare este

$$M''_{z\ cap} = W_{z2}\sigma_a = \frac{b(2h)^2}{6}\sigma_a = 2\,\frac{bh^2}{3}\sigma_a = 2M'_{z\ cap}. \tag{9.76}$$

Capacitatea de încărcare a grinzii cu secțiune compusă solidarizată este mai mare decît cea a grinzilor compuse nesolidarizate.

Pentru ca elementele care alcătuiesc secțiunea compusă să lucreze unitar, trebuie să fie împiedicată lunecarea relativă care apare în procesul deformării prin încovoiere. Forța de lunecare care se dezvoltă în planele de separare a elementelor componente trebuie să fie preluată de mijloace de îmbinare pentru solidarizare (cleiuri, șuruburi, nituri, sudură etc.).

9.3.3.1. **Forța de lunecare.** Datorită dualității eforturilor unitare tangențiale, în planele longitudinale situate la distanța y de suprafața neutră se

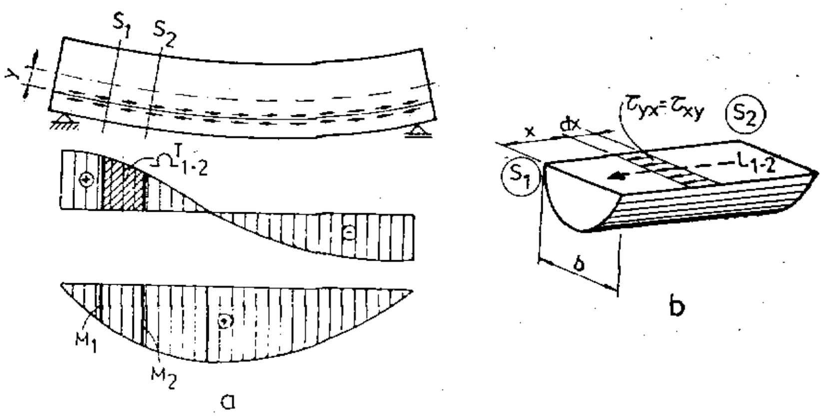


Fig. 9.38.

dezvoltă forțe de lunecare (fig. 9.38, *a*). Astfel, forța de lunecare L_{1-2} care se dezvoltă în planul situat la distanța y față de axa neutră, între secțiunile S_1 și S_2 (fig. 9.38, *b*) are expresia

$$L_{1-2} = \int_{S_1}^{S_2}\tau_{xy}b\,dx = \int_{S_1}^{S_2}\frac{T_z S_z}{bI_z}\,b\,dx = \frac{S_z}{I_z}\int_{S_1}^{S_2}T_z\,dx. \tag{9.77}$$

Cunoscînd diagrama de forță tăietoare și moment încovoietor pe intervalul dintre secțiunile S_1 și S_2, rezultă că $\int_{S_1}^{S_2} T_z\,dx$ este aria diagramei de forță tăietoare pe intrevalul $S_1 - S_2$

$$\int_{S_1}^{S_2}T_z\,dx = \Omega^{T_z}_{1-2} \tag{9.78}$$

sau

$$\int_{S_1}^{S_2}T_z\,dx = M_2 - M_1. \tag{9.79}$$

Deci pe intervalul finit $S_1 - S_2$ forța de lunecare se poate exprima sub forma

$$L_{1-2} = \frac{S_z}{I_z}\,\Omega^{T_z}_{1-2} = \frac{S_z}{I_z}(M_2 - M_1). \tag{9.80}$$

9.3.3.2. **Calculul mijloacelor de îmbinare la grinzi metalice cu secțiune compusă.** Grinzile metalice cu secțiune compusă se utilizează cînd sortimentele de profile laminate existente nu acoperă necesarul rezultat dintr-un calcul de dimensionare la încovoiere. În aceste situații, secțiunea se realizează prin asamblarea unitară a mai multor elemente cu ajutorul nituirii sau sudurii. Pe lîngă rolul de asamblare a elementelor componente, mijloacele de îmbinare amintite împiedică lunecările relative prin preluarea forțelor de lunecare.

Solidarizare cu nituri. Secțiunea compusă a unei grinzi metalice este, în general, alcătuită din platbande și corniere solidarizate cu nituri de cap și de gît (fig. 9.39).

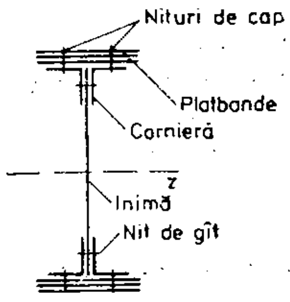


Fig. 9.39.

Diametrul niturilor se stabilește prin prescripții oficiale funcție de grosimea pieselor de asamblat,

iar niturile de gît și cele de cap se așază intercalat la distanță egală e. Deoarece această distanță este mică, se poate admite că între două nituri forța tăietoare este constantă și se poate utiliza relația (9.80) pentru calculul forței de lunecare ce se dezvoltă pe distanța e (fig. 9.40, *a*).

Pentru niturile de cap (fig. 9.40, *b*), forța de lunecare maximă care apare în planul de separare între platbande și corniere pe distanța e are expresia

$$L_{nc} = \frac{S_{zc}}{I_z}\,\Omega_e^{T_z} = \frac{S_{zc}}{I_z}\,T_{z\,max}\,e \tag{9.81}$$

unde: T_{zmax} este valoarea maximă a forței tăietoare pe intervalul considerat; I_z — momentul de inerție brut al întregii secțiuni în raport cu axa neutră, iar S_{zc} — momentul static brut al secțiunii platbandelor, față de axa neutră.

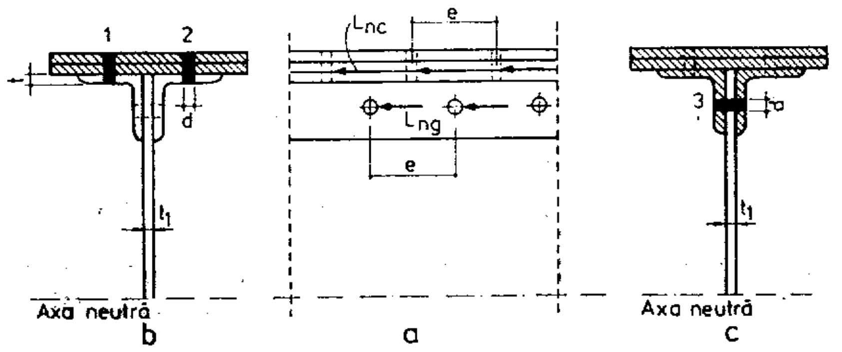


Fig. 9.40.

Pentru niturile de gît, forța de lunecare apare ca urmare a lunecării ansamblului platbande și corniere față de inimă (fig. 9.40, *c*) pe distanța dintre două nituri de gît și are expresia

$$L_{ng} = \frac{S_{zg}}{I_z}\,\Omega_e^{T_z} = \frac{S_{zg}}{I_z}\,T_{z\,max}\,e \tag{9.82}$$

unde S_{zg} este momentul static brut al secțiunii platbande și corniere față de axa neutră.

Întrucît S_{zg} este întotdeauna mai mare ca S_{zc}, ceilalți termeni rămînînd nemodificați, rezultă $L_{ng} > L_{nc}$, iar niturile de gît și de cap se așază intercalat la distanțe egale e; calculele se vor efectua numai pentru niturile de gît, acestea fiind mai solicitate.

Aspectele de calcul practice, verificarea unei nituiri și stabilirea distanței e dintre nituri, au la bază condiția ca forța de lunecare aferentă unui nit să nu depășească rezistența nitului la forfecare sau presiune pe gaură.

Verificarea unei nituiri. Constă în compararea forței care revine în mod efectiv unui nit cu rezistența nitului

$$L_{ng} = \frac{T_{zmax}\,S_{zg}}{nI_z}\,e \leqslant R_{nit} \tag{9.83}$$

unde n este numărul de nituri din secțiunea de lunecare care preiau forța de lunecare (în general $n = 1$ pentru nituri de gît și $n = 2$ pentru nituri de cap).

Stabilirea distanței e dintre nituri. Întrucît diametrul nitului se alege constructiv, distanța dintre nituri rezultă din condiția

$$L_{ng} \leqslant nR_{nit} \tag{9.84}$$

sau

$$\frac{T_{zmax}S_{zg}}{I_z}\,e \leqslant nR_{nit} \tag{9.85}$$

de unde rezultă

$$e = \frac{nR_{nit}I_z}{T_{zmax}S_{zg}}. \tag{9.86}$$

Distanța dintre nituri rezultată trebuie să corespundă unor condiții constructive care fixează limitele acestei distanțe funcție de diametrul niturilor și de grosimea pieselor care se asamblează.

Solidarizare prin sudură. Pentru asamblarea elementelor unei secțiuni compuse metalice se poate folosi sudura (fig. 9.41, *a*). În afara rolului de asamblare, sudura trebuie să preia forța de lunecare ce apare în planul de separație dintre inimă și platbandele tălpilor. Cordoanele de sudură se pot executa continuu sau întrerupt (fig. 9.41, *b*).

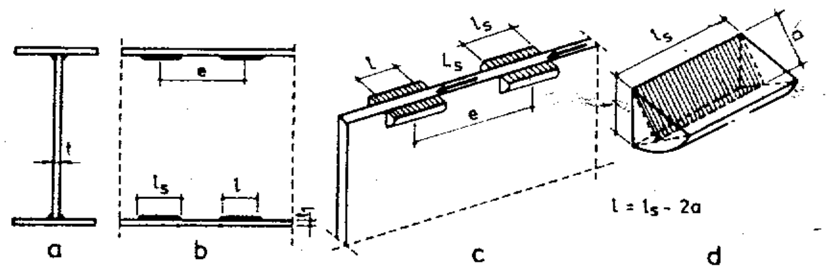


Fig. 9.41.

Forța de lunecare care se dezvoltă pe distanța e dintre două cordoane de sudură (fig. 9.41, *c*) are expresia

$$L_s = \frac{T_zS_{zs}}{I_z}\,e \tag{9.87}$$

în care: T_z este forța tăietoare pe intervalul e, considerată constantă pe acest interval; S_{zs} — momentul static al platbandelor care alcătuiesc talpa în raport cu axa neutră; I_z — momentul de inerție al întregii secțiuni în raport cu axa neutră.

În cazul sudurii continue, calculul forței de lunecare se face pe unitatea de lungime a cordonului de sudură, deci

$$L_s = \frac{T_zS_{zs}}{I_z}\cdot 1. \tag{9.88}$$

Forța de lunecare trebuie să fie preluată de cordoanele de sudură care lucrează la forfecare în planul lor median (fig. 9.41, *d*).

Aspectele de calcul practice, verificarea unui cordon de sudură și dimensionarea cordoanelor de sudură au la bază condiția ca forța de lunecare aferentă unui cordon de sudură să nu depășească rezistența sudurii.

Verificarea unei suduri. Constă în compararea eforturilor unitare tangențiale ce se dezvoltă în cordonul de sudură cu rezistența admisibilă.

Pentru cordoane întrerupte, aria secţiunii de calcul a sudurii este

$$A_s = n(l_s - 2a)a \qquad (9.89)$$

unde n este numărul de cordoane de sudură care preiau forţa de lunecare (în mod uzual $n = 2$, fig. 9.41, c).

Pentru cordoane continue, aria secţiunii de calcul a sudurii este

$$A_s = n \cdot 1 \cdot a. \qquad (9.90)$$

Verificarea efortului unitar tangenţial din cordonul de sudură

$$\tau_{ef} = \frac{L_{s\,max}}{A_s} \leq \tau_{as} \qquad (9.91a)$$

unde pentru cordoane întrerupte are forma ($n = 2$)

$$\tau_{ef} = \frac{T_{z\,max} S_{zs} e}{2 I_z (l_s - 2a) a} \leq \tau_{as} \qquad (9.91b)$$

iar pentru cordoane continue ($n = 2$)

$$\tau_{ef} = \frac{T_{z\,max} S_{zs}}{2 I_z a} \leq \tau_{as}. \qquad (9.92)$$

Dimensionarea cordoanelor de sudură. Pentru cordoanele de sudură continue, dimensionarea constă în stabilirea grosimii cordonului de sudură, a_{nec}. Pentru cordoanele întrerupte, întrucît apar trei necunoscute, grosimea cordonului a, distanţa dintre cordoane e şi lungimea cordonului l_s, se aleg pe bază de prescripţii oficiale două dintre necunoscute şi se determină cea de a treia.

Dimensionarea caracteristicilor cordoanelor de sudură are la bază relaţia

$$L_{s\,max} \leq R_s. \qquad (9.93)$$

Pentru dimensionarea grosimii cordonului de sudură continuă, relaţia (9.93) devine

$$\frac{T_{z\,max} S_{zs}}{I_z} \cdot 1 \leq n a \cdot 1 \cdot \tau_{as} \qquad (9.94a)$$

deci

$$a_{nec} = \frac{T_{z\,max} S_{zs}}{n I_z \tau_{as}} \qquad (9.94b)$$

iar pentru stabilirea distanţei între cordoanele de sudură întreruptă de lungime l_s şi grosime a

$$\frac{T_{z\,max} S_{zs}}{I_z} e \leq n(l_s - 2a) a \tau_{as} \qquad (9.95)$$

şi

$$e_{nec} = \frac{n I_z (l_s - 2a) a \tau_{as}}{T_{z\,max} S_{zs}}. \qquad (9.96)$$

Din motive constructive, prescripţiile oficiale impun anumite limite ale caracteristicilor geometrice ale cordoanelor de sudură (a, l_s, e).

9.3.4. VARIAŢIA EFORTURILOR UNITARE ÎN JURUL UNUI PUNCT ÎN PROBLEMA STĂRII PLANE DE EFORTURI

În alcătuirea structurilor de rezistenţă ale construcţiilor se întîlnesc curent corpuri care se încadrează în categoria grinzi (v. fig. 9.31, a) sau în categoria şaibe (fig. 9.42, a), la care datorită formei lor geometrice şi încărcării particulare se obţin situaţii particulare ale eforturilor unitare pe feţele unui volum elementar.

În cazul grinzilor, situaţia eforturilor unitare pe feţele unui volum elementar a fost prezentată în fig. 9.31, b şi c. Pentru şaibe, care au o dimensiune mică (grosimea) în raport cu celelalte două şi sînt acţionate de forţe exterioare conţinute în planul median xOy (fig. 9.42, a), situaţia unui volum elementar se caracterizează prin prezenţa eforturilor unitare numai pe feţele care au ca normale axele Ox şi Oy (fig. 9.42, b).

Deoarece toate componentele eforturilor unitare se situează într-un plan (planul xOy), starea de eforturi corespunzătoare se numeşte starea plană de eforturi (fig. 9.42, b). Situarea tuturor componentelor eforturilor unitare într-un plan permite reprezentarea volumului elementar ca o figură plană (fig. 9.42, c) cu menţiunea că fiecare latură a acesteia reprezintă o arie elementară.

Pentru starea plană de eforturi se menţine sistemul de axe adoptat în cazul grinzilor $Oxyz$ (v. fig. 9.42, a, b) şi convenţia de semn pozitivă pentru eforturi, adoptată în paragraful 8.2 (fig. 9.42, c).

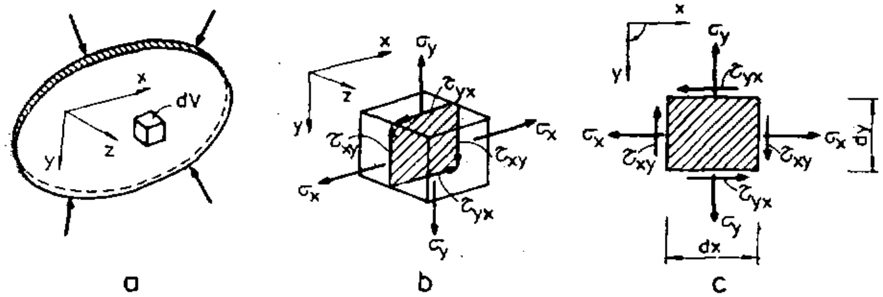


Fig. 9.42.

Pentru un sistem de forţe exterioare dat, eforturile unitare într-un punct al corpului sînt funcţie de poziţia punctului considerat. Rezultă că de la o faţă a volumului elementar la altă faţă paralelă cu prima, eforturile unitare variază. Pentru exprimarea eforturilor unitare într-un punct şi pentru analiza stării de eforturi în jurul acestuia, variaţiile de eforturi unitare între feţe paralele se neglijează.

Componentele stării de eforturi pe feţele volumului elementar ce au ca normale axele Ox şi Oy pot fi înscrise într-o matrice cu două linii şi două coloane numită matricea eforturilor unitare într-un punct

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \qquad (9.97)$$

Dacă se ţine seama de principiul dualităţii eforturilor unitare tangenţiale, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, matricea eforturilor unitare conţine numai trei componente distincte rezultînd simetria ei faţă de diagonala principală. Matricea T_σ reprezintă tensorul eforturilor unitare într-un punct din interiorul corpului solicitat.

9.3.4.1. **Analiza stării de eforturi în jurul unui punct.** Ansamblul constituit din totalitatea eforturilor unitare totale ce se dezvoltă în jurul unui punct de coordonate (x, y) pentru toate orientările normalei $\bar{n}$ a planurilor care trec prin punctul considerat, formează starea de eforturi în jurul punctului.

Dacă se cunoaște tensorul eforturilor unitare în punctul considerat, se poate exprima situația unui plan elementar de orientare $\bar{n}$ $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, din analiza echilibrului volumului elementar secționat cu acest plan (fig. 9.43, *a*).

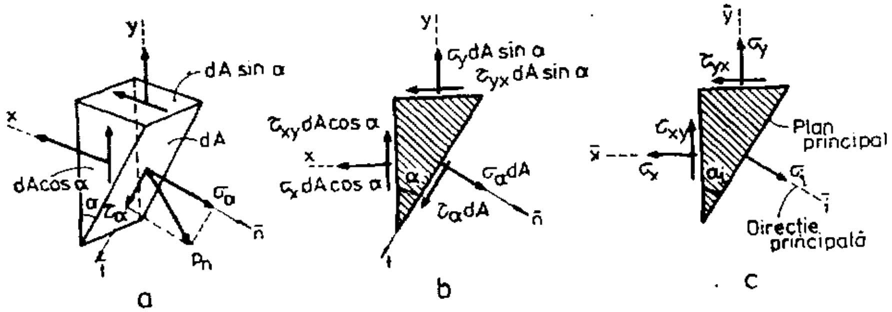


Fig. 9.43.

Echilibrul volumului elementar se exprimă prin ecuații de proiecții, ale sistemului de forțe care-l acționează (fig. 9.43, *b*), pe direcția normalei $\bar{n}$ și a tangentei $\bar{t}$ la fața înclinată cu unghiul α

$$\sigma_\alpha \, dA = \cos^2\alpha \, \sigma_x \, dA + \sin^2\alpha \, \sigma_y \, dA + \sin\alpha \cos\alpha \, \tau_{xy} \, dA + \sin\alpha \cos\alpha \, \tau_{yx} \, dA \quad (9.98)$$

$$\tau_\alpha \, dA = -\sin\alpha \cos\alpha \, \sigma_x \, dA + \sin\alpha \cos\alpha \, \sigma_y \, dA + \cos^2\alpha \, \tau_{xy} \, dA - \sin^2\alpha \, \tau_{yx} \, dA. \quad (9.99)$$

Împărțind cu dA și ținînd seama că $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ se obține

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \quad (9.100)$$

$$\tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha \cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \quad (9.101)$$

Introducînd funcții trigonometrice cu argumentul 2α rezultă

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \quad (9.102)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha. \quad (9.103)$$

Din relațiile (9.102) și (9.103) rezultă

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = \tau_\alpha \quad (9.104)$$

deci dacă unghiul 2α variază, σ_α este maxim sau minim pe planele pentru care $\tau_\alpha = 0$.

9.3.4.2. **Variația efortului unitar normal τ_α în jurul unui punct. Eforturi unitare principale. Direcții principale.** Considerînd că orientarea $\bar{n}$ a planului înclinat (v. fig. 9.43, *a*) variază, rezultă că efortul unitar total p_n

variază și pentru o orientare particulară $\bar{i}$ $(\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)$, suportul lui p_n coincide cu normala $\bar{i}$. În acest caz, $p_n = \sigma_i$ iar $\tau_i = 0$ (v. fig. 9.43, *c*). Această orientare particulară definește: planele principale — planele pentru care componenta $\tau_i = 0$; direcțiile principale — orientările normalei $\bar{i}$ care definesc planele principale; eforturile unitare principale — valoarea eforturilor unitare σ_i care acționează pe direcțiile principale.

Din exprimarea echilibrului volumului elementar (v. fig. 9.43, *c*) prin proiecții pe normalele $\bar{x}$ și $\bar{y}$ se obține

$$\sigma_i \cos\alpha_i = \sigma_x \cos\alpha_i + \tau_{yx} \sin\alpha_i \quad (9.105)$$

$$\sigma_i \sin\alpha_i = \tau_{xy} \cos\alpha_i + \sigma_y \sin\alpha_i. \quad (9.106)$$

Ecuațiile (9.105) și (9.106) pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i)\cos\alpha_i + \tau_{xy}\sin\alpha_i &= 0 \\ \tau_{xy}\cos\alpha_i + (\sigma_y - \sigma_i)\sin\alpha_i &= 0. \end{aligned} \quad (9.107)$$

Sistemul de ecuații (9.107) admite soluții diferite de zero pentru necunoscutele $\cos\alpha_i$ și $\sin\alpha_i$ dacă determinantul coeficienților acestora este egal cu zero

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \quad (9.108)$$

sau, dezvoltînd determinantul

$$\sigma_i^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_i + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0. \quad (9.109)$$

Ecuația de gradul doi are rădăcinile

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (9.110)$$

Fiecare rădăcină σ_1 și $\sigma_2 (\sigma_1 > \sigma_2)$ reprezintă valoarea unui efort unitar normal ce acționează pe un plan pe care efortul unitar tangențial este zero.

Întrucît τ_α este derivata funcției σ_α iar $\sigma_{1,2}$ apar pe planul pentru care $\tau_\alpha = 0$, rezultă că σ_1 și σ_2 reprezintă valorile maxime, respectiv minime, ale efortului unitar normal în jurul punctului analizat.

Un plan principal este caracterizat prin $\sigma_i \neq 0$ și $\tau_i = 0$. Rezultă dacă se ține seama de relația (9.103)

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = 0 \quad (9.111)$$

și

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9.112)$$

care are două soluții $2\alpha_1$ și $2\alpha_1 + \pi$ sau α_1 și $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$. Aceste unghiuri definesc două plane normale între ele, pe care efortul unitar tangențial este nul și pe care acționează σ_1 și respectiv σ_2, deci cele două plane principale. Normalele care definesc orientarea celor două plane formează direcțiile principale ale eforturilor unitare normale σ_1 și σ_2 (fig. 9.44, *a*).

Pentru precizarea planului principal *1*, se poate demonstra următoarea regulă: dintre cele două unghiuri α_1 şi $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, unghiul a cărui tangentă are acelaşi semn cu τ_{xy} defineşte planul principal *1*. Normala pe acest plan reprezintă direcţia principală *1* (fig. 9.44, *b*).

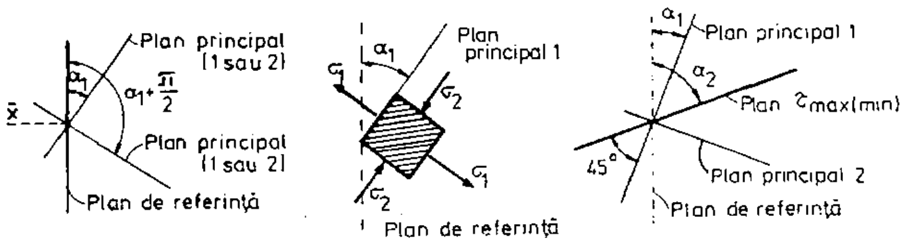


Fig. 9.44.

9.3.4.3. **Variaţia efortului unitar tangenţial τ_α în jurul unui punct.** Din analiza echilibrului elementului de volum rezultă că, o dată cu variaţia orientării normalei $\bar{n}$, efortul unitar tangenţial τ_α variază cu unghiul α. Orientarea pentru care se obţin valorile maxime şi minime ale funcţiei τ_α, rezultă prin anularea derivatei

$$\frac{d\tau_\alpha}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha = 0 \qquad (9.113)$$

sau

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_2 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (9.114)$$

cu două soluţii $2\alpha_2$ şi $2\alpha_2 + \pi$ sau α_2 şi $\alpha_2 + \frac{\pi}{2}$. Aceste unghiuri definesc două plane normale între ele pe care efortul unitar τ_α este maxim sau minim (fig. 9.44, *c*).

Din relaţiile (9.112) şi (9.114) rezultă

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_1\, \mathrm{tg}\, 2\alpha_2 = -1 \qquad (9.115)$$

deci direcţiile definite de unghiurile $2\alpha_1$ şi $2\alpha_2$ sînt perpendiculare, iar direcţiile definite de α_1 şi α_2 fac între ele un unghi de 45°.

În consecinţă, planele pe care acţionează eforturile unitare tangenţiale maxime şi minime sînt bisectoarele unghiului între planele principale (v. fig. 9.44, *c*).

Pentru obţinerea valorilor extreme ale efortului unitar τ_α, se introduce în relaţia (9.103) expresia rădăcinii derivatei, tg $2\alpha_2$ [rel. (9.114)]. Rezultă

$$\tau_{\alpha\, max(min)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \qquad (9.116)$$

9.3.4.4. **Determinarea grafică a eforturilor unitare principale şi direcţiilor principale cu ajutorul cercului lui Mohr.** Presupunind cunoscute planele principale şi eforturile principale σ_1 şi σ_2, adoptînd ca plan de referinţă planul

principal *1*, componentele σ_α şi τ_α care acţionează pe un plan care face unghiul β cu planul de referinţă (fig. 9.45, *a*), au expresiile

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta \qquad (9.117)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\beta. \qquad (9.118)$$

Eliminind parametrul β între relaţiile de mai înainte rezultă

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \qquad (9.119)$$

sau

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 = R^2 \qquad (9.120)$$

unde s-a notat $\xi = \sigma_\alpha$, $a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, $\eta = \tau_\alpha$ şi $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

S-a obţinut ecuaţia unui cerc care reprezentat în sistemul de axe σ_α, τ_α are centrul *C* de coordonate $(a,\ 0)$ şi rază *R*. Un punct de pe cerc reprezintă prin coordonatele sale eforturile unitare σ_α şi τ_α pe un plan care face unghiul β cu planul principal *1*.

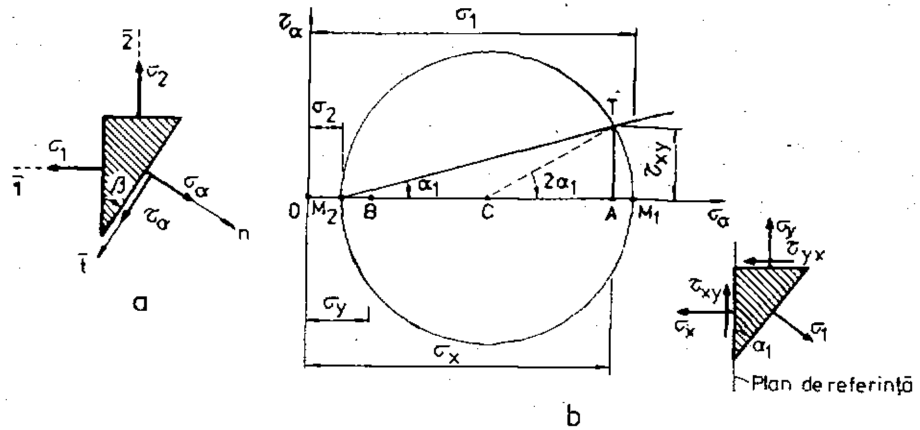


Fig. 9.45.

În sistemul de axe σ_α şi τ_α cu sensurile pozitive reprezentate in fig. 9.45, *b*, se reprezintă segmentele $\overline{OA} = \sigma_x$ şi $\overline{OB} = \sigma_y$. La jumătatea segmentului $\overline{AB}$ se găseşte centrul cercului *C* întrucît

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \qquad (9.121)$$

Pe perpendiculara din punctul *A* se construieşte segmentul $\overline{AT} = \tau_{xy}$. Cu raza $\overline{CT}$ se construieşte cercul, care intersectează axa σ_α în punctele M_1 şi M_2. Rezultă pe construcţia grafică realizată

$$\overline{OM_1} = \overline{OC} + \overline{CM_1} \qquad (9.122)$$

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{şi} \quad \overline{CM_1} = \overline{CT} = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AT}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \qquad (9.123)$$

Deci

$$\overline{OM}_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_1 \qquad (9.124)$$

și

$$\overline{OM}_2 = \overline{OC} - \overline{CM}_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sigma_2. \qquad (9.125)$$

Din triunghiul ATC, unghiul cu vîrful în C este $2\alpha_1$ deoarece

$$\text{tg } 2\alpha_1 = \frac{\overline{AT}}{\overline{AC}} \qquad (9.126)$$

unde

$$\overline{AT} = \tau_{xy} \qquad \text{iar} \qquad \overline{AC} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \qquad \text{deci}$$

$$\text{tg } 2\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (9.127)$$

Unghiul între planul de referință (reprezentat pe cerc prin T) și planul principal 1 (reprezentat prin M_1) este α_1 și se măsoară pe volumul elementar de la planul de referință în același sens cu cel rezultat pe cerc de la T spre M_1 (fig. 9.45, *b*).

9.3.4.5. **Eforturi unitare în jurul unui punct în cazul grinzilor.** În starea plană de eforturi corespunzătoare grinzilor, uzual se consideră $\sigma_y = 0$, deci tensorul eforturilor unitare este

$$T_\sigma^\varphi = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.128)$$

În consecință, relațiile de mai înainte devin

$$\text{tg } 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} \qquad (9.129)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \qquad (9.130)$$

$$\text{tg } 2\alpha_2 = -\frac{\sigma_x}{2\tau_{xy}}; \qquad \tau_{max(min)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \qquad (9.131)$$

9.3.4.6. **Traiectoriile direcțiilor principale la grinzi solicitate la încovoiere cu forță tăietoare.** În fiecare punct al unei grinzi acționată de o încărcare dată se pot determina componentele tensorului eforturilor unitare T_σ^φ și pe baza acestora se stabilesc două direcții după care sînt dirijate eforturile unitare principale σ_1 și σ_2. Se consideră un punct curent dintr-o secțiune transversală în care s-a determinat o direcție principală. Se prelungește această direcție pînă la intersecția cu o secțiune transversală vecină. Se obține un nou punct în care se determină direcția principală respectivă. Se prelungește această direcție pînă la intersecția cu o nouă secțiune vecină și se repetă operațiile descrise parcurgînd toate secțiunile grinzii. Va rezulta o linie poligonală care la limită, pentru secțiuni infinit apropiate, tinde spre o linie curbă care se bucură de

proprietatea că tangenta în fiecare punct coincide cu una din direcțiile principale. Această curbă poartă numele de traiectoria eforturilor unitare normale principale. Deoarece în fiecare punct există două direcții principale, vor exista două familii, de asemenea curbe. Ținînd seama că direcțiile principale sînt perpendiculare între ele, în fiecare punct de intersecție curbele sînt ortogonale (fiecare traiectorie dintr-o familie este ortogonală cu toate traiectoriile din cealaltă familie).

Se poate obține o imagine calitativă a traiectoriilor eforturilor unitare principale prin determinarea direcțiilor principale în cîteva puncte caracteristice dintr-o secțiune a unei grinzi (fig. 9.46).

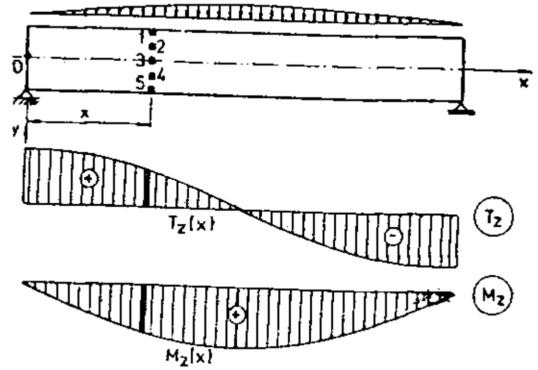


Fig. 9.46.

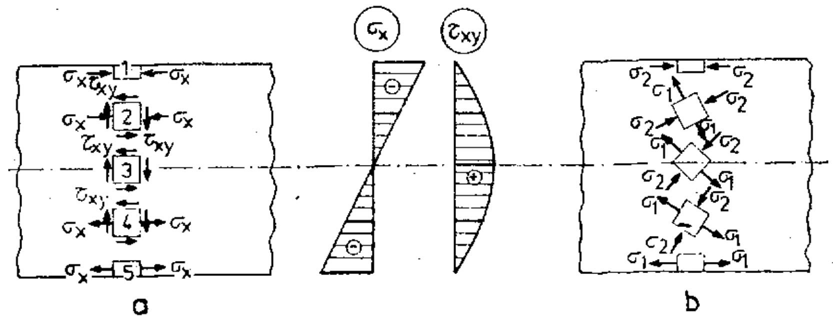


Fig. 9.47.

Se consideră cinci puncte pe înălțimea unei secțiuni transversale solicitată la un moment încovoietor M_z și o forță tăietoare T_z pozitive. Cu ajutorul formulelor lui Navier și Juravski se determină componentele tensorului eforturilor unitare în fiecare punct considerat (fig. 9.47, *a*). Pe baza acestora se determină eforturile principale și direcțiile principale (fig. 9.47, *b*). Pentru o prezentare sugestivă a modificării direcțiilor principale pe înălțimea secțiunii transversale s-a utilizat reprezentarea grafică cu ajutorul cercului lui Mohr (fig. 9.48).

Pe baza studiului variației direcțiilor principale pe înălțimea grinzii se pot trasa cele două familii de curbe ale traiectoriilor eforturilor unitare principale. Pentru grinda simplu rezemată din fig. 9.46, aceste familii de curbe sînt prezentate în fig. 9.49.

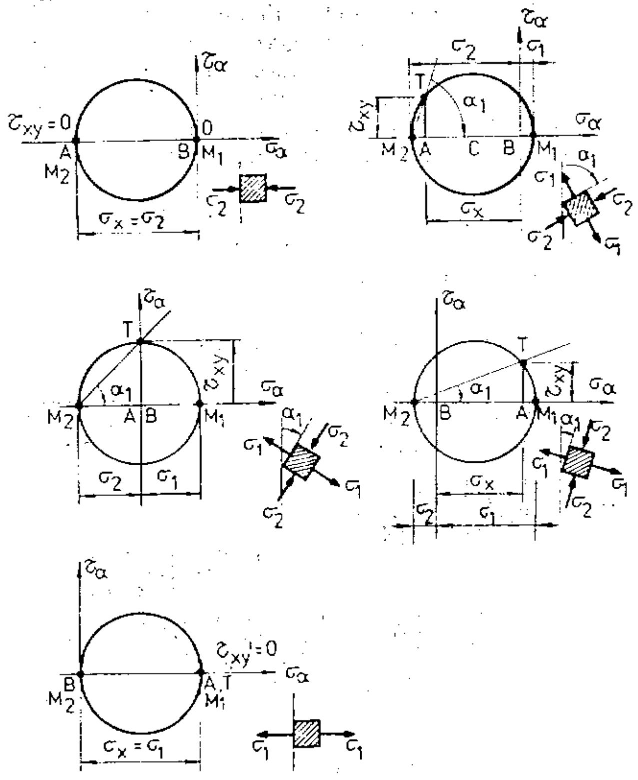


Fig. 9.48.

Traiectoriile eforturilor unitare normale principale prezintă un interes practic deosebit în cazul betonului armat, servind la determinarea secțiunilor de ridicare a armăturilor și dau o imagine intuitivă a modului de scurgere a eforturilor în armături. Teoretic, traseul armăturilor trebuie să urmărească traiectoriile efortului unitar normal principal σ_1 (de întindere) în vederea preluării acestor eforturi. Practic, pentru o execuție simplificată, armăturile sînt drepte și ridicate la 45° în zona în care traiectoriile lui σ_1 intersectează axa longitudinală a grinzii (v. fig. 9.49).

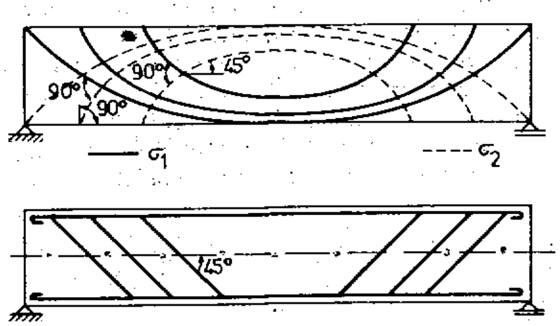


Fig. 9.49.

9.3.5. TEORII DE REZISTENȚĂ

În general, la solicitarea unui corp sau a unui element de construcție, se pot pune în evidență o serie de factori care caracterizează siguranța elementului analizat față de anumite stări limită de rezistență sau de deformație : starea de eforturi (σ, τ), starea de deformație (ε, γ), energia de deformație (U_i) etc. Simpla determinare a acestor caracteristici nu poate stabili factorul hotărîtor al rezistenței elementului de construcție analizat. De asemenea, nici studiile experimentale nu pot stabili care dintre acești factori caracterizează rezistența elementului pînă la atingerea unei stări limită, care poate fi ruperea sau atingerea stării de curgere a materialului, întrucît la solicitarea corpului toți factorii enumerați apar concomitent. De aceea, încă de la începuturile dezvoltării teoriei de calcul a structurilor de rezistență s-a admis prin ipoteză, în baza unor experiențe simple, influența hotărîtoare numai a unuia din factori. Pe baza ipotezei admise, elementul analizat ar trebui să atingă starea limită de rezistență (rupere sau curgere) pentru orice tip de solicitare, cînd factorul considerat hotărîtor ajunge la limita de rezistență. Funcție de factorul considerat ca factor hotărîtor, se pot formula numeroase teorii de rezistență. Ideea de bază în dezvoltarea teoriilor de rezistență este că pe baza caracteristicilor de comportare a materialului determinate pentru solicitări simple, să se poată aprecia comportarea elementului analizat solicitat la stări de eforturi complexe, numai pe baza teoriei.

Datorită diversității factorilor care intervin în studiul pentru elaborarea unei teorii generale asupra ruperii materialelor nu este posibil a se preciza o teorie unică, aplicabilă tuturor tipurilor de solicitări. Valabilitatea fiecărei teorii poate fi apreciată numai comparînd rezultatele experimentale cu cele obținute pe cale teoretică. Ținînd seama de complexitatea factorilor care intervin, nici una din teoriile formulate nu acoperă toate cazurile posibile. Fiecare dintre ele este confirmată de unele experiențe și infirmată de altele. De aceea, aplicarea unei teorii trebuie făcută cu discernămînt pentru a se putea încadra analiza în domeniul de valabilitate al teoriei.

În continuare se vor prezenta, pe scurt, particularizate la starea plană de solicitare, principalele teorii de rezistență clasice.

9.3.5.1. **Teoria eforturilor unitare normale maxime.** Conform acestei teorii, un corp, într-un punct al său, ajunge la starea limită cînd efortul unitar normal maxim atinge rezistența limită σ_0 a materialului, indiferent de tipul solicitării. În aceste condiții, σ_0 se obține prin cea mai simplă experiență (întindere monoaxială) iar σ_{max} este unul din eforturile unitare principale. Considerînd valoarea rezistenței limită egală la întindere și compresiune, condițiile de rezistență sînt

$$-\sigma_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_0 ; \quad -\sigma_0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_0 \qquad (9.132)$$

unde σ_1, σ_2 sînt eforturile unitare principale în punctul considerat.

Din punctul de vedere al relațiilor de calcul, prin introducerea unei mărimi convenționale σ_{ech} rezultă

$$\sigma_{ech} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leqslant \sigma_0 \qquad (9.133)$$

unde $\sigma_{1,2}$ se determină cu relațiile (9.110) sau (9.130)

9.3.5.2. **Teoria deformațiilor specifice ε maxime.** Conform acestei teorii, un corp, într-un punct al său, își pierde capacitatea de rezistență cînd deformația specifică ε_{max} depășește o deformație specifică limită ε_0, indiferent de tipul de solicitare.

Întrucît ε_{max} este una din deformațiile specifice aferente direcțiilor principale, condițiile de rezistență se exprimă sub forma

$$-\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0 ; \quad -\varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_0. \tag{9.134}$$

Admițînd că limita de rezistență se găsește în domeniul de comportare elastică a materialului, se pot utiliza relațiile între eforturi unitare și deformații specifice

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1) \tag{9.135}$$

unde σ_1, σ_2 sînt eforturile unitare normale principale, E este modulul de elasticitate longitudinal iar μ — coeficientul lui Poisson.

Deformația limită se stabilește pentru solicitarea de întindere axială

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E}\sigma_0 \tag{9.136}$$

Introducînd relațiile (9.135), (9.136) în relația (9.134), se obțin condițiile de rezistență exprimate în eforturi unitare

$$-\sigma_0 \leqslant \sigma_1 - \mu\sigma_2 \leqslant \sigma_0 \qquad -\sigma_0 \leqslant \sigma_2 - \mu\sigma_1 \leqslant \sigma_0. \tag{9.137}$$

Relațiile de calcul pot fi puse sub forma

$$\sigma_{ech} = \max(|\sigma_1 - \mu\sigma_2|, |\sigma_2 - \mu\sigma_1|) \leqslant \sigma_0 \tag{9.138}$$

care, pentru cazul grinzilor ($\sigma_x \neq 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, $\tau_{xz} \neq 0$), devine

$$\sigma_{ech} = |\sigma_x|\left(\frac{1-\mu}{2} + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{1 + 4\frac{\tau^2}{\sigma_x^2}}\right) \leqslant \sigma_0 \tag{9.139}$$

unde $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$.

Pentru oțel ($\mu = 0{,}3$), relația de calcul (9.139) este

$$\sigma_{ech} = |\sigma_x|\left(0{,}35 + 0{,}5\sqrt{1 + 4\frac{\tau^2}{\sigma_x^2}}\right) \leqslant \sigma_0.$$

9.3.5.3. **Teoria eforturilor unitare tangențiale maxime.** Conform acestei teorii, un corp, într-un punct al său, își pierde capacitatea de rezistență cînd efortul unitar tangențial maxim atinge rezistența limită τ_0, indiferent de tipul solicitării.

Exprimat funcție de eforturile unitare normale principale, τ_{max} are valoarea

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{9.140}$$

iar τ_0 se obține pentru solicitarea de întindere monoaxială în care $\sigma_0 = \sigma_1$ și deci

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}. \tag{9.141}$$

Condiția de rezistență poate fi exprimată analitic sub forma

$$-\tau_0 \leqslant \tau_{max} \leqslant \tau_0 \tag{9.142}$$

sau

$$-\sigma_0 \leqslant \sigma_1 - \sigma_2 \leqslant \sigma_0 ; \quad -\sigma_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_0 ; \quad -\sigma_0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_0. \tag{9.143}$$

Relațiile de calcul practic pot fi puse sub forma

$$\sigma_{ech} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \leqslant \sigma_0. \tag{9.144}$$

Dacă σ_1 și σ_2 sînt de semne contrarii, condiția de rezistență este $|\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant \sigma_0$, iar dacă σ_1 și σ_2 sînt de același semn, una din condițiile $|\sigma_1| \leqslant \sigma_0|$, $|\sigma_2| \leqslant \sigma_0$ este hotărîtoare.

În cazul grinzilor ($\sigma_x \neq 0$, $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 \neq 0$), σ_1 și σ_2 sînt întotdeauna de semne contrarii, deci condiția de rezistență este

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leqslant \sigma_0. \tag{9.145}$$

9.3.5.4. **Teoria energiei potențiale specifice de deformație.** Conform acestei teorii, un corp își pierde capacitatea de rezistență într-un punct cînd energia potențială specifică de deformație U_i depășește o energie potențială specifică de deformație limită U_i^0, indiferent de tipul solicitării.

Condiția de rezistență este

$$U_i \leqslant U_i^0. \tag{9.146}$$

Admițînd că starea limită de rezistență nu depășește domeniul comportării elastice a materialului, expresia energiei potențiale specifice de deformație funcție de eforturile unitare principale poate fi scrisă sub forma

$$U_i = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2) \tag{9.147}$$

iar U_i^0 se determină pentru solicitarea de întindere monoaxială cu $\sigma_1 = \sigma_0$ și $\sigma_2 = 0$

$$U_i^0 = \frac{1}{2E}\sigma_0^2. \tag{9.148}$$

Introducînd relațiile (9.147), (9.148) în (9.146), rezultă condiția de rezistență

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2 \leqslant \sigma_0^2. \tag{9.149}$$

Relațiile de calcul practice pot fi scrise sub forma

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2} \leqslant \sigma_0. \tag{9.150}$$

În cazul grinzilor ($\sigma_x \neq 0$, $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$), relația (9.150) devine

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 2(1+\mu)\tau^2} \leqslant \sigma_0 \tag{9.151}$$

iar pentru oțel ($\mu = 0{,}3$)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 2{,}6\tau^2} \leqslant \sigma_0. \tag{9.152}$$

9.3.5.5. **Teoria energiei potențiale specifice de deviație.** Pe baza observației că un material nu poate ajunge la starea limită de rezistență în cazul stării de compresiune uniformă, rezultă că energia potențială de deformație necesară schimbării volumului fără schimbarea formei geometrice, nu trebuie să intervină în criteriile de rezistență. Astfel, în teoria energiei potențiale specifice de deformație trebuie eliminată energia potențială de modificare a volumului, rămînînd numai cea de modificare a formei

$$U_i^D = U_i - U_i^V. \tag{9.153}$$

Conform acestei teorii, un corp își pierde capacitatea de rezistență cînd energia potențială specifică de deviație U_i^p depășește o energie potențială specifică de deviație limită $U_i^{p,0}$, indiferent de tipul solicitării.

Condiția de rezistență este

$$U_i^p \leqslant U_i^{p,0} \qquad (9.154)$$

În stadiul de comportare elastică a materialului, U_i^p, funcție de eforturile unitare principale, are expresia

$$U_i^p = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \qquad (9.155)$$

iar $U_i^{p,0}$ se determină pentru solicitarea de întindere monoaxială, $\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2 = 0$

$$U_i^{p,0} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_0^2. \qquad (9.156)$$

Substituind relațiile (9.155), (9.156) în (9.154) rezultă

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \leqslant \sigma_0^2. \qquad (9.157)$$

Pentru calculul practic, relația (9.157) se pune sub forma

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} \leqslant \sigma_0 \quad \text{sau} \quad \sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leqslant \sigma_0 \qquad (9.158)$$

iar în cazul grinzilor ($\sigma_x \neq 0$, $\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 \neq 0$)

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau^2} \leqslant \sigma_0. \qquad (9.159)$$

Aplicația 9.9. Antretoaza unui pod de cale ferată are secțiunea alcătuită ca în fig. 9.50, *b*. Pentru simplificarea calculelor, schema statică a antretoazei este cea prezentată în fig. 9.50, *a*. Să se verifice secțiunea antretoazei la

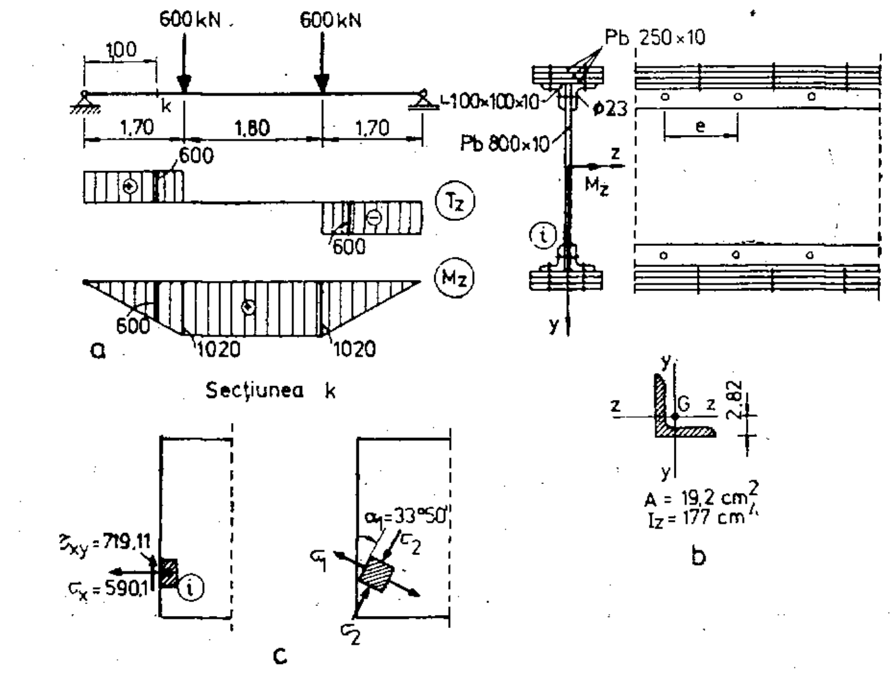


Fig. 9.50

încovoiere ($\sigma_a = 1\,400$ daN/cm²) și inima antretoazei la lunecare ($\tau_a = 940$ daN/cm²), să se calculeze distanța e dintre nituri și să se stabilească eforturile unitare principale în punctul i din secțiunea k.

1) Verificarea secțiunii antretoazei la încovoiere se face în secțiunea cu moment încovoietor maxim

$$I_{zbr} = \frac{1\cdot 80^3}{12} + 2\left(\frac{25\cdot 3^3}{12} + 25\cdot 3\cdot 41{,}5^2\right) + 4(177 + 19{,}2\cdot 37{,}18^2) =$$

$$= 408\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_{zsl} = 4\left(\frac{2{,}3\cdot 4^3}{12} + 2{,}3\cdot 4\cdot 41^2\right) = 61\,910 \text{ cm}^4$$

$$I_{z\,net} = 408\,000 - 61\,910 = 346\,090 \text{ cm}^4$$

$$W_{z\,net} = \frac{I_{z\,net}}{y_{max}} = \frac{346\,090}{43} = 8\,048{,}6 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_z}{W_{z\,net}} = \frac{1\,020\cdot 10^4}{8\,048{,}6} = 1\,267{,}30 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

2) Verificarea efortului unitar tangențial se face în puncte situate pe axa neutră a secțiunii cu forță tăietoare maximă

$$S_{z\,br} = 25\cdot 3\cdot 41{,}5 + 2\cdot 19{,}2\cdot 37{,}18 + 40\cdot 1\cdot 20 = 5\,340 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{ef} = \frac{T_z S_{z\,br}}{b I_{z\,br}} = \frac{600\cdot 10^2\cdot 5\,340}{1{,}0\cdot 408\,000} = 785{,}3 \text{ daN/cm}^2 < \tau_a = 940 \text{ daN/cm}^2.$$

3) La stabilirea distanței dintre nituri se consideră forța tăietoare maximă, iar calculul se va face pentru niturile de gît ($\tau_a = 0{,}8\sigma_a$; $\sigma_{asl} = 2\sigma_a$)

$$S_{zg} = 25\cdot 3\cdot 41{,}5 + 2\cdot 19{,}2\cdot 37{,}18 = 4\,540 \text{ cm}^3$$

$$R_f = n_f\frac{\pi d^2}{4}\tau_a = 2\cdot\frac{3{,}14\cdot 2{,}3^2}{4}\cdot 0{,}8\cdot 1\,400 = 9\,302 \text{ daN}$$

$$R_{cg} = d\Sigma t_{min}\sigma_{asl} = 2{,}3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\,400 = 6\,440 \text{ daN}$$

$$R_{nit} = R_{cg} = 6\,440 \text{ daN}.$$

Distanța e dintre nituri este

$$e = \frac{nR_{nit}I_{zbr}}{T_{z\,max}S_{zg}} = \frac{1\cdot 6\,440\cdot 408\,000}{60\,000\cdot 4\,540} = 9{,}65 \text{ cm}.$$

Avînd în vedere condiția $3d \leqslant e \leqslant 6d$ se alege $e = 9{,}50$ cm.

4) Determinarea eforturilor unitare normale principale și direcțiile principale în punctul i din secțiunea k

$$T_{z(k)} = 600 \text{ kN}; \quad M_{z(k)} = 600 \text{ kN·m}$$

$$\sigma_{x(i)} = \frac{M_{z(k)}}{I_{z\,net}}y_i = +\frac{600\cdot 10^4}{346\,090}30 = +590{,}10 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy(i)} = \frac{T_{z(k)}\cdot S_{zi}}{bI_{zbr}} = \frac{600\cdot 10^2\cdot 4\,890}{1\cdot 408\,000} = +719{,}11 \text{ daN/cm}^2$$

$$S_{z(i)} = 25\cdot 3\cdot 41{,}5 + 2\cdot 19{,}2\cdot 37{,}18 + 10\cdot 1\cdot 35 = 4\,890 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{x(i)}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{x(i)}^2 + 4\tau_{xy(i)}^2} = \frac{590{,}10}{2} \pm \sqrt{(590{,}10)^2 + 4\cdot(719{,}11)^2} =$$

$$= 295{,}05 \pm 777{,}29$$

$$\sigma_1 = 295{,}05 + 777{,}29 = 1\,072{,}34 \text{ daN/cm}^2$$ (cel mai mare efort unitar normal de întindere);

$$\sigma_2 = 295{,}05 - 777{,}29 = -482{,}24 \text{ daN/cm}^2$$ (cel mai mare efort unitar normal de compresiune);

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_1 = \frac{2\tau_{xy(i)}}{\sigma_{x(i)}} = \frac{2 \cdot 719{,}11}{590{,}10} = 2{,}437\,; \qquad 2\alpha_1 = 67°41'30''$$

$$\alpha_1 = 33°50'45''$$

$$\alpha_1 + \frac{\pi}{2} = 123°50'45''$$

Întrucît tg α_1 are acelaşi semn cu τ_{xy} în punctul i, rezultă că α_1 defineşte planul principal *1* (fig. 9.50).

Aplicaţia 9.10. Grinda simplu rezemată din fig. 9.51, *a* are secţiunea transversală alcătuită din platbande solidarizate cu sudură continuă (fig. 9.51, *b*). Să se verifice secţiunea grinzii la încovoiere ($\sigma_a = 1\,400$ daN/cm²), să se verifice cordoanele de sudură pe baza teoriei energiei potenţiale specifice de deviaţie ($\tau_0 = 1\,400$ daN/cm²) şi să se stabilească eforturile unitare normale principale şi direcţiile principale în punctul i din secţiunea k (fig. 9.51, *a*, *b*).

1) Verificarea secţiunii grinzii la încovoiere se face în secţiunea cu moment încovoietor maxim

$$I_z = \frac{1 \cdot 60^3}{12} + 2\left(\frac{30 \cdot 1^3}{12} + 30 \cdot 1 \cdot 30{,}5^2 + \frac{28 \cdot 1^3}{12} + 28 \cdot 1 \cdot 31{,}5^2 + \frac{25 \cdot 1^3}{12} + \right.$$

$$\left. + 25 \cdot 1 \cdot 32{,}5^2\right) = 182\,200 \text{ cm}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{182\,200}{33} = 5\,521{,}2 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{762{,}5 \cdot 10^4}{5521{,}2} = 1\,381 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

2) Verificarea cordoanelor de sudură se face în secţiunea de la stînga forţei concentrate unde atît momentul încovoietor cît şi forţa tăietoare au valori maxime.

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leqslant \sigma_0 \quad \text{unde} \quad \sigma_{x(i)} = \frac{M_z}{I_z} y_i\,; \quad \tau_{xy(i)} = \frac{T_z S_{z(i)}}{2aI_z}.$$

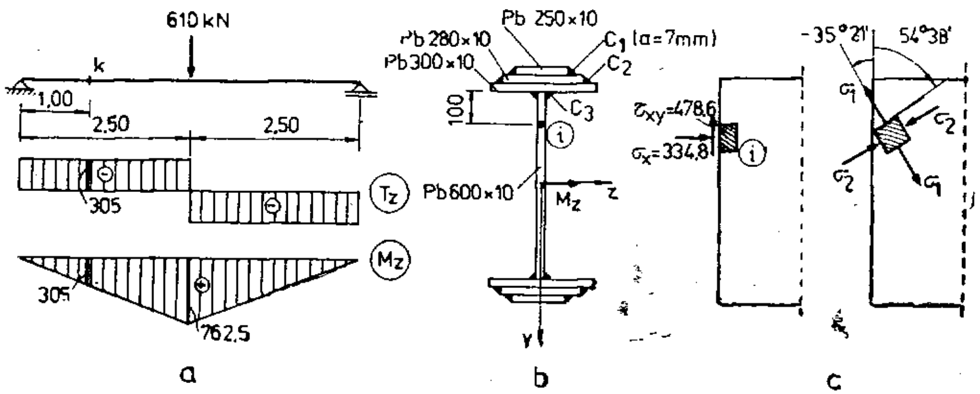


Fig. 9.51.

— Cordonul C_1 de sudură

$$S_{z(1)} = 25 \cdot 1 \cdot 32{,}5 = 812{,}5 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{x(1)} = \frac{762{,}5 \cdot 10^4}{182\,200} \cdot 32{,}5 = 1\,360 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy(1)} = \frac{305 \cdot 10^2 \cdot 812{,}5}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 182\,200} = 97{,}15 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{1\,360^2 + 3 \cdot 97{,}15^2} = 1\,370{,}40 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_0 = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

— Cordonul C_2 de sudură

$$S_{z(2)} = 25 \cdot 1 \cdot 32{,}5 + 28 \cdot 1 \cdot 31{,}5 = 1\,694{,}5 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{x(2)} = \frac{762{,}5 \cdot 10^4}{182\,200} \cdot 31{,}5 = 1\,318{,}3 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy(2)} = \frac{305 \cdot 10^2 \cdot 1\,694{,}5}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 182\,200} = 202{,}6 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{1\,318{,}3^2 + 3 \cdot 202{,}6^2} = 1\,364{,}2 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_0 = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

— Cordonul C_3 de sudură

$$S_{z(3)} = 1\,694{,}5 + 30 \cdot 1 \cdot 30{,}5 = 2\,609{,}5 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{x(3)} = \frac{762{,}5 \cdot 10^4}{182\,200} \cdot 30 = 1\,255{,}5 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy(3)} = \frac{305 \cdot 10^2 \cdot 2\,609{,}5}{2 \cdot 0{,}7 \cdot 182\,200} = 312 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{ech} = \sqrt{1\,255{,}5^2 + 3 \cdot 312^2} = 1\,366{,}8 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_0 = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

3) Determinarea eforturilor unitare normale principale şi direcţiile principale în punctul i din secţiunea k

$$T_{z(k)} = 305 \text{ kN}\,; \qquad M_{z(k)} = 305 \text{ kN·m}.$$

$$\sigma_{x(i)} = -\frac{305 \cdot 10^4}{182\,200} \cdot 20 = -334{,}8 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_{xy(i)} = +\frac{305 \cdot 10^2 \cdot 2\,859{,}5}{1 \cdot 182\,200} = +478{,}67 \text{ daN/cm}^2$$

$$S_{z(i)} = 2\,609{,}5 + 10 \cdot 1 \cdot 25 = 2\,859{,}5 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{1,2} = -\frac{334{,}8}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-334{,}8)^2 + 4(478{,}67)^2} = -167{,}4 \pm 507{,}10$$

$$\sigma_1 = -167{,}4 + 507{,}10 = 339{,}7 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = -167{,}4 - 507{,}10 = -674{,}5 \text{ daN/cm}^2$$

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_1 = \frac{2 \cdot 478{,}67}{(-334{,}8)} = -2{,}859\,; \; 2\alpha_1 = -70°43'27''\,; \; \alpha_1 = -35°21'43''$$

$$\alpha_1 + \frac{\pi}{2} = 54°38'17''.$$

Întrucît $\mathrm{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)$ are acelaşi semn cu τ_{xy} în punctul i, rezultă că $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ defineşte planul principal *1* (fig. 9.51, *c*).

Aplicația 9.11. Să se verifice eforturile unitare în cordoanele de sudură de la talpa superioară a grinzii din fig. 9.52, în secțiunea de sub forța concentrată ($\sigma_0 = 1\,400$ daN/cm²). Transmiterea încărcării se realizează prin intermediul unei traverse din lemn așezată direct pe talpa superioară a grinzii (fig. 9.52). Verificarea se va face cu teoria energiei potențiale specifice de deviație.

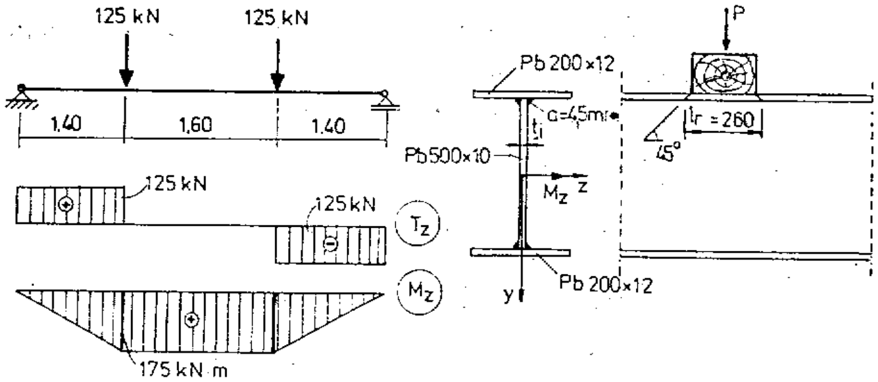


Fig. 9.52.

Datorită momentului încovoietor M_z în secțiunea de sub forța concentrată, în punctele corespunzătoare rădăcinii sudurii, se dezvoltă eforturi unitare normale σ_x. Datorită forței tăietoare T_z în aceeași secțiune și în aceleași puncte, se dezvoltă eforturi unitare tangențiale τ_{xy}. Din încărcarea locală concentrată rezultă un efort unitar normal σ_y care se poate calcula aproximativ sub forma

$$\sigma_y = \frac{P}{l_r t_i},$$

unde t_i este grosimea inimii iar l_r este lățimea de repartiție considerînd planuri la 45° de la baza traversei pînă la rădăcina sudurii.

Condiția de rezistență conform teoriei amintite este

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leqslant \sigma_0.$$

1) Determinarea efortului unitar normal σ_x

$$I_z = \frac{1\cdot 50^3}{12} + 2\left(\frac{20\cdot 1{,}2^3}{12} + 20\cdot 1{,}2\cdot 25{,}6^2\right) = 41\,879 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y_s = -\frac{175\cdot 10^4}{41\,879}\cdot 25 = -1\,044{,}67 \text{ daN/cm}^2$$

2) Determinarea efortului unitar normal σ_y

$$\sigma_y = \frac{P}{l_r t_i} = -\frac{125\cdot 10^2}{26\cdot 1} = -480{,}77 \text{ daN/cm}^2.$$

3) Determinarea efortului unitar tangențial τ_{xy}

$$S_{z(s)} = 20\cdot 1{,}2\cdot 25{,}6 = 614{,}40 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_z S_{z(s)}}{2aI_z} = \frac{125\cdot 10^2\cdot 614{,}4}{2\cdot 0{,}45\cdot 41\,879} = +203{,}76 \text{ daN/cm}^2.$$

4) Verificarea efortului unitar echivalent la nivelul sudurii

$$\sigma_{ech} = \sqrt{(-1\,044{,}67)^2 + (-480{,}77)^2 - (-1\,044{,}67)(-480{,}77) + 3(203{,}76)^2} = 972 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_0 = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

10. Deformațiile elastice ale structurilor alcătuite din bare

Sub acțiunea încărcărilor orice structură se deformează. Pe lîngă condițiile de rezistență și de stabilitate, construcțiile trebuie să fie astfel alcătuite și dimensionate, încît deformațiile să se găsească sub anumite limite, a căror depășire le-ar face improprii unei exploatări normale. În funcție de destinația construcției, diverse prescripții tehnice fixează valoarea maximă admisă pentru unele deplasări. De exemplu, pentru podurile de cale ferată, săgeata elastică produsă de încărcarea utilă la grinzile independente simplu rezemate, la grinzile continue sau la grinzile cu console în deschiderea centrală, nu va depăși limita de 1/750 din deschidere.

La o structură poate să intereseze fie deplasările anumitor puncte izolate, fie poziția deformată în ansamblul ei, poziție caracterizată prin proiecția deplasărilor pe o direcție dată.

Calculul deplasărilor elastice se impune și din necesitatea verificării rezultatelor teoretice, obținute pe baza admiterii anumitor ipoteze simplificatoare, cu cele experimentale ce rezultă din încărcarea structurii cu forțe de valoare cunoscută. În acest sens, structurile cu deschideri importante sau care reprezintă noutăți în ceea ce privește concepția, materialele folosite sau metodele de execuție sînt supuse, înainte de darea în exploatare, unor încercări statice și dinamice cu care ocazie, printre altele, sînt măsurate și deplasările anumitor secțiuni. Din confruntarea deplasărilor efective, reale, cu cele furnizate de calcule, se pot trage concluzii asupra justeții ipotezelor și simplificărilor admise în calcule.

S-a arătat că, la structurile static nedeterminate, forțele de legătură, precum și eforturile în diversele secțiuni, nu pot fi determinate numai pe baza condiției de echilibru static, deoarece numărul de necunoscute este mai mare decît numărul de ecuații de echilibru. Este necesar a se face apel și la condiția de compatibilitate, care se referă la faptul că deformata structurii respectă atît legăturile interioare și exterioare cît și continuitatea materialului. În acest fel, studiul deformatei este necesar pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate.

Cauzele care produc deplasări sînt : forțele exterioare, variațiile de temperatură (sau alte cauze asimilate cu o variație de temperatură) și cedările de reazem.

Pentru calculul deplasărilor pot fi utilizate metode generale, aplicabile oricărei structuri, sau metode particulare, valabile sau eficiente numai anumitor tipuri de structuri.

Ipotezele admise la calculul deplasărilor elastice sînt cele semnalate în capitolele anterioare, și anume:

Ipoteza 1. Deplasările structurii sînt foarte mici în raport cu dimensiunile geometrice generale ale sale, ceea ce permite ca exprimarea condiției de echilibru static să se facă pe forma inițială, nedeformată a structurii.

Ipoteza 2. Materialul se consideră că este continuu, omogen și izotrop, iar legătura dintre eforturile unitare σ și deformațiile specifice ε este dată de legea lui Hooke. Pe baza admiterii ipotezei 1 precum și a comportării elastice a materialului, se poate aplica principiul suprapunerii efectelor sau principiul independenței acțiunii forțelor. Aceasta înseamnă că orice deplasare poate fi exprimată printr-o relație liniară în funcție de forțele care o produc.

10.1. NOȚIUNI GENERALE

10.1.1. LUCRUL MECANIC AL FORȚELOR EXTERIOARE

Se consideră grinda din fig. 10.1, *a* asupra căreia se aplică în secțiunea *i* o forță care crește lent, de la valoarea zero pînă la valoarea finală P_f. Acest mod simplificat de a considera aplicarea „statică" a încărcării pe structură are ca scop neglijarea energiei cinetice.

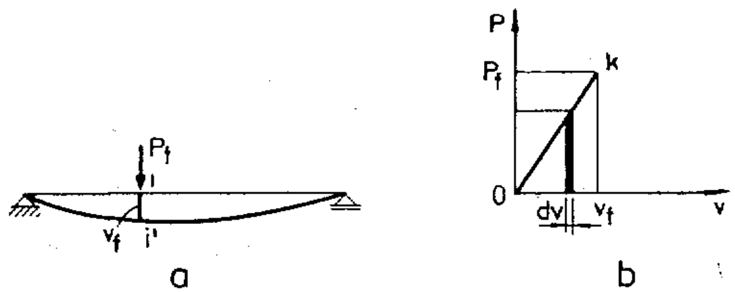


Fig. 10.1.

Deplasarea secțiunii *i* va crește de la zero și pînă la valoarea finală v_f corespunzătoare forței P_f. În baza ipotezei 2, legătura dintre mărimile forței *P* și deplasările *v* este liniară, fiind reprezentată în fig. 10.1, *b* prin dreapta *k*. În cursul deformării, punctul de aplicare al forței *P* parcurge deplasarea *ii'* și ca urmare, forța va produce un lucru mecanic, numit lucru mecanic exterior L_e. Evaluarea lucrului mecanic exterior se face pe baza expresiei lucrului mecanic elementar dL_e, a cărui valoare este

$$dL_e = P\,dv. \qquad (10.1)$$

Deoarece legătura dintre forța *P* și deplasarea *v* este liniară, se poate scrie

$$P = cv \text{ și deci } dL_e = cv\,dv$$

în care *c* este o constantă.

Rezultă

$$L_e = \int_0^{v_f} dL_e = c\int_0^{v_f} v\,dv = \frac{1}{2}cv_f^2.$$

Deoarece $P_f = cv_f$, se obține

$$L_e = \frac{1}{2}P_f v_f. \qquad (10.2)$$

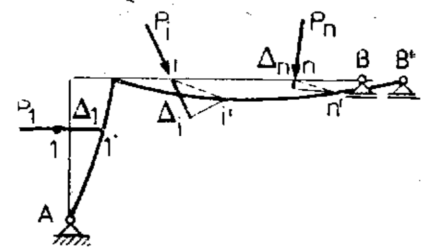


Fig. 10.2.

Coeficientul 1/2, care afectează produsul $P_f v_f$, se datorește aplicării statice a forței P_f, care crește de la zero și pînă la valoarea finală. Se vede că lucrul mecanic exterior este egal cu aria cuprinsă între dreapta *OK* și axa *Ov* (v. fig. 10.1, *b*).

Dacă pe structură sînt aplicate mai multe forțe, atunci lucrul mecanic exterior total se obține prin sumarea lucrurilor mecanice ale fiecărei forțe în parte. Cadrul din fig. 10.2 este încărcat static cu forțele $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ și ca urmare se deformează, astfel că punctele de aplicare a forțelor se deplasează din *1* în *1'*, respectiv din *i* în *i'* și din *n* în *n'*. Proiecțiile acestor deplasări pe direcțiile forțelor corespunzătoare sînt $\Delta_1, \ldots, \Delta_i, \ldots, \Delta_n$.

Lucrul mecanic exterior are valoarea

$$L_e = \frac{1}{2}(P_1\Delta_1 + \ldots + P_i\Delta_i + \ldots + P_n\Delta_n) = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_i. \qquad (10.3)$$

În mod similar, lucrul mecanic efectuat de un moment concentrat reprezintă jumătate din valoarea produsului dintre moment și rotirea corespunzătoare.

Deoarece lucrul mecanic exterior apare ca o consecință a deformării structurii sub acțiunea unor forțe aplicate pe aceasta, el este întotdeauna pozitiv, deformarea structurii făcîndu-se în sensul de acțiune al forțelor. Unele componente ale sale pot rezulta și negative, fiind însă, în valoare absolută, mai mici decît componentele pozitive. Lucrul mecanic exterior nu depinde decît de valorile finale ale forțelor și deplasărilor; rezultă că ordinea de aplicare a forțelor nu influențează mărimea lui, pentru că deformata finală este aceeași.

10.1.2. LUCRUL MECANIC AL FORȚELOR INTERIOARE. LUCRUL MECANIC DE DEFORMAȚIE

Ca urmare a acțiunii forțelor exterioare asupra unei structuri, în orice punct al acesteia, apar forțe și deformații interioare. Prin parcurgerea de către forțele interioare a deformațiilor respective rezultă un lucru mecanic, numit lucru mecanic al forțelor interioare sau lucru mecanic interior L_i. Expresia lui poate fi obținută considerînd lucrul mecanic al eforturilor unitare σ, τ. Este mai simplu însă de a evalua lucrul mecanic interior, plecînd de la eforturile din secțiune.

Lucrul mecanic interior este negativ, pentru că forțele interioare se opun deformării. Acest fapt poate fi ilustrat printr-un exemplu simplu, al unei bare drepte supuse la întindere centrică (fig. 10.3). Considerînd că materialul este alcătuit dintr-o serie de granule între care se exercită forțe interioare, suma

acestor forțe trebuie să fie egală cu N (fig. 10.3, *a*). Variația intervalului dintre două secțiuni situate la distanță dx este $\Delta(\mathrm{d}x)$, astfel că lucrul mecanic interior va fi

$$\mathrm{d}L_i = -\frac{1}{2}N\Delta(\mathrm{d}x).$$

Izolînd un element de lungime dx, asupra fețelor sale vor acționa eforturile N (fig. 10.3, *b*). Cele două fețe ale elementului se deplasează în sensul eforturilor N cu cantitatea $\Delta(\mathrm{d}x)$ și, drept urmare, rezultă un lucru mecanic de deformație

$$\mathrm{d}L_d = \frac{1}{2}N\Delta(\mathrm{d}x).$$

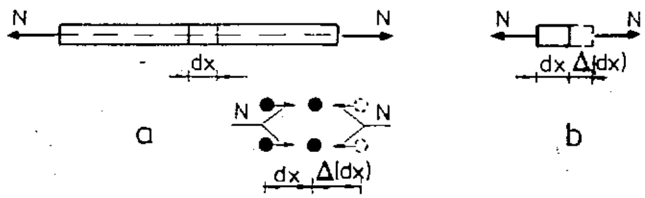


Fig. 10.3.

Se observă că

$$\mathrm{d}L_i = -\mathrm{d}L_d.$$

Calculîndu-se cele două lucruri mecanice pe întreaga structură, va rezulta

$$L_i = -L_d. \tag{10.4}$$

Lucrul mecanic de deformație L_d este simplu de calculat pornind de la lucrul mecanic al fiecărui efort care acționează în secțiunile unei bare.

10.1.3. EXPRESIA LUCRULUI MECANIC DE DEFORMAȚIE LA BARE DREPTE

Fie grinda dreaptă AB (fig. 10.4, *a*) la care urmează să se calculeze lucrul mecanic de deformație, ca urmare a încărcării cu forțele $P_1, \ldots, P_n$.

Sînt cunoscute valorile modulelor de elasticitate E și G ale materialului, precum și caracteristicile geometrice A și I ale secțiunilor transversale ale grinzii.

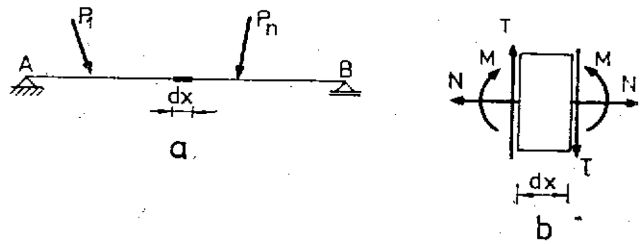


Fig. 10.4.

Un element de lungime dx, extras din această grindă, se va găsi în echilibru sub acțiunea eforturilor N, T, M de pe cele două fețe ale sale (fig. 10.4, *b*). Fiecare dintre cele trei eforturi nu produce deplasări decît după propria sa direcție, așa cum este arătat în fig. 10.5, *a*, *b*, *c*. Se va evalua lucrul mecanic elementar dL_e produs de eforturile N, T, M ca urmare a deformației elementului dx.

Forța axială N produce alungirea elementului dx cu cantitatea du (fig. 10.5). Lucrul mecanic al forței axiale este deci

$$\mathrm{d}L_d = \frac{1}{2}N\,\mathrm{d}u, \text{ în care } \mathrm{d}u = \varepsilon\,\mathrm{d}x = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x$$

adică

$$\mathrm{d}L_d = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}\mathrm{d}x. \tag{10.5}$$

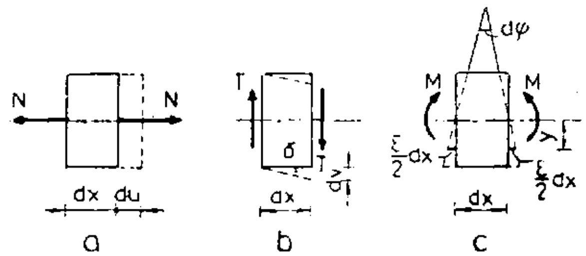


Fig. 10.5.

Sub acțiunea forței tăietoare are loc o lunecare relativă a celor două fețe cu cantitatea γ (fig. 10.5, *b*), ceea ce conduce la o deplasare relativă pe direcția forțelor tăietoare $\mathrm{d}v = \gamma\,\mathrm{d}x$, iar lucrul mecanic produs de aceste eforturi are valoarea

$$\mathrm{d}L_d = \frac{1}{2}T\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}T\gamma\,\mathrm{d}x, \text{ unde } \gamma = \eta\frac{T}{GA}.$$

Coeficientul η se datorește distribuției neuniforme a eforturilor unitare tangențiale, așa cum rezultă din formula lui Juravski. Pentru secțiunea dreptunghiulară, $\eta = 1{,}2$, iar pentru profile I, se poate lua în mod aproximativ $\eta = 2{,}1$.

Rezultă lucrul mecanic al forței tăietoare

$$\mathrm{d}L_d = \frac{1}{2}\eta\frac{T^2}{GA}\mathrm{d}x. \tag{10.6}$$

Momentul încovoietor M face ca cele două fețe ale elementului dx să se rotească, una în raport cu cealaltă, cu unghiul dφ (fig. 10.5, *c*).

Se vede că

$$\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2}y \text{ sau } \mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon}{y}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{Ey}\mathrm{d}x.$$

Din formula lui Navier se obține

$$\sigma = \frac{M}{I}y \text{ astfel că } \mathrm{d}\varphi = \frac{M}{EI}\mathrm{d}x.$$

Lucrul mecanic rezultă

$$dL_a = \frac{1}{2} M \, d\varphi \quad \text{sau} \quad dL_a = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx. \qquad (10.7)$$

Valoarea totală a lucrului mecanic elementar se obţine prin sumarea celor trei componente ale sale, respectiv lucrurile mecanice produse de eforturile N, T, M, adică

$$dL_a = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \eta \frac{T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx. \qquad (10.8)$$

Pentru întreaga bară AB, lucrul mecanic al eforturilor, sau lucrul mecanic de deformaţie, are expresia

$$L_a = \int_A^B dL_a = \frac{1}{2} \int N \, du + \frac{1}{2} \int T \, dv + \frac{1}{2} \int M \, d\varphi \qquad (10.9)$$

sau după explicitarea deplasărilor du, dv, $d\varphi$

$$L_a = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \eta \frac{T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx. \qquad (10.10)$$

Lucrul mecanic al eforturilor este acumulat în structură sub forma energiei de deformare. În cazul admiterii comportării elastice, energia de deformare face ca structura să revină la poziţia iniţială, dacă încărcările nu mai acţionează asupra sa.

Se fac următoarele observaţii :

— deoarece eforturile N, T, M intervin prin pătratul lor, aportul lor reprezintă nişte cantităţi pozitive şi ca urmare lucrul mecanic va fi pozitiv ;

— ponderea pe care fiecare dintre cele trei eforturi o aduce la valoarea totală a lucrului mecanic este foarte diferită. În general, la structuri la care solicitarea dominantă este încovoierea (grinzi, cadre), importanţa momentului încovoietor este dominantă, astfel că celelalte eforturi pot fi neglijate la calculul lucrului mecanic de deformaţie.

10.1.4. CONDIŢIA DE ECHILIBRU ELASTIC

O structură supusă încărcării cu un sistem de forţe P_i se deformează, ajungînd într-o nouă situaţie de echilibru. Prin deformare, forţele P_i efectuează un lucru mecanic $L_e = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i$ în timp ce forţele interioare produc un lucru mecanic $L_i = - L_a$.

Ca urmare a deplasării punctelor de aplicare a forţelor exterioare, energia potenţială a acestora scade, deoarece deplasarea se produce în sensul de acţiune al forţelor. Măsura scăderii energiei potenţiale a forţelor este dată de lucrul mecanic L_e efectuat de acestea. În schimb, structura înmagazinează o energie de deformare (egală cu lucrul mecanic de deformare L_a) care, în cazul comportării elastice, poate fi restituită dacă încărcările sînt îndepărtate. Ca urmare a aplicării statice a încărcării, nu există variaţie a energiei cinetice. Deoarece energia potenţială totală rămîne constantă, înseamnă că micşorarea

energiei potenţiale a forţelor conduce la o acumulare de energie potenţială în structură. Înlocuind variaţiile energiilor potenţiale prin lucrurile mecanice corespunzătoare, rezultă

$$L_e = L_a \quad \text{adică} \quad L_e = -L_i \quad \text{sau} \quad L_e + L_i = 0.$$

Lucrul mecanic total, obţinut prin sumarea lucrului mecanic al forţelor exterioare cu lucrul mecanic al forţelor interioare, este nul. Această relaţie constituie condiţia de echilibru elastic a unei structuri. Dacă se introduc expresiile determinate anterior, se obţine

$$\frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i - \left(\frac{1}{2} \int N du + \frac{1}{2} \int T dv + \frac{1}{2} \int M d\varphi \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i - \left(\frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \eta \frac{T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx \right) = 0$$

$$\sum P_i \Delta_i = \int N \, du + \int T \, dv + \int M \, d\varphi$$

$$\sum P_i \Delta_i = \int \frac{N^2}{EA} dx + \int \eta \frac{T^2}{GA} dx + \int \frac{M^2}{EI} dx. \qquad (10.11)$$

10.2. EXPRESIA GENERALĂ A DEPLASĂRILOR PUNCTUALE

Cauzele care produc deplasări sînt : încărcarea cu forţe, variaţiile de temperatură şi cedările de reazem.

S-a stabilit anterior condiţia de echilibru elastic a unei structuri caracterizată prin egalitatea dintre lucrul mecanic al forţelor exterioare, L_e şi lucrul mecanic de deformaţie, L_a sub forma

$$\sum P_i \Delta_i = \int N \, du + \int T \, dv + \int M \, d\varphi. \qquad (10.12)$$

Această relaţie va fi utilizată pentru stabilirea expresiei deplasărilor punctuale ale unei structuri.

10.2.1. ÎNCĂRCARE CU FORŢE (EXPRESIA MAXWELL-MOHR)

Fie structura din fig. 10.6 încărcată cu un sistem de forţe P_i sub acţiunea căruia se deformează, astfel că secţiunea j ajunge în j'. Se presupune că interesează cantitatea $\overline{jj''} = \Delta_{jk}$ şi care reprezintă proiecţia deplasării secţiunii j pe direcţia dată k. Pentru aceasta se consideră două situaţii de încărcare a structurii.

În prima etapă se aplică în secţiunea j, după direcţia k, o forţă unitară virtuală (fig. 10.7). Într-o secţiune a structurii apar eforturile n, t, m, produse de încărcarea unitară, iar structura va căpăta o deformată care nu interesează. În această situaţie, se adaugă încărcările reale ale structurii astfel că

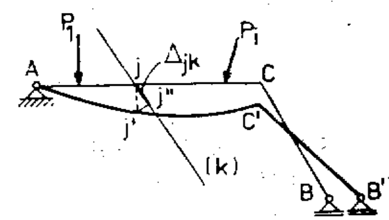


Fig. 10.6.

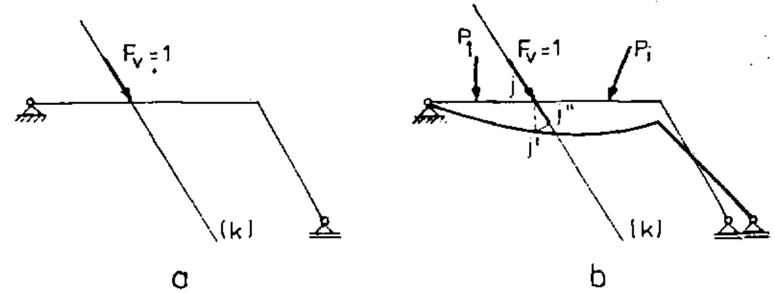


Fig. 10.7.

aceasta va suferi o nouă deformare, şi anume deformarea reală. În fig. 10.7, *b* este desenată numai această deformată (din etapa a II-a). Cele două feţe ale unui element de bară de lungime dx se vor deplasa cu cantităţile du, dv şi dφ care se datoresc eforturilor N, T şi M produse în structură de încărcările reale P.

Se va aplica condiţia de echilibru elastic din etapa a II-a

$$L_e^{II} = L_d^{II}.$$

Lucrul mecanic se datorește forței virtuale și încărcărilor reale, adică

$$L_e^{II} = L_{e(F_v)}^{II} + L_{e(P)}^{II}$$

$$L_d^{II} = L_{d(F_v)}^{II} + L_{d(P)}^{II}.$$

Egalitatea dintre lucrul mecanic exterior L_e şi lucrul mecanic de deformaţie L_d este valabilă şi pentru fiecare din forţele cu care este încărcată structura. Se va scrie această egalitate numai în ceea ce priveşte încărcarea virtuală, şi anume:

$$L_{e(F_v)}^{II} = L_{d(F_v)}^{II}.$$

În etapa a doua, forţa virtuală se găseşte integral aplicată pe structură, aşa încît ea parcurge deplasarea Δ_{jk} cu întreaga sa valoare. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru eforturile n, t şi m care parcurg deplasările du, dv, dφ, adică:

$$L_{e(F_v)}^{II} = F_v \Delta_{jk} = 1 \cdot \Delta_{jk}$$

$$L_{d(F_v)}^{II} = \int n \, \mathrm{d}u + \int t \, \mathrm{d}v + \int m \, \mathrm{d}\varphi$$

$$\Delta_{jk} = \int n \, \mathrm{d}u + \int t \, \mathrm{d}v + \int m \, \mathrm{d}\varphi \qquad (10.13)$$

unde

$$\mathrm{d}u = \frac{N}{EA}\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}v = \eta \frac{T}{GA}\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{M}{EI}\mathrm{d}x.$$

Se obţine, după înlocuire, expresia deplasării unei secţiuni sau expresia Maxwell-Mohr sub forma

$$\Delta_{jk} = \int \frac{nN}{EA}\mathrm{d}x + \int \eta \frac{tT}{GA}\mathrm{d}x + \int \frac{mM}{EI}\mathrm{d}x. \qquad (10.14)$$

Termenii din expresia Maxwell-Mohr au următoarele semnificaţii: n, t, m — eforturile din secţiunile structurii produse de încărcarea unitară virtuală, aplicată în secţiunea j, pe direcţia deplasării cerute; N, T, M — eforturile din structură produse de încărcările reale; I, A — momentul de inerţie şi aria secţiunii transversale; E, G — modulele de elasticitate ale materialului.

Integralele trebuie făcute pe toate barele structurii.

10.2.2. ÎNCĂRCAREA CU VARIAŢII DE TEMPERATURĂ

Variaţia de temperatură faţă de temperatura de realizare a unei structuri produce o modificare a formei şi lungimii barelor. La structurile static determinate, această modificare se poate face nestînjenit şi deci nu apar eforturi în structură.

În paragraful precedent s-a stabilit expresia unei deplasări punctuale după o direcţie dată, şi anume

$$\Delta_{jk} = \int n \, \mathrm{d}u + \int t \, \mathrm{d}v + \int m \, \mathrm{d}\varphi$$

unde n, t, m se datoresc încărcării virtuale, iar du, dv, dφ reprezintă deplasările relative ale feţelor elementului dx ca urmare a unor cauze reale.

Vor fi stabilite expresiile acestor deplasări relative în cazul unei variaţii de temperatură. Pentru aceasta, se studiază un element de lungime dx, la care variaţia de temperatură înregistrează valorile t_i (la fibra inferioară) şi t_s (la fibra superioară). Se presupune că axa barei se găseşte la mijlocul înălţimii secţiunii transversale iar $t_i > t_s$ (fig. 10.8).

Temperatura variază liniar de la o fibră la alta. Rezultă

$$\mathrm{d}u_s = \alpha t_s \, \mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}u_i = \alpha t_i \, \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}u_0 = \frac{\mathrm{d}u_i + \mathrm{d}u_s}{2} = \alpha \frac{t_i + t_s}{2}\mathrm{d}x = \alpha t_0 \, \mathrm{d}x. \qquad (10.15)$$

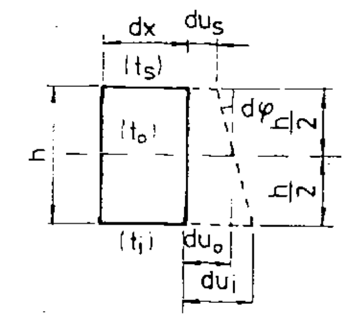


Fig. 10.8.

S-a notat cu α coeficientul de dilatare termică liniară şi cu t_0 variaţia de temperatură în axa barei.

Cele două feţe nu au deplasare relativă după normala la axa barei şi drept urmare dv = 0.

Rotirea relativă este dată de unghiul dφ indicat în fig. 10.8, obţinîndu-se

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}u_i - \mathrm{d}u_s}{h} = \frac{\alpha t_i \, \mathrm{d}x - \alpha t_s \, \mathrm{d}x}{h} = \alpha \frac{t_i - t_s}{h}\mathrm{d}x = \alpha \frac{\Delta t}{h}\mathrm{d}x \qquad (10.16)$$

în care Δt reprezintă diferenţa de temperatură dintre cele două fibre $(t_i - t_s)$.

Cu aceste valori ale deplasărilor relative se obţine expresia unei deplasări punctuale produse de variaţia de temperatură, adică

$$\Delta_{jk} = \int n \, \mathrm{d}u + \int m \, \mathrm{d}\varphi = \int n \alpha t_0 \, \mathrm{d}x + \int m \alpha \frac{\Delta t}{h}\mathrm{d}x. \qquad (10.17)$$

Această expresie capătă o formă mai simplă dacă structura este alcătuită din bare cu secțiune constantă la care variația de temperatură este aceeași pe lungimea unei bare. În acest caz, rezultă

$$\Delta_{jk} = \sum \alpha t_0 \int n \, dx + \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \int m \, dx. \qquad (10.18)$$

Integralele de forma $\int n \, dx$ și $\int m \, dx$ reprezintă ariile diagramelor de eforturi pe barele respective și deci

$$\Delta_{jk} = \sum \alpha t_0 \Omega^{(n)} + \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \Omega^{(m)}. \qquad (10.19)$$

Sumele se extind la toate barele structurii la care secțiunea și variația de temperatură sînt constante.

10.2.3. ÎNCĂRCAREA CU CEDĂRI DE REAZEME

La structurile static determinate cedările de reazem au ca efect modificarea configurației geometrice a structurii fără deformarea barelor și deci fără apariția de eforturi. Barele se deplasează ca niște corpuri rigide.

La structura din fig. 10.9 încastrarea suferă deplasări de valoare cunoscută, și anume u, v, θ. Urmează să se stabilească proiecția deplasării unei secțiuni j după direcția k. Pentru aceasta, se aplică pe structură în secțiunea j o încărcare virtuală unitară care are direcția k. Aceasta va da naștere în reazeme la reacțiunile $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ și $\bar{r}_4$. Structura este în echilibru sub acțiunea încărcării unitare virtuale și a reacțiunilor din reazeme. Deoarece cedările reazemelor sînt foarte mici în raport cu dimensiunile generale ale structurii, trecerea structurii din poziția inițială în poziția deplasată poate fi considerată o deplasare infinit mică care să stea la baza exprimării echilibrului cu ajutorul principiului lucrului mecanic. Adică :

$$\delta L = 0$$

sau

$$\Delta_{jk} + (-\bar{r}_1 u - \bar{r}_2 v - \bar{r}_3 \theta) = 0$$

$$\Delta_{jk} = -(-\bar{r}_1 u - \bar{r}_2 v - \bar{r}_3 \theta).$$

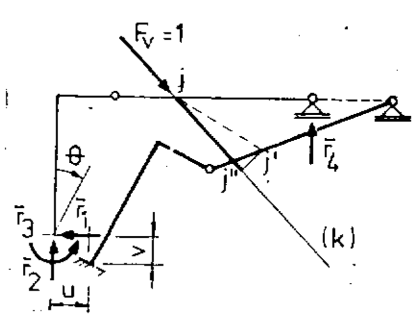


Fig. 10.9.

În cazul general, cînd se înregistrează cedări de reazeme pe direcțiile a n legături simple, expresia deplasării capătă forma

$$\Delta_{jk} = -\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \Delta_{r_i} \qquad (10.20)$$

unde $\bar{r}_i$ reprezintă reacțiunea din legătura simplă i provenită din încărcarea virtuală unitară aplicată în secțiunea j pe direcția deplasării cerute ; Δ_{r_i} este cedarea de reazem pe direcția legăturii i.

10.3. APLICAREA PRACTICĂ A EXPRESIEI DEPLASĂRILOR PUNCTUALE

10.3.1. DEPLASARI ABSOLUTE ȘI DEPLASĂRI RELATIVE

Deplasarea absolută a unei secțiuni reprezintă deplasarea acesteia în raport cu un sistem de referință considerat fix. Astfel, în cadrul din fig. 10.10 deplasarea pe verticală a secțiunii i este o deplasare absolută. Tot o deplasare absolută o constituie și rotirea θ_A a secțiunii din reazemul A.

Sînt situații în care interesează deplasarea relativă dintre două secțiuni, adică deplasarea uneia dacă cealaltă este luată drept reper. De exemplu, variația distanței dintre secțiunile j și k constituie deplasarea relativă dintre secțiunile respective, adică :

$$\Delta_{jk} = \Delta'_{jk} + \Delta''_{jk}$$

în care Δ'_{jk} și Δ''_{jk} sînt deplasările absolute ale secțiunilor j și k după direcția jk.

Tot o deplasare relativă o constituie și rotirea θ_{12} dintre secțiunile articulației grinzilor din fig. 10.11, avînd valoarea $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$.

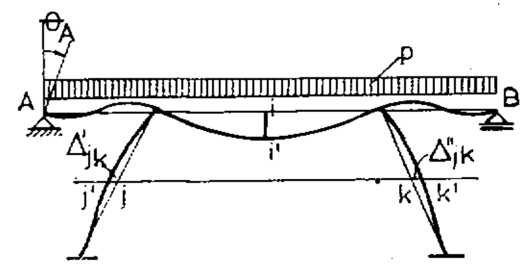


Fig. 10.10.

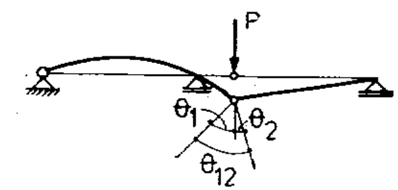


Fig. 10.11.

10.3.2. SENSUL ȘI SEMNIFICAȚIA ÎNCARCARII VIRTUALE

Natura încărcării virtuale depinde de caracterul deplasării ce trebuie calculată. În cazul deplasărilor liniare, încărcarea virtuală este constituită dintr-o forță concentrată, în timp ce pentru o rotire, ea va consta dintr-un moment concentrat. În fig. 10.12, $a-f$ sînt arătate cîteva încărcări unitare virtuale, corespunzătoare unor deplasări absolute ce urmează a fi calculate.

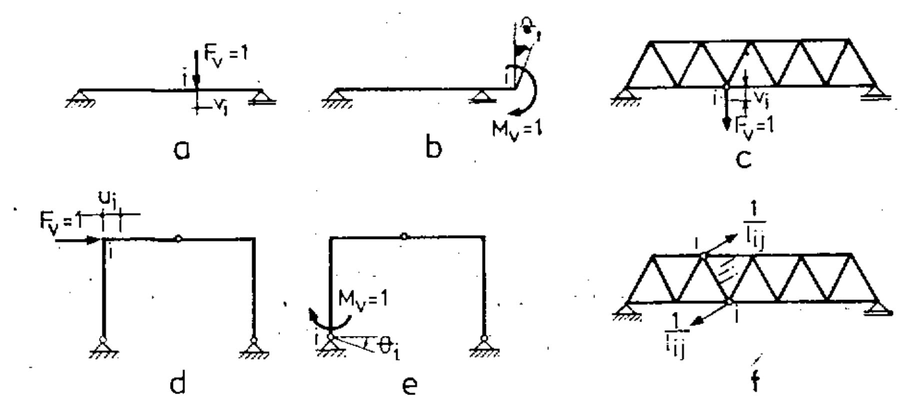


Fig. 10.12.

Pentru calculul rotirii unei bare $i-j$, încărcarea virtuală este dată cu un cuplu unitar, alcătuit din două forțe aplicate la capetele barei, normale pe aceasta și de valoare $1/l_{ij}$ (fig. 10.12, *f*).

Deplasările relative se determină aplicînd perechi de încărcări unitare, așa cum este exemplificat în fig. 10.13, *a* pentru calculul deplasării relative Δ_{jk}, și în fig. 10.13, *b*, pentru rotirea relativă a secțiunilor din articulația *i*.

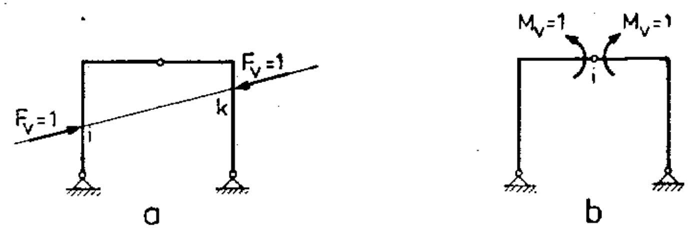


Fig. 10.13.

Sensul încărcărilor virtuale este arbitrar. El are importanță însă în legătură cu sensul deplasării obținute după efectuarea calculelor. Dacă deplasarea calculată rezultă pozitivă, sensul real al deplasării coincide cu sensul încărcării unitare; o deplasare negativă indică faptul că sensul real al acesteia este invers sensului încărcării unitare virtuale.

10.3.3. IMPORTANȚA RELATIVĂ A TERMENILOR LA ÎNCĂRCAREA CU FORȚE

Deplasarea punctuală produsă de încărcarea cu forțe are expresia

$$\Delta_{jk} = \int \frac{nN}{EA}\,dx + \int \eta_i \frac{tT}{GA}\,dx + \int \frac{mM}{EI}\,dx.$$

Pentru fiecare categorie de structuri, vor fi reținuți numai termenii a căror pondere este hotărîtoare, fiind valabile cele discutate în legătură cu aplicația 10.1.

La cadre și grinzi, solicitarea dominantă este încovoierea, astfel că efectul forțelor axiale și al forțelor tăietoare este neglijabil, putîndu-se calcula deplasările cu relația

$$\Delta_{jk} = \int \frac{mM}{EI}\,dx.$$

Arcele sînt structuri la care forțele axiale sînt importante și nu mai pot fi neglijate. Ele trebuie luate în considerație la calculul deplasărilor, a căror expresie devine

$$\Delta_{jk} = \int \frac{nN}{EA}\,ds + \int \frac{mM}{EI}\,ds.$$

La structurile cu tiranți (fig. 10.14), influența forței axiale este importantă pentru deformarea tirantului, dar ea poate fi neglijată pentru restul structurii, deci

$$\Delta_{jk} = \int \frac{n_t N_t}{E_t A_t}dx + \int \frac{mM}{EI}dx = \frac{n_t N_t}{E_t A_t} l_t + \int \frac{mM}{EI}\,dx.$$

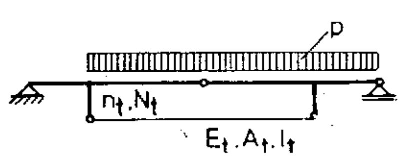


Fig. 10.14.

Grinzile cu zăbrele au în bare numai eforturi axiale și, ca urmare, deformarea lor se datorește exclusiv forțelor axiale.

Expresia deplasării punctuale capătă o formă particulară, deoarece efortul axial este constant pe lungimea unei bare, rezultînd

$$\Delta_{jk} = \sum_{i=1}^{b} \int \frac{nN}{EA}\,dx = \sum_{i=1}^{b} \frac{n_i N_i}{EA_i} \int_0^l dx$$

adică

$$\Delta_{jk} = \sum_{i=1}^{b} \frac{n_i N_i}{EA_i} l_i = \sum_{i=1}^{b} n_i \Delta l_i \qquad (10.21)$$

unde: b reprezintă numărul de bare ale grinzii cu zăbrele; n_i — efortul din bara i, produs de încărcarea virtuală; N_i — efortul din bara i, produs de încărcările reale; A_i, l_i — aria și lungimea barei i; E — modulul de elasticitate al materialului; Δl_i — alungirea (scurtarea) barei i datorită efortului N_i.

10.3.4. REGULA DE INTEGRARE VEREȘCEAGHIN

Valorile integralelor din expresia Maxwell-Mohr pot fi calculate direct în cazul structurilor alcătuite din bare drepte la care secțiunea transversală este constantă sau variază în trepte, pornind de la constatarea că una din diagrame, și anume cea provenind din încărcarea virtuală, are variații liniare.

Se consideră o funcție oarecare $F(x)$ și o funcție liniară $f(x)$, urmînd a se calcula valoarea integralei produsului lor pe intervalul ab (fig. 10.15), adică:

$$I = \int_a^b f(x)\cdot F(x)\,dx. \qquad (10.22)$$

În cazul deplasărilor elastice, funcția $F(x)$ poate fi oricare din eforturile N, T, M produse de încărcările reale, iar funcția $f(x)$ este echivalentă cu eforturile n, t, m datorate încărcării virtuale.

Într-o secțiune curentă x, funcția liniară $f(x)$ poate fi exprimată sub forma

$$f(x) = a_0 + x \operatorname{tg} \alpha$$

care se înlocuiește în expresia integralei I, obținîndu-se

$$I = \int_a^b (a_0 + x \operatorname{tg} \alpha) F(x)\,dx.$$

Observînd că $F(x)\,dx = d\Omega$, adică reprezintă o arie elementară din diagrama $F(x)$, rezultă

$$I = a_0 \int_a^b d\Omega + \operatorname{tg}\alpha \int_a^b x\,d\Omega.$$

Conform teoremei lui Varignon se poate scrie

$$\int_a^b x\,d\Omega = \Omega_{ab} x_G$$

și anume, momentul static al suprafeței Ω_{ab} față de axa Oy poate fi calculat ca fiind produsul dintre aria Ω_{ab} și distanța x_G de la centrul de greutate al acesteia pînă la axa Oy.

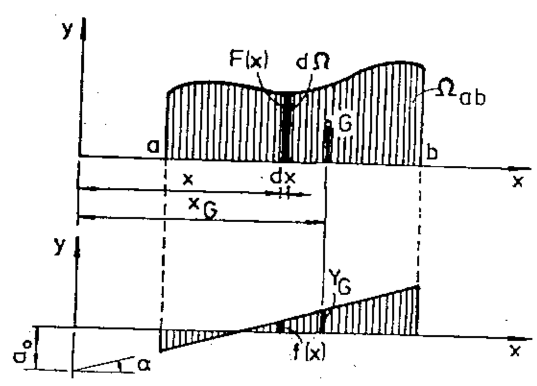


Fig. 10.15.

Atunci,

$$I = a_0\Omega_{ab} + \Omega_{ab}x_G \operatorname{tg} \alpha = \Omega_{ab}(a_0 + x_G \operatorname{tg} \alpha).$$

Dar

$$a_0 + x_G \operatorname{tg} \alpha = f(x_G) = Y_G$$

unde s-a notat ca Y_G ordonata diagramei $f(x)$, măsurată în dreptul centrului de greutate al diagramei $F(x)$.

Cu notațiile de mai înainte rezultă

$$I = \int_b^a F(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \Omega_{ab} Y_G. \tag{10.23}$$

Pe baza acestei constatări, se poate enunța regula de integrare Vereșceaghin în felul următor: integrala unui produs de două funcții, dintre care $F(x)$ poate fi oarecare iar $f(x)$ are o variație liniar continuă pe domeniul de integrare $a-b$, este egală cu produsul dintre aria funcției $F(x)$ și ordonata din diagrama liniară măsurată în dreptul centrului de greutate al suprafeței $F(x)$ considerate.

Particularizînd pentru integralele care intervin în expresia Maxwell-Mohr pe o porțiune de bară dreaptă la care secțiunea transversală este constantă, se obține

$$\int_a^b \frac{nN}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EA}\,\Omega_{ab}^{(N)}Y_G^{(n)}$$

$$\int_a^b \frac{tT}{GA}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{GA}\,\Omega_{ab}^{(T)}Y_G^{(t)} \tag{10.24}$$

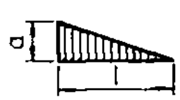
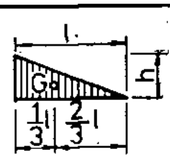
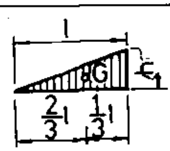
$$\int_a^b \frac{mM}{EI}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\,\Omega_{ab}^{(M)}Y_G^{(m)}.$$

Atunci cînd ambele diagrame au variație liniară, se poate interpreta oricare din ele drept funcția $F(x)$, calculîndu-i-se aria, ordonata Y_G urmînd a fi măsurată în cealaltă diagramă.

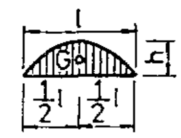
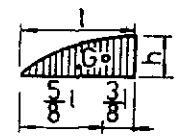
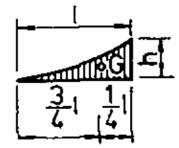
În tabelul 10.1 sînt date valorile integralelor $\mathfrak{I}$ în cazul unor diagrame frecvent întîlnite.

Tabelul 10.1

Integrale uzuale

$F(x)$ \ $f(x)$		
1	2	3
$\Omega = \frac{1}{2}hl$ 	$y_G = \frac{2}{3}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{1}{2}hl\right)\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{3}hla$	$y_G = \frac{1}{3}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{1}{2}hl\right)\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{6}hla$
$\Omega = \frac{1}{2}hl$ 	$y_G = \frac{1}{3}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{1}{2}hl\right)\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{6}hla$	$y_G = \frac{2}{3}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{1}{2}hl\right)\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{3}hla$

Tabelul 10.1 (continuare)

1	2	3
Parabolă $\Omega = \frac{2}{3}hl$ 	$y_G = \frac{1}{2}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{2}{3}hl\right)\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{3}hla$	$y_G = \frac{1}{2}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{2}{3}hl\right)\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{3}hla$
Parabolă $\Omega = \frac{2}{3}hl$ 	$y_G = \frac{3}{8}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{2}{3}hl\right)\left(\frac{3}{8}a\right) = \frac{1}{4}hla$	$y_G = \frac{5}{8}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{2}{3}hl\right)\left(\frac{5}{8}a\right) = \frac{5}{12}hla$
Parabolă $\Omega = \frac{1}{3}hl$ 	$y_G = \frac{1}{4}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{1}{3}hl\right)\left(\frac{1}{4}a\right) = \frac{1}{12}hla$	$y_G = \frac{3}{4}a$; $\mathfrak{I} = \left(\frac{1}{3}hl\right)\left(\frac{3}{4}a\right) = \frac{1}{4}hla$

Încărcările concentrate și uniform distribuite conduc la diagrame N, T, M care pot fi întotdeauna descompuse în diagrame simple, de tipul celor din tabelul 10.1, așa cum se exemplifică în fig. 10.16. Fiecare dintre cele trei diagrame în care a fost descompusă diagrama M trebuie integrată cu fiecare diagramă simplă rezultată din descompunerea diagramei m. Semnul fiecărei integrale rezultă din semnele cantităților care intervin în expresia Vereșceaghin: este pozitiv dacă Ω și Y_g au același semn și este negativ dacă Ω și Y_g sînt de semne diferite.

Integrarea a două diagrame, dintre care una este simetrică iar cealaltă antisimetrică, dă rezultatul zero. În cazul în care ambele diagrame sînt fie simetrice fie antisimetrice, calculele se pot efectua pe jumătate din structură, dublîndu-se apoi rezultatul obținut.

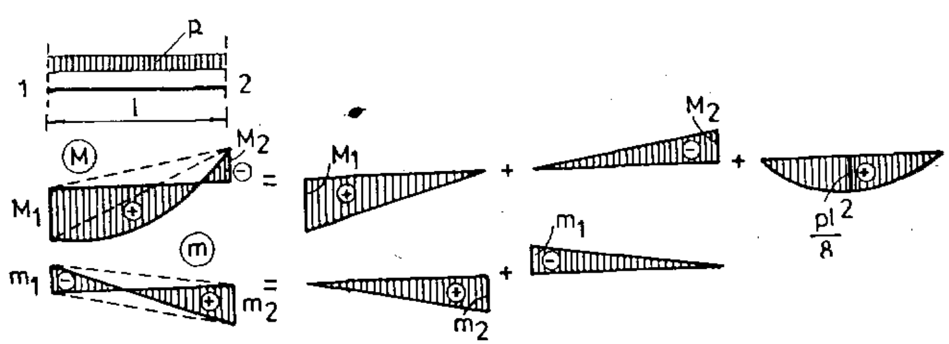


Fig. 10.16.

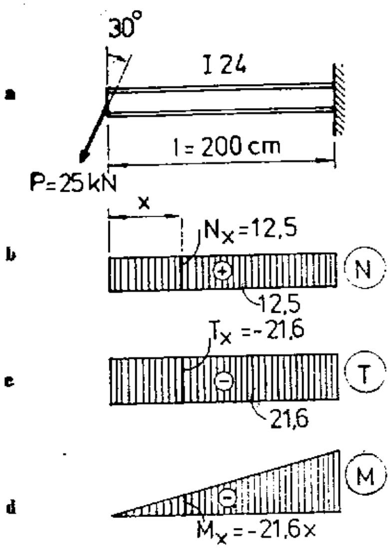


Fig. 10.17.

Aplicația 10.1. Să se evalueze lucrul mecanic de deformare la consolă din fig. 10.17, *a*.

Se cunosc: $A=46{,}1\ \text{cm}^2$; $I=4\,250\ \text{cm}^4$; $E=2{,}1\cdot10^6\ \text{daN/cm}^2$; $G=0{,}81\cdot10^6\ \text{daN/cm}^2$; $\eta=2{,}1$.

Diagramele de eforturi sînt reprezentate în fig. 10.17, *b—d*.

Într-o secțiune curentă situată la distanța x de vîrful consolei, eforturile au expresiile:

$$N_x = 12{,}5\ \text{kN} = 1{,}25\cdot10^3\ \text{daN}$$

$$T_x = -21{,}6\ \text{kN} = -2{,}16\cdot10^3\ \text{daN}$$

$$M_x = -21{,}6\,x\ \text{kN}\cdot\text{cm} = -2{,}16\cdot10^3\,x\ \text{daN}\cdot\text{cm}.$$

Se va calcula separat lucrul mecanic al fiecărui efort.

Forța axială N

$$L_d^{(N)} = \frac{1}{2}\int\frac{N^2}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{N^2}{EA}\int_0^l \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{N^2 l}{EA}$$

$$L_d^{(N)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}25^2\cdot10^6\cdot200}{2{,}1\cdot10^6\cdot46{,}1} = 1{,}6\ \text{daN}\cdot\text{cm}.$$

Forța tăietoare

$$L_d^{(T)} = \frac{1}{2}\int\eta\,\frac{T^2}{GA}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\eta\,\frac{T^2}{GA}\int_0^l \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\eta\,\frac{T^2 l}{GA} = \frac{1}{2}\cdot2{,}1\cdot\frac{(-2{,}16\cdot10^3)^2\cdot200}{0{,}81\cdot10^6\cdot46{,}1} = $$

$$= 26{,}2\ \text{daN}\cdot\text{cm}.$$

Momentul încovoietor

$$L_d^{(M)} = \frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{EI}\int_0^l(-2{,}16\cdot10^3x)^2\ \mathrm{d}x$$

$$L_d^{(M)} = \frac{2{,}16^2\cdot10^6\cdot l^3}{2\cdot3EI} = \frac{2{,}16\cdot10^6\cdot200^3}{2\cdot3\cdot2{,}1\cdot10^6\cdot4\,250} = 697{,}0\ \text{daN}\cdot\text{cm}.$$

Lucrul mecanic total este

$$L_d = 1{,}6 + 26{,}2 + 697{,}0 = 724{,}8\ \text{daN}\cdot\text{cm}.$$

Comparînd valorile parțiale se constată că efectul forței axiale este mai mic de 1%, al forței tăietoare reprezintă 3,62% iar efectul momentului încovoietor este de 96,16%.

Aplicația 10.2. La cadrul din fig. 10.18 se cere deplasarea pe verticală a articulației C produsă de:

— încărcarea uniform distribuită;
— variația de temperatură;
— cedarea reazemului B.

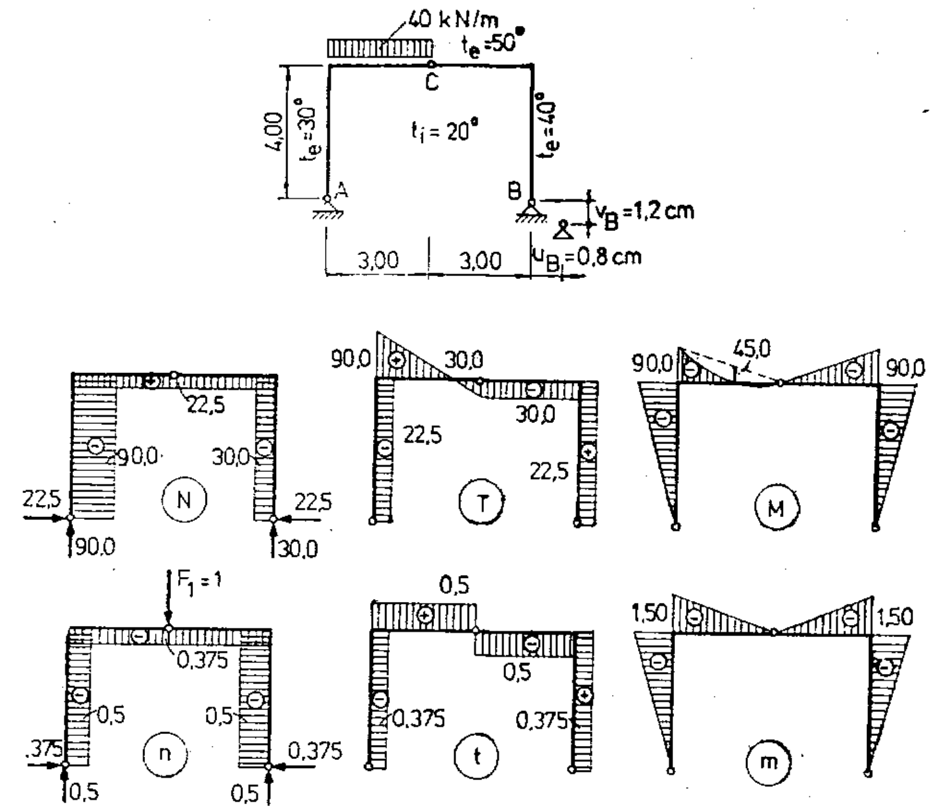


Fig. 10.18.

Structura este alcătuită dintr-un profil I30, cu caracteristicile următoare: $I = 9\,800\ \text{cm}^4$, $A = 69{,}1\ \text{cm}^2$, $\eta = 2{,}1$.

Pentru oțel se consideră:

$$E = 2{,}1\cdot10^6\ \text{daN/cm}^2;\ G = 0{,}81\cdot10^6\ \text{daN/cm}^2;\ \alpha = 1{,}2\cdot10^{-5}.$$

În fig. 10.18 sînt reprezentate diagramele de eforturi din încărcările reale, precum și cele din încărcarea virtuală aplicată în articulația C, pe direcția verticală.

Încărcarea cu forțe. Se va calcula separat săgeata v_0 datorită fiecăruia din cele trei eforturi, pentru a se putea aprecia efectul fiecăruia.

— Efectul forței axiale N

$$EAv_C^{(N)} = (-90\cdot4)(-0{,}5) + (-22{,}5\cdot6)(-0{,}375) + (-30\cdot4)(-0{,}5) =$$

$$= 290{,}6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$EA = 2{,}1\cdot10^6\cdot69{,}1 = 14{,}5\cdot10^7\ \text{daN} = 14{,}5\cdot10^5\ \text{kN}$$

$$v_C^{(N)} = \frac{290{,}6}{EA} = \frac{290{,}6}{14{,}5\cdot10^5} = 2\cdot10^{-4}\ m = 0{,}02\ \text{cm}.$$

— Efectul forței tăietoare T

$$\frac{GA}{\eta} v_C^{(T)} = (-22{,}5\cdot4)(-0{,}375) + (0{,}5\cdot30)(3) + (-3\cdot30)(-0{,}5) +$$
$$+ (22{,}5\cdot4)(0{,}375) = 157{,}5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$GA = 0{,}81\cdot10^6\cdot69{,}1 = 5{,}6\cdot10^7 \text{ daN} = 5{,}6\cdot10^5 \text{ kN}$$

$$v_C^{(T)} = \frac{157{,}5\,\eta}{GA} = \frac{157{,}5\cdot2{,}1}{5{,}6\cdot10^5} = 5{,}9\cdot10^{-4} \text{ m} = 0{,}059 \text{ cm}.$$

— Efectul momentului încovoietor M

$$EIv_C^{(M)} = \left[\left(\frac{1}{2}\cdot90\cdot4\right)\left(\frac{2}{3}\cdot1{,}5\right)\right]\cdot2 + \left(\frac{1}{2}\cdot90\cdot3\right)\left(\frac{2}{3}\cdot1{,}5\right) +$$
$$+\left(\frac{2}{3}\cdot45\cdot3\right)\left(\frac{1}{2}\cdot1{,}5\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot90\cdot3\right)\left(\frac{2}{3}\cdot1{,}5\right) = 562{,}5 \text{ kN}\cdot\text{m}^3;$$

$$EI = 2{,}1\cdot10^6\cdot9\,800 = 20{,}55\cdot10^9 \text{ daN}\cdot\text{cm}^2 = 20\,550 \text{ kN}\cdot\text{m}^2;$$

$$v_C^{(M)} = \frac{562{,}5}{EI} = \frac{562{,}5}{20\,550} = 2{,}775\cdot10^{-2} \text{ m} = 2{,}775 \text{ cm}.$$

Săgeata totală

$$v_C = v_C^{(N)} + v_C^{(T)} + v_C^{(M)} = 0{,}02 + 0{,}059 + 2{,}775 = 2{,}854 \text{ cm}.$$

Față de valoarea totală a săgeții, contribuția forței axiale este de 0,7%, a forței tăietoare este de 2,1% iar a momentului încovoietor de 97,2%, ceea ce justifică luarea în considerație numai a momentului încovoietor.

Variația de temperatură

$$v_C = \alpha\sum t_0\Omega^{(n)} + \alpha\sum\frac{\Delta t}{h}\,\Omega^{(m)}.$$

Valorile t_0 și Δt pentru barele cadrului sînt următoarele:

Stîlp A: $\quad t_0 = \dfrac{20+30}{2} = 25°; \quad \Delta t = 20-30 = -10°.$

Riglă: $\quad t_0 = \dfrac{20+50}{2} = 35°; \quad \Delta t = 20-50 = -30°.$

Stîlp B: $\quad t_0 = \dfrac{20+40}{2} = 30°; \quad \Delta t = 20-40 = -20°.$

Cu aceste valori rezultă:

$$v_C = 1{,}2\cdot10^{-5}[25(-0{,}5\cdot4) + 35(-0{,}375\cdot6) + 30(-0{,}5\cdot4)] +$$
$$+ 1{,}2\cdot10^{-5}\left[\frac{-10}{0{,}30}\left(\frac{1{,}5\cdot4}{2}\right) + \frac{-30}{0{,}30}\cdot2\left(-\frac{1{,}5\cdot3}{2}\right) + \frac{-20}{0{,}30}\left(-\frac{1{,}5\cdot4}{2}\right)\right] =$$
$$= -226\cdot10^{-5} + 900\cdot10^{-5} = 674\cdot10^{-5} \text{ m} = 0{,}674 \text{ cm}.$$

Cedările de reazeme

$$v_C = -\sum\bar{r}_i\cdot\Delta_{ri} = -[(-0{,}5\cdot1{,}2) + (-0{,}375\cdot0{,}8)] = 0{,}9 \text{ cm}.$$

Aplicația 10.3. Se cere rotirea relativă a secțiunilor din articulația B a structurii din fig. 10.19, *a*.

Momentele de inerție ale secțiunilor barelor sînt exprimate în funcție de o valoare convențională I_0. Se dă: $EI_0 = 40\,000$ kN·m².

Pe baza regulei Vereșceaghin expresia unei deplasări este

$$\Delta_{jk} = \sum\frac{1}{EI_i}\,\Omega_i Y_i.$$

Prin multiplicarea ambilor membrii cu cantitatea EI_0 rezultă

$$EI_0\Delta_{jk} = \sum\frac{I_0}{I}\,\Omega_i Y_i$$

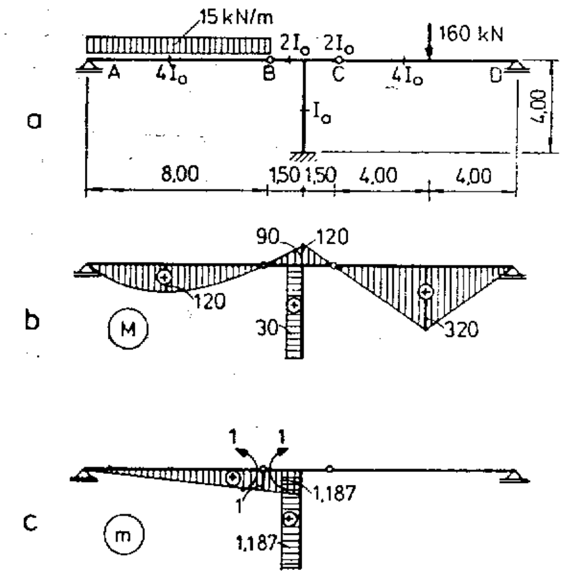


Fig. 10.19.

ceea ce înseamnă că valoarea fiecărei integrale trebuie multiplicată cu raportul dintre momentul de inerție de comparație I_0 și momentul de inerție al barei I_i. Pentru obținerea valorii deplasării, se va împărți cantitatea numerică din membrul drept la produsul EI_0. Procedînd în acest mod, calculele practice sînt mai simple.

În fig. 10.19, *b*, *c* sînt trasate diagramele M și m care servesc pentru evaluarea rotirii relative cerute. Se obține:

$$EI_0\varphi_B^{rel} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot120\cdot8\right)\left(\frac{1}{2}\cdot1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot90\cdot1{,}5\right)\left(\frac{1}{3}\cdot1 + \frac{2}{3}\cdot1{,}187\right) +$$
$$+\frac{1}{1}(30\cdot4)1{,}187 = 184{,}5 \text{ kN}\cdot\text{m}^2;\ \varphi_B^{rel} = \frac{184{,}5}{40\,000} = 4{,}61\cdot10^{-3} \text{ rad}.$$

Aplicația 10.4. Să se calculeze deplasarea pe verticală a nodului *3* al grinzii cu zăbrele din fig. 10.20, *a*.

În fig. 10.20, *b* se arată încărcarea virtuală. Calculele sînt sistematizate în tabelul 10.2.

Însumînd ultima coloană a tabelului 10.2 se obține

$$Ev_3 = \sum\frac{nNl}{A} = 56\,470 \text{ kN/cm}$$

în care

$$E = 2{,}1\cdot10^6 \text{ daN/cm}^2 = 2{,}1\cdot10^4 \text{ kN/cm}^2$$

de unde

$$v_3 = \frac{56\,470}{2{,}1\cdot10^4} = 2{,}68 \text{ cm} \approx \frac{l}{1\,000}.$$

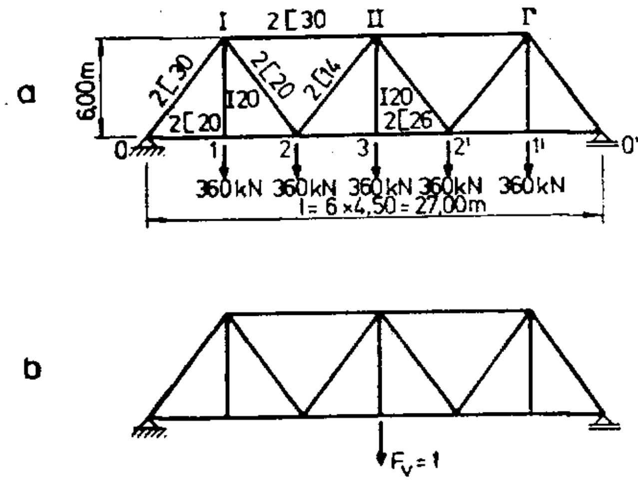


Fig. 10.20.

Tabelul 10.2

Bara	l cm	A cm²	N kN	n	$\frac{nNl}{A}$
0—1	450	64,40	630,0	0,375	1 650
1—2	450	64,40	630,0	0,375	1 650
2—1	450	96,60	1 080,0	1,125	5 690
3—2'	450	96,60	1 080,0	1,125	5 690
2'—1'	450	64,40	540,0	0,375	1 410
1'—0'	450	64,40	540,0	0,375	1 410
0—I	750	117,60	−1 050,0	−0,625	4 180
I—2	750	64,40	600,0	0,625	4 380
2—II	750	40,80	−150,0	−0,625	1 720
II—2'	750	40,80	−300,0	−0,625	3 440
2'—I'	750	64,40	500,0	0,625	4 380
I'—0'	750	117,60	− 900,0	−0,625	3 580
I—II	900	117,60	− 990,0	−0,750	5 680
II—I'	900	117,60	− 900,0	−0,750	5 160
I—1	600	33,50	360,0	0	0
II—3	600	33,50	360,0	1,000	6 450
I'—1'	600	33,50	240,0	0	0

10.4. STUDIUL DEFORMATELOR LA GRINZI DREPTE

Formula Maxwell-Mohr permite calculul deplasării unei singure secțiuni a unei structuri. Această metodă nu este practic aplicabilă atunci cînd interesează deplasările după o anumită direcție a unui număr mai mare de secțiuni, adică atunci cînd trebuie determinată linia elastică a structurii.

Se vor prezenta două procedee care permit stabilirea liniei elastice la grinzile drepte.

10.4.1. PROCEDEUL INTEGRĂRII ECUAȚIEI FIBREI MEDII DEFORMATE

Fie grinda simplu rezemată din fig. 10.21, încărcată cu un sistem de forțe, sub acțiunea căruia se deformează. În sistemul de axe xOy deformata grinzii va fi curbă $y = f(x)$ care urmează a fi stabilită. Se detașează din grindă un element de lungime dx, situat la distanța x de origine (fig. 10.21, *b*). Raza de curbură a deformatei în acest punct este ρ, iar momentul încovoietor este M.

Triunghiurile $aa'c$ și $AA'a'$ sînt asemenea, astfel că se poate scrie

$$\frac{AA'}{aa'} = \frac{y}{\rho} \quad \text{sau} \quad \frac{\varepsilon \frac{dx}{2}}{\frac{dx}{2}} = \frac{y}{\rho} \quad \text{adică} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{y}.$$

După cum se cunoaște, expresia curburii unei curbe plane în sistemul de coordonate rectangulare xOy, este

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{10.25}$$

În această expresie, termenul y'^2 poate fi neglijat în raport cu 1 obținîndu-se relația mai simplă

$$\frac{1}{\rho} = y'' \quad \text{sau} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{deci} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{y}.$$

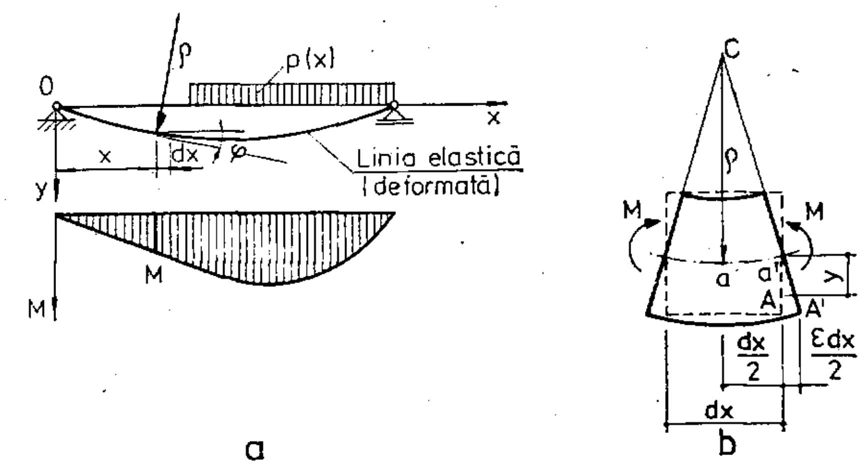


Fig. 10.21.

Presupunînd că solicitarea este în domeniul elastic, între deformațiile specifice și eforturile unitare este valabilă legea lui Hooke, adică $\sigma = \varepsilon E$ în care $\sigma = \frac{M}{I} y$, deci $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{EI} y$.

Rezultă după înlocuire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}. \tag{10.26}$$

În sistemul de axe din fig. 10.21 derivata a doua a curbei deformate este negativă, în timp ce în convenția de semne pentru momentul încovoietor, momentul care produce această curbură este pozitiv. Pentru a fi în concordanță cu semnul momentului M, membrul drept al ultimei expresii trebuie afectat cu semnul minus, astfel că ea are forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}. \tag{10.27}$$

Dacă în această ecuație diferențială se introduce expresia analitică a efortului M, prin două integrări succesive se obține ecuația fibrei medii deformate sub forma $y = f(x)$. Din interpretarea geometrică a derivatei se poate deduce ecuația rotirilor, și anume:

$$\varphi = y' = \frac{dy}{dx}.$$

În urma integrării, pe fiecare tronson, a ecuației diferențiale a fibrei medii deformate, se obțin două sau mai multe constante de integrare, ce urmează a fi determinate pornind de la condițiile pe care trebuie să le îndeplinească, în anumite puncte deformata grinzii. Ecuația diferențială trebuie **scrisă și apoi integrată pe fiecare domeniu** de integrare, adică pe zonele de **grindă pe care atît momentul de inerție** I cît și legea de variație a momentului **încovoietor** M **rămîn aceleași.** Fiecare domeniu de integrare face să apară deci **cîte două constante, conducînd în total,** pentru n domenii, la $2n$ constante **necunoscute.** Determinarea constantelor se face atît din egalitatea săgeților și a rotirilor la frontierele dintre domenii, precum și din alte două condiții ale deformatei grinzii.

La un număr mai mare de forțe, sau la variații numeroase ale momentului de inerție, numărul domeniilor de integrare și deci al constantelor crește, metoda aceasta devenind incomodă pentru aplicarea practică.

10.4.2. PROCEDEUL GRINZII CONJUGATE

Linia elastică a grinzilor drepte poate fi determinată pornind de la analogia care există între ecuația diferențială a fibrei medii deformate și relația diferențială dintre momentul încovoietor și încărcarea p. Sînt cunoscute relațiile diferențiale dintre eforturi și încărcări care au forma

$$\frac{dT}{dx} = -p; \quad \frac{dM}{dx} = T.$$

Prin derivarea ultimei expresii rezultă

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} \text{ adică } \frac{d^2M}{dx^2} = -p.$$

Comparînd această relație cu ecuația diferențială a fibrei medii deformate $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$, **se stabilesc** următoarele analogii:

Considerînd cantitatea M/EI **drept o încărcare distribuită** w, **numită încărcare elastică, atunci diagrama de momente produsă de aceasta, constituie** tocmai diagrama y sau linia elastică a grinzii, deoarece $\frac{d^2y}{dx^2} = -w$.

Între momentul fictiv M_f și încărcarea elastică care îl produce există relația

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -w \tag{10.28}$$

și deci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2M_f}{dx^2} \tag{10.29}$$

de unde, prin integrări succesive, se ajunge la

$$\frac{dy}{dx} = T_f$$

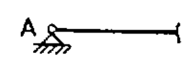
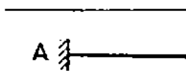
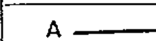
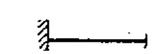
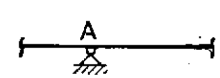
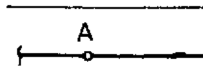
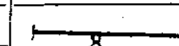
adică $\varphi = T_f$ (forța tăietoare fictivă) și

$$y = M_f.$$

Grinda care trebuie încărcată cu încărcarea elastică, astfel ca relațiile date mai înainte să fie valabile, se numește grindă conjugată. După cum se observă, constantelor de integrare li s-a atribuit valoarea zero, ceea ce înseamnă că rezemările grinzii conjugate trebuie să fie astfel încît să fie satisfăcute condițiile cu privire la constantele de integrare. Cunoscînd rezemările grinzii reale, se stabilesc rezemările grinzii conjugate, așa cum este arătat în tabelul 10.3.

Tabelul 10.3

Conjugarea legăturilor

Grinda reală		Grinda conjugată	
Rezemare	Condiții	Condiții	Rezemare
	$y_A = 0$	$M_{fA} = 0$	
	$\varphi_A \neq 0$	$T_{fA} \neq 0$	
	$y_A = 0$	$M_{fA} = 0$	
	$\varphi_A = 0$	$T_{fA} = 0$	
	$y_A \neq 0$	$M_{fA} \neq 0$	
	$\varphi_A \neq 0$	$T_{fA} \neq 0$	
	$y_A = 0$	$M_{fA} = 0$	
	$\varphi_A^{st} = \varphi_A^{dr} \neq 0$	$T_{fA}^{st} = T_{fA}^{dr} \neq 0$	
	$n_A \neq 0$	$M_{fA} \neq 0$	
	$\varphi_A^{st} = \varphi_A^{dr} \neq 0$	$T_{fA}^{st} \neq T_{fA}^{dr} \neq 0$	

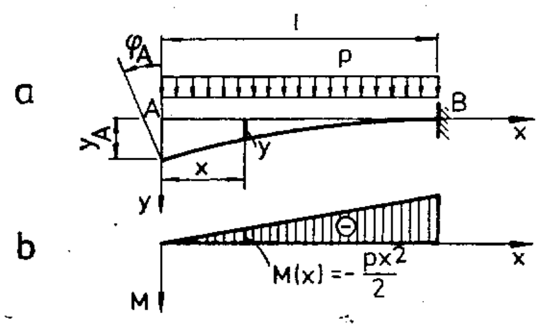


Fig. 10.22.

Aplicaţia 10.5. Se cere ecuaţia fibrei medii deformate la o consolă de lungime l, încărcată cu o forţă uniform distribuită (fig. 10.22, *a*). Grinda are secţiunea constantă, al cărei moment de inerţie este I.

Într-o secţiune curentă de abscisă x, momentul încovoietor este $M(x) = -\frac{px^2}{2}$ (fig. 10.22, *b*).

Ecuaţia diferenţială este:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

iar după înlocuire, se obţine:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}px^2$$

apoi,

$$EIy' = EI\varphi = \frac{1}{6}px^2 + C_1$$

$$EIy = \frac{1}{24}px^4 + C_1x + C_2.$$

Constantele necunoscute C_1 şi C_2 urmează să fie stabilite pe baza condiţiilor pe care deformata trebuie să le îndeplinească în secţiunea B şi anume că deplasarea pe verticală y_B şi rotirea φ_B sînt nule.

Pentru $x = x_B = l$, $\varphi_B = 0$ şi $y_B = 0$

sau, după înlocuire

$$EI\varphi_B = \frac{1}{6}pl^3 + C_1 = 0$$

respectiv

$$EIy_B = \frac{1}{24}pl^4 + C_1l + C_2 = 0.$$

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii de mai înainte, în care necunoscutele sînt constantele C_1 şi C_2, se obţine:

$$C_1 = -\frac{1}{6}pl^3; \quad C_2 = \frac{1}{8}pl^4.$$

Cu aceste valori ale constantelor, expresiile săgeţilor y şi ale rotirilor φ devin:

$$y = \frac{pl^4}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x}{l} + 3\right); \quad \varphi = \frac{pl^3}{6EI}\left(\frac{x^3}{l^3} - 1\right).$$

Săgeata şi rotirea oricărei secţiuni rezultă prin introducerea abscisei secţiunii în expresiile anterioare. De exemplu, secţiunea A are $x = 0$ şi deci:

$$y_A = \frac{pl^4}{8EI}; \quad \varphi_A = -\frac{pl^3}{6EI}.$$

Aplicaţia 10.6. La grinda simplu rezemată, de deschidere l şi cu momentul de inerţie constant, să se găsească ecuaţia fibrei medii deformate pentru o încărcare cu o forţă concentrată aplicată la mijlocul deschiderii (fig. 10.23, *a*).

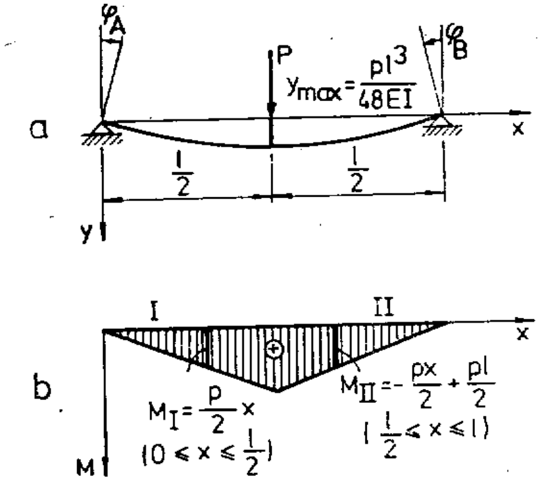


Fig. 10.23.

Diagrama M prezintă două legi de variaţie, corespunzătoare celor două pante (fig. 10.23, *b*). Vor exista deci două domenii de integrare, notate cu indicii I şi II, iar integrarea conduce la:

$0 \leqslant x \leqslant l/2;$	$l/2 \leqslant x \leqslant l:$
$EIy_I'' = -M_I;$	$EIy_{II}'' = -M_{II};$
$EI\varphi_I = -\frac{P}{4}x^2 + C_1;$	$EI\varphi_{II} = \frac{Px^2}{4} - \frac{Pl}{2}x + C_3;$
$EIy_I = -\frac{P}{12}x^3 + C_1x + C_2;$	$EIy_{II} = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl}{4}x^2 + C_3x + C_4.$

Condiţiile de determinare a constantelor C_1, C_2, C_3, C_4 sînt următoarele:

$$x = 0,\ y_I = 0;\ x = l/2,\ y_I = y_{II};\ x = l/2,\ \varphi_I = \varphi_{II};\ x = l,\ y_{II} = 0.$$

Din prima condiţie se obţine $C_2 = 0$. Celelalte condiţii conduc la următoarele relaţii între constante:

$$\frac{l}{2}(C_1 - C_3) - C_4 = -\frac{1}{24}Pl^3$$

$$C_1 - C_3 = -\frac{1}{8}Pl^2$$

$$lC_3 + C_4 = \frac{1}{6}Pl^3$$

de unde: $C_1 = \frac{1}{16}Pl^2$; $C_3 = \frac{9}{48}Pl^2$; $C_4 = -\frac{1}{48}Pl^3$.

După înlocuirea constantelor cu valorile lor, se obţin expresiile săgeţilor şi rotirilor:

$$0 \leqslant x \leqslant l/2: \quad y_I = \frac{Pl^3}{48EI}\left(-4\frac{x^3}{l^3} + 3\frac{x}{l}\right)$$

$$\varphi_I = \frac{Pl^2}{48EI}\left(-12\frac{x^2}{l^2} + 3\right);$$

$l/2 \leqslant x \leqslant l$: $$y_{II} = \frac{Pl^3}{48EI}\left(4\frac{x^3}{l^3} - 12\frac{x^2}{l^2} + 9\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$\varphi_{II} = \frac{Pl^3}{48EI}\left(12\frac{x^2}{l^2} - 24\frac{x}{l} + 9\right).$$

Săgeata maximă se produce în secţiunea în care $y' = 0$, adică în secţiunea care are rotirea nulă:

$$\varphi = \frac{Pl^2}{48EI}\left(-12\frac{x^2}{l^2} + 3\right) = 0$$

deci $x = l/2$ astfel că:

$$y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI}\left(-4\frac{l^3}{8l^3} + 3\frac{l}{2l}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Rotirile pe reazeme au expresiile:

$$x = 0, \quad \varphi_A = \frac{Pl^2}{16EI}; \quad x = l, \quad \varphi_B = -\frac{Pl^2}{16EI}.$$

Aplicaţia 10.7. Se cere linia elastică a grinzii cu moment de inerţie variabil din fig. 10.24, *a*.

Diagrama de momente este cea din fig. 10.24, *b*. Pentru comoditate, se va multiplica încărcarea elastică cu EI_0, astfel că, în final, pe sistemul conjugat, M_f şi T_f vor reprezenta săgeţile şi respectiv rotirile, multiplicate cu EI_0.

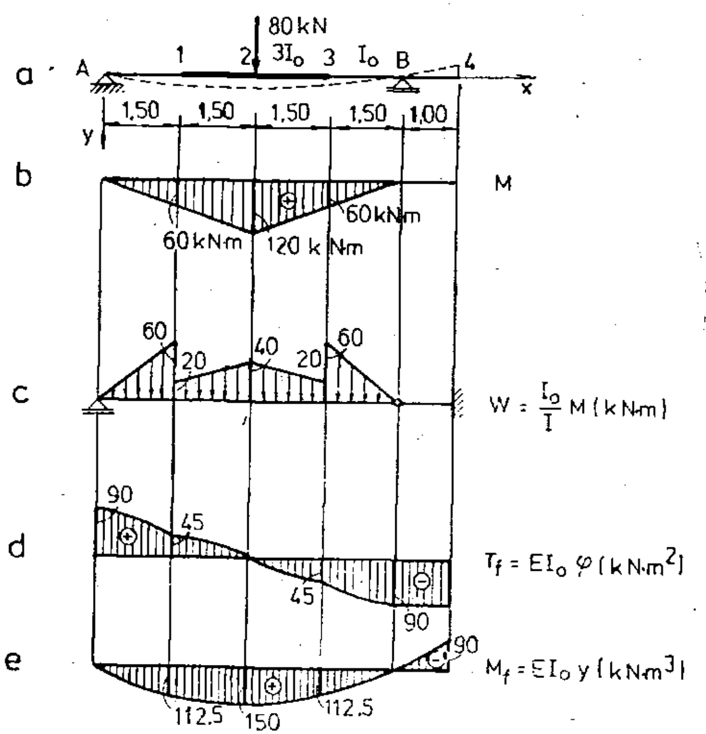


Fig. 10.24.

Grinda conjugată şi încărcarea elastică sînt arătate în fig. 10.24, *c*. Salturile încărcării se datoresc variaţiei în trepte a momentului de inerţie. Astfel:

$$w_1'' = \frac{I_0}{I_0} M_1 = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}; \quad w_1^{d''} = \frac{I_0}{3I_0} M_1 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Cu aceste valori s-au trasat pe grinda conjugată diagrama T_f (fig. 10.24, *d*) şi diagrama M_f (fig. 10.24, *e*), din care rezultă:

$$\varphi_A = \frac{T_{fA}}{EI_0} = \frac{90}{14\,700} = 6{,}12\cdot10^{-3} \text{ rad}; \qquad \varphi_B = -6{,}12\cdot10^{-3} \text{ rad}.$$

$$\varphi_1 = \frac{45}{14\,700} = 3{,}06\cdot10^{-3} \text{ rad}; \qquad \varphi_3 = -3{,}06\cdot10^{-3} \text{ rad}$$

$$y_1 = \frac{M_{f1}}{EI_0} = \frac{112{,}5}{14\,700} = 0{,}765\cdot10^{-2} \text{ m} = 0{,}765 \text{ cm}; \quad y_3 = 0{,}765 \text{ cm};$$

$$y_2 = y_{max} = \frac{150}{14\,700} = 1{,}02\cdot10^{-2} \text{ m} = 1{,}02 \text{ cm};$$

$$y_4 = -\frac{90}{14\,700} = -0{,}612\cdot10^{-2} \text{ m} = -0{,}612 \text{ cm}.$$

10.5. TEOREMA RECIPROCITĂŢII LUCRULUI MECANIC

10.5.1. CAZUL GENERAL

Se consideră o structură în două situaţii de încărcare, şi anume: sistemul de forţe P_i şi sistemul de forţe Q_j, aplicate în succesiuni diferite.

Orice deplasare se va nota cu doi indici: primul indice se referă la poziţia forţei pe direcţia căreia se consideră deplasarea, iar al doilea indice precizează încărcarea care produce această deplasare. De exemplu, Δ_{jk} reprezintă deplasarea pe direcţia forţei P_j produsă de forţa P_k.

Situaţia I. Se aplică pe structură sistemul de forţe P_i obţinîndu-se deformaţia $Ai'\,j'B$ (fig. 10.25, *a*). Forţele P_i parcurg deplasările ii' iar lucrul mecanic are valoarea

$$L'_{(1)} = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_{ii}.$$

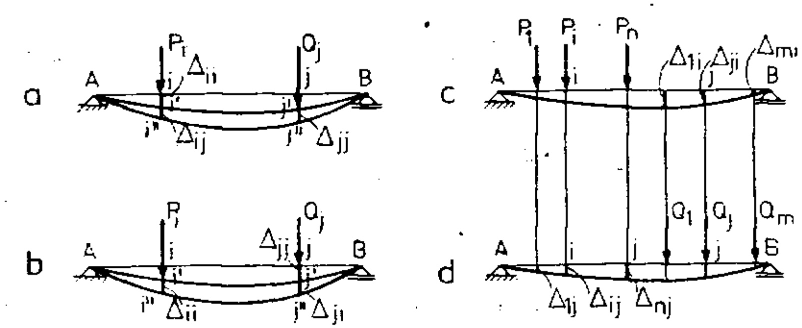


Fig. 10.25.

Se aplică apoi sistemul de forțe Q_j care va deforma structura aducînd-o în poziția $Ai''j''B$. Forțele P_i vor parcurge deplasările Δ_{ij} în timp ce forțele Q_j parcurg deplasările Δ_{jj}.

În momentul aplicării forțelor Q_j, forțele P_i se găseau pe structură cu întreaga lor intensitate și ca urmare lucrul lor mecanic nu mai este afectat de coeficientul 1/2, deoarece ele parcurg deplasările Δ_{ij} cu valoarea lor integrală.

Lucrul mecanic efectuat ca urmare a aplicării forțelor Q_j este

$$L''_{(I)} = \frac{1}{2}\sum Q_j\Delta_{jj} + \sum P_i\Delta_{ij}$$

În final se obține

$$L_{(I)} = L'_{(I)} + L''_{(I)} = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_{ii} + \frac{1}{2}\sum Q_j\Delta_{jj} + \sum P_i\Delta_{ij}.$$

Situația II. Se inversează ordinea de aplicare a forțelor, mai întîi supunînd structura la acțiunea forțelor Q_j, care produc deformata $Ai'j'B$ din fig. 10.25, *b*.

În această situație, forțele vor efectua un lucru mecanic

$$L'_{(II)} = \frac{1}{2}\sum Q_j\Delta_{jj}.$$

În continuare, structura se încarcă cu forțele P_i și ajunge în poziția deformată $Ai''j''B$. În această etapă, deplasările pe direcțiile forțelor P_i sînt Δ_{ii} iar cele pe direcțiile forțelor Q_j sînt Δ_{ji}, efectuindu-se un lucru mecanic $L''_{(II)}$, și anume

$$L''_{(II)} = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_{ii} + \sum Q_j\Delta_{ji}.$$

Lucrul mecanic total efectuat în situația II este

$$L_{(II)} = \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_{ii} + \sum Q_j\Delta_{ji} + \frac{1}{2}\sum Q_j\Delta_{jj}.$$

În ambele situații, pe structură se găsesc aplicate în final ambele sisteme de forțe rezultînd deci aceeași deformată. Aceasta înseamnă că lucrul mecanic final trebuie să fie același, și anume

$$L_{(I)} = L_{(II)}$$

$$\frac{1}{2}\sum P_i\Delta_{ii} + \frac{1}{2}\sum Q_j\Delta_{jj} + \sum P_i\Delta_{ij} = \frac{1}{2}\sum Q_j\Delta_{jj} + \frac{1}{2}\sum P_i\Delta_{ii} + \sum Q_j\Delta_{ji}$$

sau

$$\sum P_i\Delta_{ij} = \sum Q_j\Delta_{ji} \qquad (10.30)$$

unde Δ_{ij} reprezintă deplasările pe direcțiile forțelor P_i, produse de încărcarea cu sistemul de forțe Q_j, iar Δ_{ji} constituie deplasările pe direcția forțelor Q_j, datorită încărcării cu sistemul de forțe P_i (fig. 10.25, *c*, *d*).

Pe baza ultimei relații se poate enunța *teorema reciprocității lucrului mecanic* (teorema lui Betti), și anume: dacă asupra unei structuri elastice

se aplică static și pe rînd două sisteme de forțe P_i și Q_j, lucrul mecanic produs de sistemul de forțe P_i, cînd acesta parcurge deplasările produse de sistemul Q_j, este egal cu lucrul mecanic produs de sistemul de forțe Q_j, cînd acesta parcurge deplasările produse de sistemul P_i.

10.5.2. CAZURI PARTICULARE

Pentru a fi deosebite de alte mărimi statice, deplasările și forțele de legătură din încărcări unitare se vor nota cu litere mici, utilizîndu-se doi indici (de exemplu δ_{ij}, r_{ij}).

Teorema reciprocității deplasărilor (Maxwell). Se va aplica teorema generală a reciprocității lucrului mecanic pentru cazul particular cînd ambele sisteme de forțe sînt alcătuite din cîte o singură forță, și anume forța P_i, respectiv Q_j (fig. 10.26, *a*, *b*). Rezultă

$$P_i\Delta_{ij} = Q_j\Delta_{ji}.$$

Dacă în secțiunea i se aplică o forță $P_i = 1$, în secțiunea j se va obține pe direcția Q_j deplasarea δ_{ji} (fig. 10.26, *a*). Pe baza proporționalității dintre încărcări și deplasări se poate scrie

$$\Delta_{ji} = P_i\delta_{ji}.$$

În mod similar, încărcînd structura cu forța $Q_j = 1$, pe direcția forței P_i se înregistrează deplasarea δ_{ij} (fig. 10.26, *b*), existînd relația

$$\Delta_{ij} = Q_j\delta_{ij}.$$

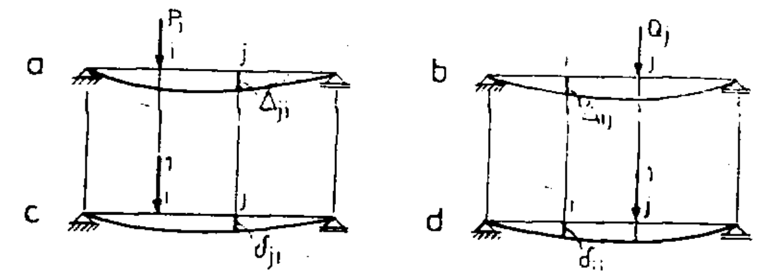


Fig. 10.26.

Înlocuind în relația generală expresiile anterioare, se obține

$$P_i(Q_j\delta_{ij}) = Q_j(P_i\delta_{ji})$$

sau

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \qquad (10.31)$$

care reprezintă teorema reciprocității deplasărilor din forțe unitare (teorema Maxwell): deplasarea pe direcția forței P_i produsă de o încărcare $Q_j = 1$ este egală cu deplasarea pe direcția forței Q_j ca urmare a încărcării $P_i = 1$.

Încărcările $P_i = 1$, $Q_j = 1$ și deplasările δ_{ij}, δ_{ji} sînt definite în sens generalizat, ele putînd fi forțe și momente (ca încărcare) respectiv translații și rotiri (pentru deplasări).

Cîteva exemple de reciprocitate a deplasărilor unitare sînt reprezentate în fig. 10.27, *a—c*.

Egalitatea deplasărilor unitare din fig. 10.27, *b* trebuie înțeleasă în sensul că cele două cantități sînt numeric egale, ambii membri ai egalității avînd dimensiune de lucru mecanic și deci relația este omogenă.

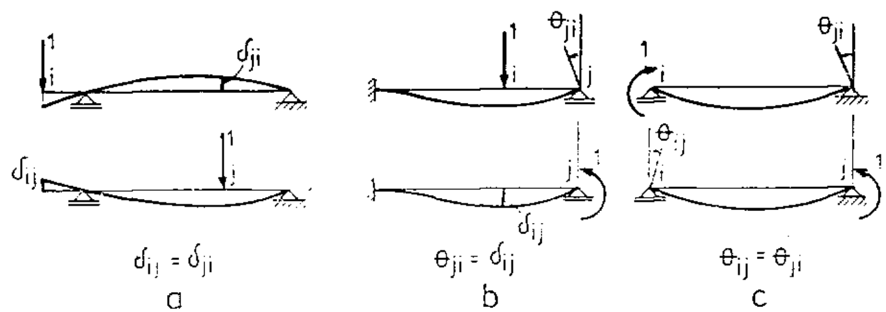


Fig. 10.27.

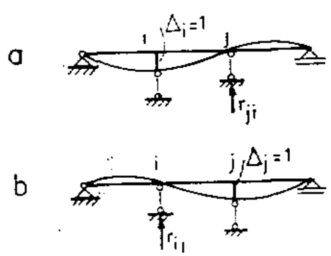


Fig. 10.28.

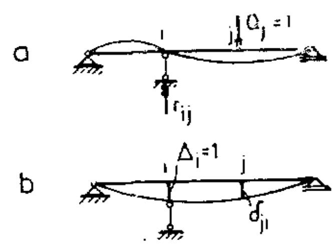


Fig. 10.29.

Teorema reciprocității forțelor de legătură. Această teoremă rezultă din examinarea fig. 10.28, *a*, *b*, și anume

$$r_{ij} = r_{ji}. \tag{10.32}$$

Teorema reciprocității dintre forțe de legătură și deplasări. Teorema rezultă din examinarea fig. 10.29, *a*, *b*, și anume

$$r_{ij} = \delta_{ji}. \tag{10.33}$$

11. Stabilitatea echilibrului elastic al barelor drepte

Teoria liniară a calculului structurilor de rezistență are la bază ipoteza micilor deplasări și legea lui Hooke, iar ecuațiile de echilibru static se scriu pe forma nedeformată a structurii, în consecință eforturile secționale și deplasările secțiunilor sînt funcții liniare de încărcările exterioare, fapt ce permite aplicarea principiului suprapunerii liniare a efectelor.

În realitate, echilibrul unei structuri se realizează în poziția deformată a acesteia sub acțiunea încărcărilor exterioare, echilibru denumit *echilibru elastic* (fig. 11.1).

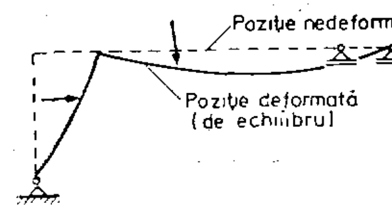


Fig. 11.1.

Forma de echilibru elastic a unei structuri este stabilă pînă la o anumită valoare a încărcărilor exterioare, cînd poate trece într-o poziție de echilibru instabil. Fenomenul de trecere a formei deformate a unei structuri dintr-o poziție de echilibru stabil într-o poziție de echilibru instabil poartă numele de *pierdere de stabilitate* sau *flambaj*. Valoarea încărcării exterioare la care se produce fenomenul de pierdere de stabilitate se numește încărcare *critică* sau *încărcare critică de flambaj*.

Natura echilibrului unui corp rigid se poate analiza prin deplasarea corpului într-o poziție vecină poziției inițiale și studierea tendinței de mișcare după ce acesta este lăsat liber (fig. 11.2).

Dacă corpul are tendința de revenire la poziția de echilibru, energia potențială de poziție este minimă ($\Delta U > 0$), echilibrul corpului este stabil (fig. 11.2, *a*). Dacă corpul rămîne în poziție deplasată, energia potențială este staționară ($\Delta U = 0$), echilibrul corpului este indiferent (fig. 11.2, *b*), iar dacă are tendința de depărtare de poziția de echilibru, energia potențială este maximă ($\Delta U < 0$), echilibrul corpului este instabil (fig. 11.2, *c*).

În mod similar, pentru analiza naturii echilibrului elastic al formei deformate a unei structuri, trebuie studiată comportarea acesteia la acțiunea unei cauze perturbatoare care o deplasează în vecinătatea formei deformate inițiale. Situația unei bare drepte, simplu rezemată, solicitată la o forță de compresiune a cărei mărime crește, este prezentată în fig. 11.2. Pentru o forță de compresiune inferioară încărcării critice de flambaj, deformata auxiliară produsă de încărcarea perturbatoare F se apropie de deformata inițială (forma rectilinie

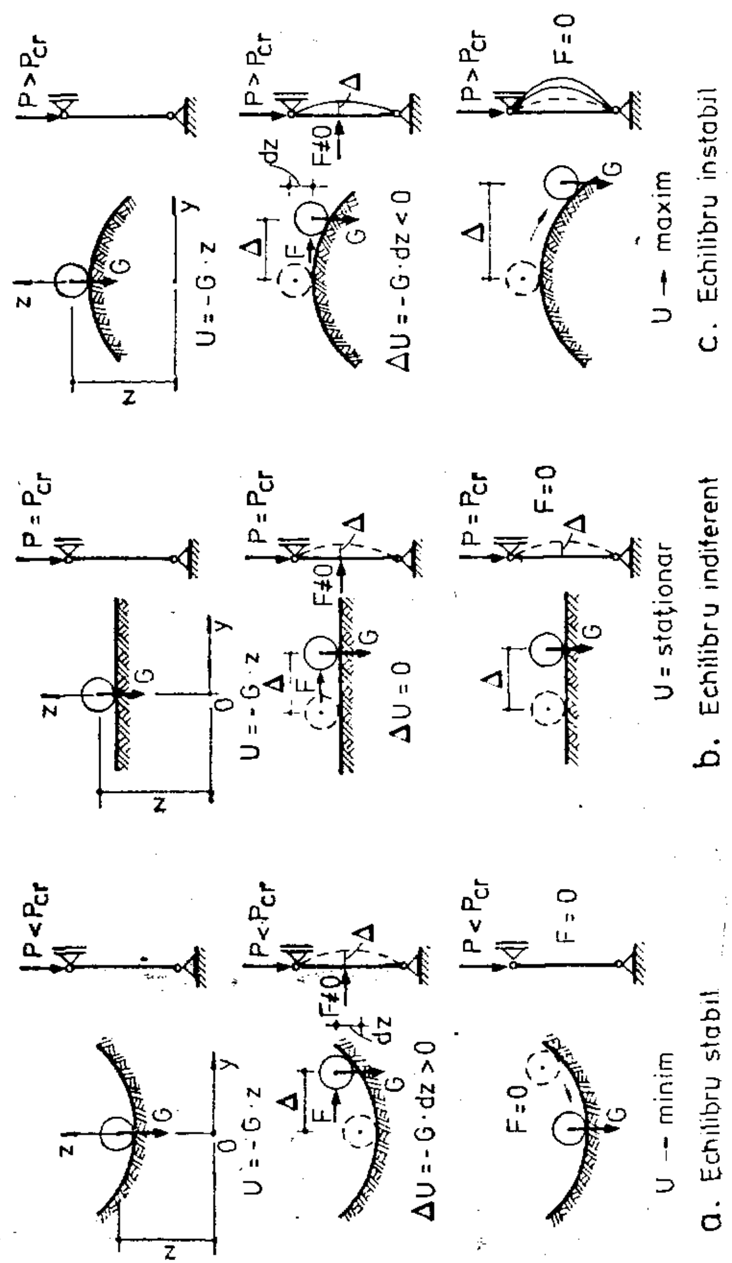


Fig. 11.2.

a barei) după ce cauza perturbatoare a fost îndepărtată. Bara se rectilinie găseşte în echilibru stabil (v. fig. 11.2, *a*). Pentru o forţă de compresiune egală cu încărcarea critică de flambaj, după îndepărtarea cauzei perturbatoare F, deformata auxiliară se depărtează de cea iniţială ajungînd într-o altă poziţie de echilibru. Bara se găseşte într-un echilibru indiferent (v. fig. 11. 2, *b*). Dacă forţa axială depăşeşte valoarea încărcării critice de flambaj, după îndepărtarea cauzei perturbatoare, deformata auxiliară se depărtează de cea iniţială, deplasările crescînd ireversibil pe măsură ce forţa axială creşte. Bara se găseşte în echilibru instabil (v. fig. 11.2, *c*).

Dacă pentru $P < P_{cr}$ forma rectilinie a axei barei este o formă de echilibru stabilă, pentru $P > P_{cr}$ forma rectilinie de echilibru este nestabilă, iar $P = P_{cr}$ constituie cazul limită pentru care bara se găseşte în echilibru elastic indiferent, adică în afara formei de echilibru rectiliniu a axei barei sînt posibile şi forme curbe de echilibru elastic.

Pierderea de stabilitate a echilibrului elastic sub acţiunea numai a forţei axiale de compresiune se caracterizează prin modificarea bruscă a formei deformate, care se reflectă prin apariţia unei discontinuităţi în diagrama încărcare-deplasare în dreptul forţei critice (fig. 11.3, *a*). Întrucît pentru $P = P_{cr}$ sînt teoretic posibile două forme distincte de echilibru : forma cu axa barei rectilinie, $y = 0$, şi forma curbă cu $y \neq 0$, se constată apariţia unei bifurcări a echilibrului. În acest caz, fenomenul de pierdere a stabilităţii elastice poartă numele de flambaj prin bifurcare sau simplu, flambaj.

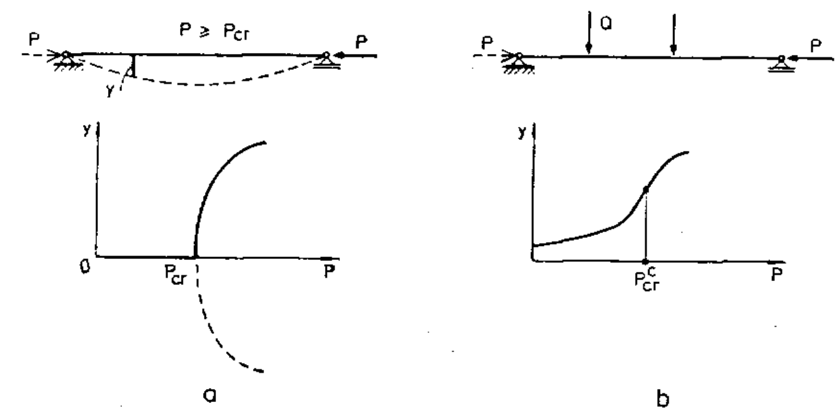


Fig. 11.3.

Pierderea stabilităţii echilibrului elastic sub acţiunea concomitentă a forţei axiale de compresiune şi a forţelor transversale cu valoare constantă, se caracterizează printr-o variaţie neliniară a deplasărilor funcţie de intensitatea forţei de compresiune (fig. 11,3, *b*). În apropierea unei anumite valori a forţei axiale de compresiune notată P^c_{cr}, deplasările cresc extrem de rapid punînd în evidenţă o micşorare a rigidităţii barei. Valoarea lui P^c_{cr} este valoarea forţei critice de pierdere a stabilităţii echilibrului prin deformare continuă. Se poate demonstra că în domeniul elatic $P_{cr} = P^c_{cr}$. În realitate, datorită imposibilităţii eliminării cauzelor care produc deplasări transversale axei barei (excentricităţi, curburi iniţiale, forţe transversale etc.), există numai flambaj prin deformare continuă, dar studiul fenomenului de flambaj prin bifurcare prezintă importanţă prin faptul că forţa critică stabilită P_{cr}

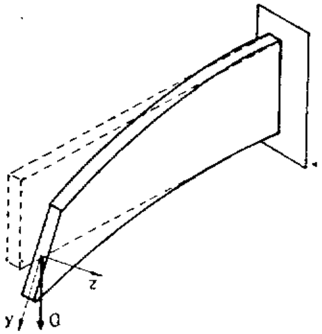


Fig. 11.4.

este aceeaşi cu forţa critică de pierdere a stabilităţii prin deformare continuă P_{cr}^{c} şi se determină mai uşor.

Pierderea stabilităţii echilibrului elastic poate avea loc şi la alte tipuri de solicitări. Astfel, în cazul grinzilor solicitate la încovoiere, cu secţiune transversală îngustă (fig. 11.4), pentru o anumită valoare a încărcării transversale, grinda îşi pierde stabilitatea deplasîndu-se lateral printr-o solicitare de încovoiere şi torsiune. Acest tip de pierdere a stabilităţii elastice poartă numele de flambaj lateral.

Pe baza celor arătate mai înainte, rezultă că pentru o exploatare în condiţii de siguranţă, un element de construcţie sau o structură de rezistenţă în ansamblu, trebuie să satisfacă pe lîngă criteriile de rezistenţă şi deformabilitate şi criteriul de stabilitate, exprimat sub forma

$$c_f = \frac{P_{cr}}{P_{max}} \geqslant c_{af} \tag{11.1}$$

unde : c_f este coeficientul de siguranţă la flambaj efectiv ; P_{max} — valoarea maximă a încărcărilor exterioare ; P_{cr} — forţa critică de flambaj iar c_{af} — coeficientul de siguranţă admisibil la flambaj stabilit prin prescripţii oficiale.

11.1. FLAMBAJUL BAREI DREPTE SOLICITATĂ LA COMPRESIUNE CENTRICĂ ÎN STADIUL ELASTIC

Forma de echilibru rectilinie a unei bare drepte solicitată la compresiune (fig. 11.5, *a*) este stabilă pentru $P < P_{cr}$. Cînd forţa axială de compresiune ajunge la valoarea $P = P_{cr}$, forma de echilibru rectilinie devine instabilă, axa barei se poate deforma deplasîndu-se transversal, trecînd într-o nouă poziţie de echilibru elastic. În această stare deformată, deplasarea transversală a unui punct la distanţa x situat pe axa barei este $y(x)$, (fig. 11.5, *b*), iar în poziţia deplasată a secţiunii momentul încovoietor are expresia

$$M(x) = P_{cr}y(x). \tag{11.2}$$

Dacă se consideră deplasările $y(x)$ mici, se poate utiliza pentru exprimarea deplasării unui punct curent al axei barei ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \tag{11.3}$$

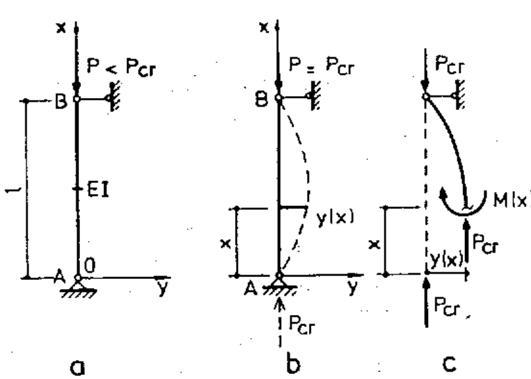


Fig. 11.5.

şi introducînd relaţia (11.2) în (11.3) se obţine

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{P_{cr}}{EI}y(x) = 0. \tag{11.4}$$

Notînd

$$k^2 = \frac{P_{cr}}{EI} \tag{11.5}$$

ecuaţia (11.4) devine

$$\frac{d^2y(x)}{dy^2} + k^2y(x) = 0 \tag{11.6}$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară, omogenă, de ordinul doi cu coeficienţi constanţi. Soluţia acestei ecuaţii este

$$y(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx). \tag{11.7}$$

Funcţia $y(x)$ reprezentînd ecuaţia formei deformate în momentul pierderii echilibrului elastic, trebuie să satisfacă condiţiile la limită corespunzătoare reazemelor barei (fig. 11.5, *b*) :

a) în reazemul articular $A(x = 0)$, $y(0) = 0$, rezultînd $C_2 = 0$ şi în consecinţă ecuaţia (11.7) se reduce la

$$y(x) = C_1 \sin(kx) ; \tag{11.8}$$

b) în reazemul simplu $B(x = l)$, $y(l) = 0$, care introduse în relaţia (11.8) se obţine

$$C_1 \sin kl = 0. \tag{11.9}$$

Relaţia (11.9) poate fi satisfăcută pentru :

a) $C_1 = 0$, deci $y(x) = 0$, grinda rămîne cu axa rectilinie, soluţie care nu interesează ;

b) $\sin kl = 0$, ale cărei soluţii posibile sînt :

$$kl = 0,\ \pi,\ 2\pi, \ldots\ n\pi \ (n \text{ — număr întreg}). \tag{11.10}$$

Soluţia $kl = 0$ conduce la $k = 0$ şi, conform relaţiei (11.5), la $P = 0$, adică situaţia barei neîncărcate, soluţia nu interesează.

Introducînd soluţia $kl = \pi$ în relaţiile (11.5) şi (11.8) se obţine

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \tag{11.11}$$

$$y(x) = C_1 \sin \frac{\pi}{l}x. \tag{11.12}$$

Deci forţei critice de pierdere a stabilităţi P_{cr} [relaţia (11.11)] îi corespunde o formă deformată după care flambează bara [relaţia (11.12)], care poartă numele de formă proprie de flambaj asociată lui P_{cr}.

Constanta de integrare C_1 rămîne nedeterminată, caracteristic echilibrului indiferent, şi în consecinţă nu se poate preciza sensul şi valoarea depla-

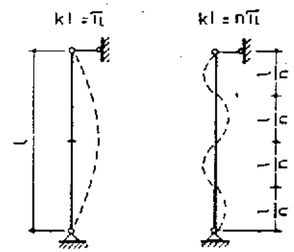


Fig. 11.6.

sărilor în momentul pierderii stabilității grinzii. În cazul $kl = \pi$, forma proprie de flambaj este o sinusoidă cu o semiundă (fig. 11.6, *a*).

Soluția generală $kl = n\pi$ conduce la expresia forței critice de flambaj

$$P_{cr\,(n)} = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \tag{11.13}$$

și la forma proprie de flambaj asociată acesteia

$$y(x) = C_1 \sin n\frac{\pi}{l}\,x \tag{11.14}$$

care este o sinusoidă cu n semiunde (fig. 11.6, *b*).

Din punct de vedere practic interesează numai prima soluție, $n = 1$ [relațiile (11.11) și (11.12)], care stabilește cea mai mică forță critică de flambaj, deci situația cea mai periculoasă.

Relația (11.13) poate fi scrisă sub forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} \tag{11.15}$$

unde l/n reprezintă lungimea unei semiunde de sinusoidă (fig. 11.6, *b*).

Definind *lungimea de flambaj* l_f ca fiind distanța dintre două puncte succesive de inflexiune ale formei proprii de flambaj și notînd $l_f = l/n$, rezultă expresia generală a forței critice (formula lui Euler)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2}\,. \tag{11.16}$$

Formula lui Euler prezentată sub forma (11.16) permite stabilirea forței critice de flambaj pentru toate tipurile de bare, indiferent de legăturile capetelor acesteia dacă se precizează lungimea de flambaj.

Pentru cazuri simple, lungimea de flambaj se stabilește prin observații directe asupra curbei deformate după care poate flamba bara.

11.1.1. LUNGIMI DE FLAMBAJ PENTRU BARE CU DIFERITE TIPURI DE REZEMARI LA CAPETE

Pentru unele cazuri ideale de rezemare ale barei la capete se pot stabili, prin observații judicioase asupra curbei deformate după care poate flamba bara, lungimile de flambaj corespunzătoare (fig. 11.7).

1) Bara cu o articulație la un capăt și reazem simplu normal pe axa barei la capătul opus reprezintă cazul fundamental pentru care s-a determinat expresia forței critice de flambaj (fig. 11.7, *a*)

$$l_f = l. \tag{11.17}$$

2) Bara încastrată la un capăt și liberă la capătul opus. Forma proprie de flambaj este prezentată în fig. 11.7, *b*, iar încărcarea P_{cr} își păstrează direcția în urma deplasării capătului liber. Întrucît $M(x) = P_{cr}y(x)$, iar deplasarea axei barei are valoare zero în capătul liber al barei, rezultă că $M = 0$

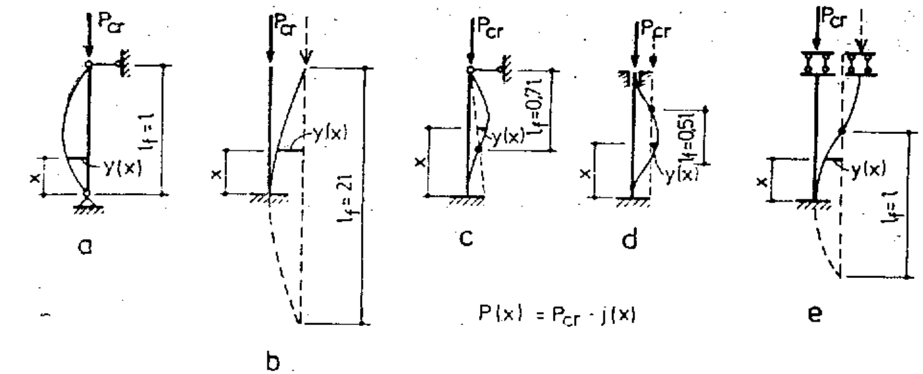


Fig. 11.7.

în punctul de aplicare al forței de compresiune. Deci în capătul liber al barei se găsește un punct de inflexiune ($d^2y/dx^2 = -M/EI = 0$), celălalt punct de inflexiune se determină din condiții de simetrie.

În consecință,

$$l_f = 2l. \tag{11.18}$$

3) Bara încastrată la un capăt și reazem simplu normal pe axa barei la capătul opus. Întrucît în reazemul simplu deplasarea transversală a axei barei este zero iar în încastrare atît deplasarea cît și rotirea sînt nule, rezultă că forma proprie de flambaj trebuie să aibă un punct de inflexiune între mijlocul grinzii și încastrare (fig. 11.7, *c*). Se poate arăta că

$$l_f = 0{,}7\ l. \tag{11.19}$$

4) Bara încastrată la ambele capete. Datorită condiției de deplasări transversale nule și rotiri nule ale axei barei în cele două secțiuni de încastrare, rezultă (fig. 11.7, *d*)

$$l_f = 0{,}5\ l. \tag{11.20}$$

5) Bară încastrată la un capăt și încastrare care permite deplasare normală pe axa barei liberă la capătul opus. Rotirea și deplasarea nule ale secțiunii de încastrare și translația normal pe axa barei a capătului opus, determină forma proprie de flambaj din fig. 11.7, *e*, de unde rezultă

$$l_f = l. \tag{11.21}$$

11.1.2. LIMITA DE VALABILITATE A FORMULEI LUI EULER

În vederea dezvoltării unor relații de calcul simple pentru bare solicitate la compresiune centrică cu luarea în considerare a fenomenului de flambaj, este necesar a se determina eforturile unitare maxime. Ținînd seama că forța critică P_{cr} reprezintă cea mai mare valoare a forței de compresiune pentru care bara își păstrează forma de echilibru rectilinie, expresia eforturilor unitare este similară cu cea stabilită la solicitarea axială (compresiune)

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A_{ef}} \tag{11.22}$$

unde σ_{cr} reprezintă efortul unitar normal corespunzător forței critice. Prin înlocuirea în relația (11.22) a lui P_{cr} cu expresia (11.16) rezultă

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_f^2} \cdot \frac{1}{A} = \frac{\pi^2 E}{l_f^2} i^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_f}{i}\right)^2} \tag{11.23}$$

unde $i^2 = I/A$ este raza de inerție a secțiunii transversale a barei în raport cu axa față de care se studiază flambajul.

Notînd

$$\lambda = \frac{l_f}{i} \tag{11.24}$$

rezultă

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{11.25}$$

Mărimea λ se numește *coeficient de zveltețe* sau *de subțirime* și caracterizează sub aspect geometric și de legături o bară solicitată la compresiune.

Întrucît ecuația fibrei medii deformate [relația (11.3)] este valabilă numai în stadiul elastic de comportare al materialului, rezultă că formula de determinare a lui σ_{cr} [relația (11.25)] este valabilă numai pentru valori ale lui σ_{cr} mai mici decît limita de proporționalitate σ_p

$$\sigma_{cr} \leqslant \sigma_p \tag{11.26}$$

sau

$$\lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}. \tag{11.27}$$

Notînd cu

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \tag{11.28}$$

rezultă condiția obligatorie a coeficientului de zveltețe al barei, λ, pentru ca formula lui Euler să fie aplicabilă (v. fig. 11.8, *a*):

$$\lambda \geqslant \lambda_0. \tag{11.29}$$

Pentru oțel moale OL 37 cu $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ daN/cm² și $\sigma_p = 1\,900$ daN/cm² rezultă

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6}{1\,900}} \approx 105. \tag{11.30}$$

Domeniul de valabilitate al formulei lui Euler, limitat de valoarea λ_0, se numește domeniul elastic de pierdere a stabilității. Pierderea stabilității echilibrului pentru valori $\sigma_{cr} > \sigma_p$ poartă numele de flambaj în domeniul plastic ($\lambda < \lambda_0$).

Flambajul barelor drepte în domeniul plastic a făcut obiectul studiilor a numeroși cercetători, însă rezultatele cercetărilor teoretice servesc numai pentru a putea intui cum trebuie să varieze σ_{cr} în intervalul $\lambda \in (0, \lambda_0)$, fără însă a oferi elemente pentru un calcul practic de flambaj.

În prezent, numeroase țări admit variații ale lui σ_{cr} cu λ pe intervalul $(0, \lambda_0)$ stabilite pe cale experimentală, prin numeroase încercări de laborator și prelucrări statice ale rezultatelor acestora.

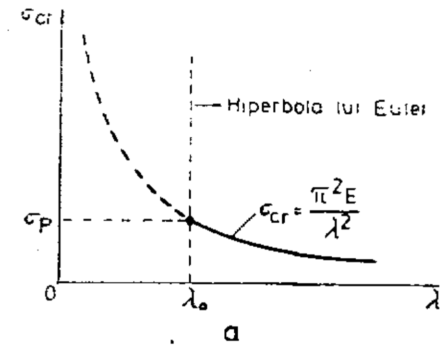
11.1.3. FLAMBAJUL BARELOR DIN OȚEL MOALE OL 37

Pentru a ține seama de complexul de imperfecțiuni geometrice și de material ale barelor din oțel solicitate la compresiune centrică, Convenția europeană pentru construcții metalice la care participă și țara noastră, a efectuat o serie de încercări experimentale pe bare laminate sau sudate. Pe baza acestor încercări s-au stabilit o serie de curbe ale valorilor minime ale rezistențelor critice la flambaj funcție de λ, care depind de forma secțiunilor transversale ale barelor și de modul lor de asamblare.

În continuare, se prezintă modul de variație a rezistenței critice la flambaj, σ_{cr}, a rezistenței admisibile la flambaj, σ_{af} și a coeficientului de siguranță la flambaj, c_f, în conformitate cu prescripțiile românești de calcul a barelor din oțel OL 37 (fig. 11.8).

11.1.3.1. **Variația rezistenței critice la flambaj σ_{cr} cu λ.** Pentru intervalul $\lambda \in (0,20)$, coeficientul de zveltețe este foarte mic, fenomenul de pierdere a echilibrului elastic nu se manifestă și, în consecință, pe această zonă se admite $\sigma_{cr} = \sigma_c$.

Pentru intervalul $\lambda \in (20, \lambda_0)$, domeniul plastic, prescripțiile de calcul românești admit pentru σ_{cr} ca variație o elipsă, care trece prin punctele A ($\lambda = 20$, $\sigma_{cr} = 2\,400$) și B ($\lambda = 105$, $\sigma_{cr} = 1\,900$), are tangenta în A orizontală iar în punctul B este tangentă la hiperbola lui Euler. Ecuația elipsei este



$$\sigma_{cr} = 1\,778 + 7{,}178\sqrt{7\,515 - (\lambda - 20)^2}. \tag{11.31}$$

Pentru intervalul $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_{max})$, flambajul are loc în domeniul elastic, fiind valabilă formula lui Euler (11.25). Valoarea lui λ_{max} este fixată pe considerente practice astfel încît bara să nu fie excesiv de flexibilă și să prezinte fenomene nedorite de vibrații.

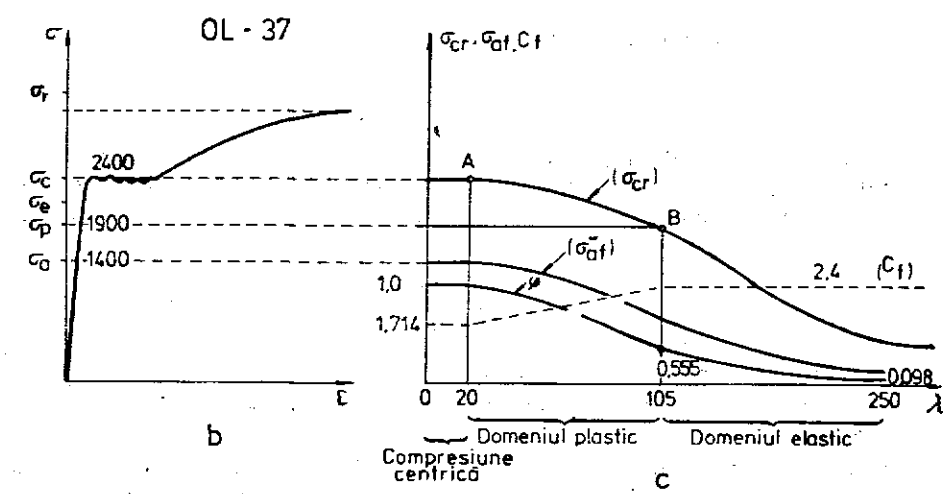


Fig. 11.8.

11.1.3.2. **Variaţia coeficientului de siguranţă la flambaj c_f şi a rezistenţei admisibile la flambaj cu λ.** În vederea dezvoltării unor relaţii de calcul practice a barelor solicitate la compresiune centrică cu luarea în considerare a fenomenului de flambaj, trebuie adoptat un coeficient de siguranţă la flambaj, care permite determinarea rezistenţei admisibile de flambaj

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_f}. \tag{11.32}$$

Trebuie remarcat că la stabilirea formulei lui Euler s-a considerat o situaţie ideală: s-a admis că bara are axa perfect rectilinie iar forţa P acţionează centric, ipoteze care nu pot fi realizate în practica curentă. De aceea, pentru a suplini această îndepărtare de calculul teoretic, se alege pentru coeficientul de siguranţă la flambaj o valoare mai mare decît cea aleasă pentru un calcul obişnuit de rezistenţă. Astfel, pentru intervalul $\lambda \in (0,20)$, unde fenomenul de flambaj nu se manifestă, se adoptă $c_f = 1,714$ de la solicitarea de compresiune centrică. Pentru intervalul $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_{max})$ se adoptă $c_f = 2,4$, iar pe intervalul $\lambda \in (20, \lambda_0)$, o variaţie liniară a coeficientului de siguranţă (fig. 11.8, *c*):

$$c_f = 1,714 + 0,00806\,(\lambda - 20). \tag{11.33}$$

Cunoscîndu-se efortul unitar σ_{cr} şi coeficientul de siguranţă admisibil la flambaj c_f, se pot stabili rezistenţele admisibile la flambaj σ_{af} pentru orice valoare a coeficientului de zvelteţe λ [relaţia (11.32)].

11.1.4. ASPECTE DE CALCUL LA FLAMBAJ

Dezvoltarea unor relaţii de calcul practic la flambaj pe baza celor prezentate mai înainte, comportă următoarele faze:

a) stabilirea coeficientului de zvelteţe λ şi pe această bază precizarea domeniului în care se produce flambajul;

b) determinarea coeficientului de siguranţă c_f şi a rezistenţei admisibile σ_{af} cu relaţii corespunzătoare domeniului în care se găseşte λ;

c) determinarea efortului unitar normal efectiv şi compararea acestuia cu rezistenţa admisibilă la flambaj

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_{ef}} \leqslant \sigma_{af}. \tag{11.34}$$

Modalitatea de calcul prezentată are unele inconveniente: se utilizează relaţii de calcul diferite pentru domeniul plastic şi cel elastic, iar rezistenţa admisibilă are o valoare variabilă. Calculul se poate simplifica prin introducerea coeficientului de flambaj φ

$$\varphi = \frac{\sigma_{af}}{\sigma_{ac}} \leqslant 1, \tag{11.35}$$

unde σ_{ac} este rezistenţa admisibilă la compresiune.

Variaţia coeficientului de flambaj φ funcţie de λ este prezentată în fig. 11.8, *c*.

Pe baza unor studii teoretice şi experimentale s-au întocmit tabele care conţin valorile coeficienţilor de flambaj φ pentru coeficienţi de zvelteţe uzuali, funcţie de: forma secţiunii transversale, planul în care se produce flambajul, modul de realizare a barei. Avînd întabulat coeficientul de flambaj φ, relaţiile de calcul la flambaj au o formă simplă de tipul celor întîlnite în calculele de rezistenţă.

1) **Verificarea.** Constă în compararea efortului unitar normal efectiv cu rezistenţa admisibilă la flambaj. Fiind cunoscute dimensiunile şi legăturile de la capete ale barei, caracteristicile geometrice ale secţiunii transversale şi materialul din care este confecţionată bara, se determină raza de inerţie minimă a secţiunii transversale şi coeficientul de zvelteţe corespunzător

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}; \quad \lambda_{max} = \frac{l_f}{i_{min}}. \tag{11.36}$$

Din tabele se stabileşte coeficientul de flambaj φ corespunzător lui λ_{max} şi se verifică bara cu relaţia

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{A_{ef}} \leqslant \sigma_{af}; \quad \sigma_{af} = \varphi\sigma_{ac} \tag{11.37}$$

sau

$$\sigma_{ef} = \frac{P}{\varphi A_{ef}} \leqslant \sigma_{ac}. \tag{11.38}$$

2) **Dimensionarea.** Constă în stabilirea secţiunii necesare unei bare cu dimensiuni, legături la capete şi material din care se confecţionează cunoscute.

Pentru dimensionare se presupune iniţial că fenomenul de flambaj se produce în domeniul elastic. În acest caz, forţa de compresiune admisibilă este

$$P = \frac{P_{cr}}{c_f} = \frac{\pi^2 EI}{c_f l_f^2} \tag{11.39}$$

de unde rezultă

$$I_{nec} = \frac{c_f P l_f^2}{\pi^2 E}. \tag{11.40}$$

Pe baza secţiunii alese se determină $i = \sqrt{\frac{I_{ef}}{A_{ef}}}$ şi $\lambda = l_f/i$. Dacă $\lambda > \lambda_0$ dimensionarea este bună. Dacă $\lambda < \lambda_0$ înseamnă că s-a folosit formula lui Euler într-un domeniu în care ea nu este valabilă. În acest caz, dimensionarea se face prin încercări succesive adoptînd pentru început pe λ deja determinat şi verificînd secţiunea cu relaţia (11.38). Întrucît relaţia de verificare nu este satisfăcută de la început se corectează secţiunea şi se reverifică, succesiv, pînă cînd relaţia (11.38) este îndeplinită.

3) **Capacitatea portantă.** Constă în stabilirea forţei maxime de compresiune care poate să solicite o bară cu caracteristici geometrice, legături la capete şi caracteristici de material cunoscute.

Se determină $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$, $\lambda_{max} = l_f/i_{min}$ şi corespunzător din tabele coeficientul de flambaj φ. Capacitatea de încărcare a barei este

$$P_{cap} = \varphi A_{ef}\sigma_{ac}. \tag{11.41}$$

Observaţii:

1) În relaţiile de calcul de mai înainte s-a admis că bara are aceleaşi legături în cele două plane formate de axa barei şi una din axele principale şi centrale de inerţie ale secţiunii transversale (xOy sau xOz).

În cazul unei bare cu legături la capete, diferite în planele xOy și xOz (fig. 11.9, *a*), este necesară asigurarea la flambaj separat pentru fiecare plan, deoarece nu se poate aprecia de la început care este planul în care bara își va pierde stabilitatea echilibrului și deci care dintre forțele critice $P_{cr,y}$ și $P_{cr,z}$ este mai mică.

Pentru cazul din fig. 11.9, în planul xOz, bara este încastrată în capătul A și simplu rezemată în B (fig. 11.9, *b*), deci

$$l_{fz} = 0{,}7\ l \tag{11.42}$$

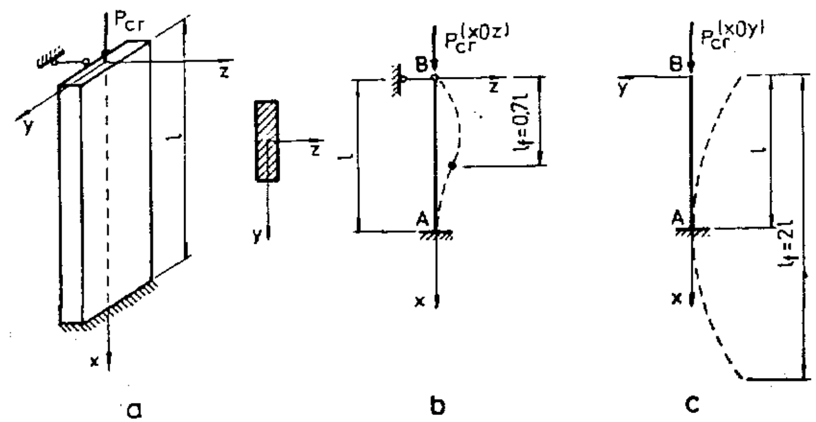


Fig. 11.9.

iar momentul de inerție principal corespunzător flambajului în acest plan este I_y. În consecință,

$$\lambda^{xOz} = \frac{l_{fz}}{i_y}\ . \tag{11.43}$$

În planul xOy, bara este încastrată în capătul A și liberă în B (fig. 11.9, *b*, *c*), deci

$$l_{fy} = 2\ l \tag{11.44}$$

iar momentul de inerție principal corespunzător flambajului în acest plan este I_z și în consecință

$$\lambda^{xOy} = \frac{l_{fy}}{i_z}\ . \tag{11.45}$$

Cea mai mare dintre valorile furnizate de relațiile (11.43) și (11.45) va conduce la forța critică de flambaj minimă

$$\lambda = \max(\lambda^{xOy},\ \lambda^{xOz})\ \text{și}\ P_{cr} = \min(P_{cr}^{xOy},\ P_{cr}^{xOz}). \tag{11.46}$$

Dacă lungimile de flambaj în cele două planuri sînt egale $l_{fy} = l_{fz} = l_f$, forța critică de flambaj va corespunde pentru $I = \min\ (I_y, I_z)$.

2) Întrucît valorile rezistenței critice σ_{cr} date de relația (11.25) nu depind de caracteristica de rezistență a materialului, iar modulele de elasticitate sînt

practic aceleași pentru oțelurile utilizate în construcții, rezultă că folosirea oțelurilor superioare nu aduce economie de material dacă flambajul are loc în domeniul elastic. Pentru flambaj în domeniul plastic, unde σ_{cr} depinde de σ_c, sînt indicate și oțeluri superioare.

11.2. INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA FORȚEI CRITICE LA FLAMBAJ

Pentru a examina influența forței tăietoare asupra forței critice la flambaj se va studia ecuația fibrei medii deformate prin introducerea efectului simultan al momentului încovoietor și al forței tăietoare.

Întrucît deplasarea laterală a axei barei în momentul pierderii stabilității echilibrului rectiliniu (fig. 11.10, *a*) poate fi scrisă ca sumă a deplasărilor datorate celor două efecte

$$y(x) = y_M(x) + y_T(x) \tag{11.47}$$

rezultă că și curbura axei deformate poate fi scrisă

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_M} + \frac{1}{\rho_T} \tag{11.48}$$

unde razele de curbură ρ_M și ρ_T au sensuri opuse (fig. 11.10, *c* și *d*).

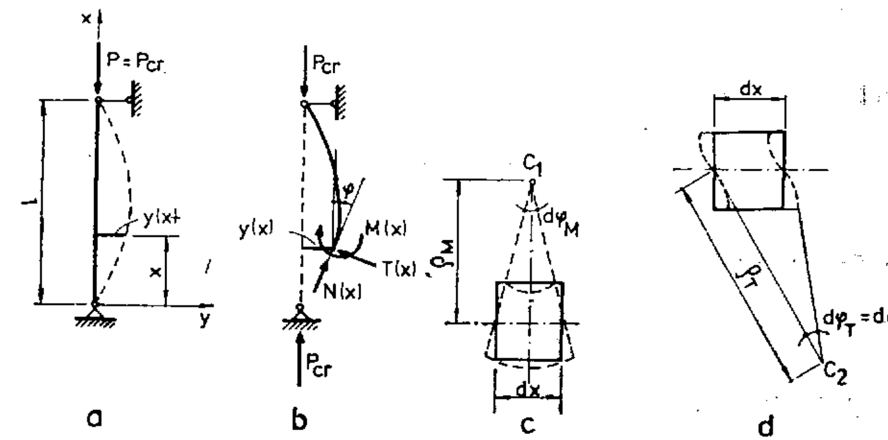


Fig. 11.10.

Eforturile secționale într-o secțiune curentă a barei în starea deformată (după flambaj) sînt (fig. 11.10, *b*)

$$M(x) = P_{cr}y\ (x) \tag{11.49}$$

$$T(x) = P_{cr} \sin\ \varphi \approx P_{cr}\ \varphi = P_{cr}\ \frac{dy(x)}{dx} \tag{11.50}$$

$$N(x) = -\ P_{cr} \cos\ \varphi \approx -\ P_{cr} \tag{11.51}$$

unde s-au făcut aproximațiile $\sin\ \varphi \approx \text{tg}\ \varphi \approx \varphi$ și $\cos\ \varphi \approx 1$ pentru unghiuri mici.

1) Influenţa momentului încovoietor

$$\frac{1}{\rho_M} = \frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{P_{cr}y(x)}{EI}. \tag{11.52}$$

2) Influenţa forţei tăietoare. La nivelul centrului de greutate al secţiunii transversale datorită forţei tăietoare $T(x)$

$$\tau_m = \eta\frac{T(x)}{A} \tag{11.53}$$

unde A este aria secţiunii transversale, iar η este un coeficient care include efectul distribuţiei neuniforme a eforturilor unitare tangenţiale pe secţiunea transversală

$$d\tau_m = \eta\frac{dT(x)}{A} = \eta\frac{P_{cr}}{A}\frac{d^2y(x)}{dx^2}dx \tag{11.54}$$

dar $\tau_m = G\gamma_m$ şi $d\tau_m = Gd\gamma_m$, de unde:

$$d\gamma_m = \eta\frac{P_{cr}}{GA}\frac{d^2y(x)}{dx^2}dx \tag{11.55}$$

şi

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{d\gamma_m}{dx} = \eta\frac{P_{cr}}{GA}\frac{d^2y(x)}{dx^2}. \tag{11.56}$$

Din relaţiile (11.48), (11.52) şi (11.56) rezultă

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{P_{cr}}{EI}y(x) + \eta\frac{P_{cr}}{GA}\frac{d^2y(x)}{dx^2}. \tag{11.57}$$

Notînd

$$a^2 = \frac{P_{cr}}{EI\left(1 - \frac{\eta P_{cr}}{GA}\right)} \tag{11.58}$$

se ajunge la ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + a^2y(x) = 0 \tag{11.59}$$

similară ecuaţiei (11.6). Soluţia ecuaţiei (11.59) este

$$y(x) = C_1\sin(ax) + C_2\cos(ax). \tag{11.60}$$

Procedînd analog ca la stabilirea formulei lui Euler (v. § 11.1) rezultă

$$\sin al = 0 \tag{11.61}$$

şi

$$al = \pi,\ 2\pi, \ldots, n\pi. \tag{11.62}$$

Pentru expresia forţei critice de flambaj minimă rezultă

$$\frac{P_{cr}}{EI\left(1 - \frac{\eta P_{cr}}{GA}\right)} = \frac{\pi^2}{l^2} \tag{11.63}$$

sau

$$P_{cr}\left(1 + \frac{\pi^2EI}{l^2}\cdot\frac{\eta}{GA}\right) = \frac{\pi^2EI}{l^2} \tag{11.64}$$

unde se notează cu $P_{cr}^E = \frac{\pi^2EI}{l^2}$ forţa critică stabilită cu formula lui Euler, şi rezultă

$$P_{cr} = \frac{P_{cr}^E}{1 + \frac{\eta}{GA}P_{cr}^E}. \tag{11.65}$$

Ţinînd seama că $\gamma_m = \frac{dy_T(x)}{dx} = \frac{\eta T(x)}{GA}$ este lunecarea specifică medie datorită forţei tăietoare $T(x)$, rezultă

$$\gamma_1 = \frac{\eta}{GA} \tag{11.66}$$

care reprezintă lunecarea specifică produsă de o forţă tăietoare unitară. În consecinţă, relaţia (11.65) se poate scrie

$$P_{cr} = \frac{P_{cr}^E}{1 + \gamma_1P_{cr}^E}. \tag{11.67}$$

Se observă că $P_{cr} < P_{cr}^E$, ceea ce înseamnă că influenţa forţei tăietoare reduce forţa critică de flambaj. La bare cu secţiunea plină, indiferent de planul în care se produce flambajul, termenul $1 + \gamma_1P_{cr} \approx 1$ şi $P_{cr} = P_{cr}^E$. În bare cu secţiunea transversală compusă din elemente care se solidarizează din loc în loc, valorile $\gamma_1P_{cr}^E$ nu mai sînt neglijabile şi deci forţa critică trebuie stabilită cu relaţia (11.67).

11.3. CALCULUL LA FLAMBAJ AL BARELOR CU SECŢIUNE COMPUSĂ

Barele solicitate la eforturi de compresiune mari sau care au lungimi de flambaj ridicate, se realizează cu secţiunea transversală compusă din profile laminate solidarizate cu plăcuţe (fig. 11.11, *a*) sau cu zăbreluţe (fig. 11.11, *b*).

Solidarizările pot fi asamblate prin sudură sau nituire.

Se *consideră o bară cu secţiune compusă alcătuită ca în fig. 11.11, c* solidarizată cu plăcuţe. Pentru flambaj în planul xOy (în raport cu axa care taie materialul secţiunii), lungimea de flambaj este l_{fy} iar momentul de inerţie este

$$I_z = 2I_{z_1} \tag{11.68}$$

deci

$$\lambda^{xOy} = \lambda_z = \frac{l_{fy}}{i_z} \text{ şi } P_{cr}^{xOy} = \frac{\pi^2EI_z}{l_{fy}^2}. \tag{11.69}$$

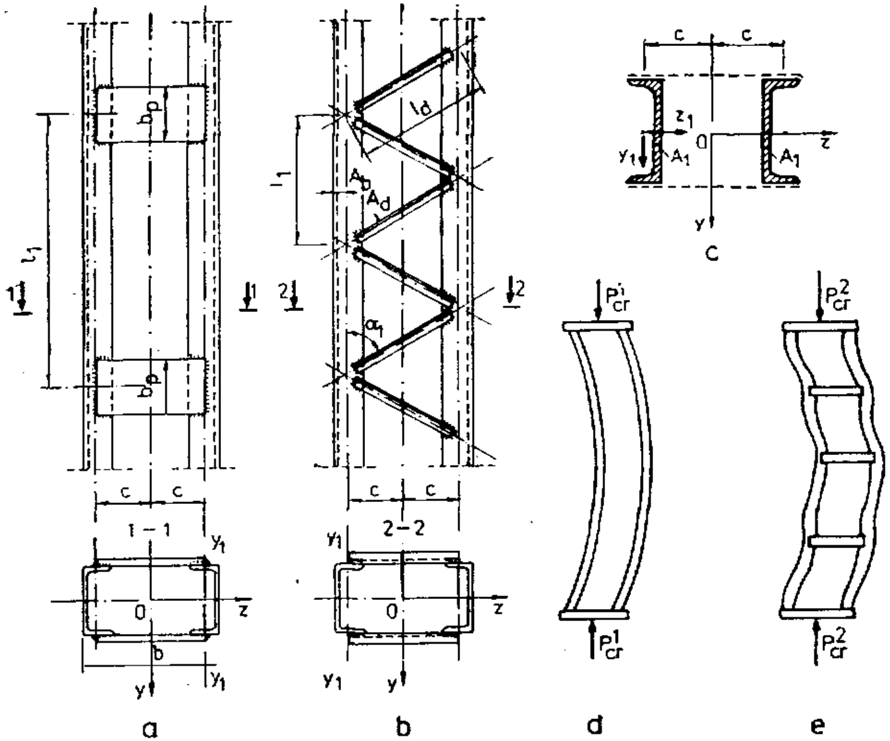


Fig. 11.11.

Valoarea forţei critice P_{cr}^{xOy} este aceeaşi indiferent de distanţa dintre profile sau modul cum sînt ele solidarizate.

Pentru flambaj în planul xOz, la care intervine rigiditatea la încovoiere în raport cu axa Oy, care nu taie materialul secţiunii, trebuie să se ia în considerare efectul lunecării între elementele secţiunii transversale.

Dacă cele două elemente care alcătuiesc secţiunea transversală nu ar fi solidarizate, în momentul pierderii stabilităţii formei rectilinii acestea se deformează împreună dar liber, cu caracteristica de rigiditate a fiecărui element izolat (fig. 11.11, *d*). Rezultă

$$P_{cr_{1}}^{xOz} = 2\,\frac{\pi^2 E I_{y_1}}{l_{fz}^2} \qquad (11.70)$$

cu

$$\lambda_1^{xOz} = \frac{l_{fz}}{i_{y1}} \text{ şi } i_{y_1} = \sqrt{\frac{I_{y1}}{A_1}} \qquad (11.71)$$

deci bara nu se comportă ca o bară cu secţiune compusă.

Pentru ca secţiunea transversală să îşi mărească capacitatea portantă faţă de flambaj, trebuie ca elementele de solidarizare (plăcuţe sau zăbreluţe) să fie capabile să preia forţele de lunecare care apar între cele două elemente ale secţiunii. Pentru aceasta, elementele de solidarizare se realizează cu prinderi rigide de elementele secţiunii fie prin sudură, fie prin nituire cu cel puţin două nituri la fiecare prindere. În aceste condiţii, elementele secţiunii sînt obligate să conlucreze prin intermediul solidarizărilor în momentul flambajului

(fig. 11.11, *e*). Pentru calculul forţei critice trebuie să se ţină seama de influenţa forţei tăietoare

$$P_{cr_1}^{xOz} = \frac{P_{cr}^{E(xOz)}}{1 + \gamma_1 P_{cr}^{E(xOz)}} \qquad (11.72)$$

unde

$$P_{cr}^{E(xOz)} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_{fz}^2} \qquad (11.73)$$

şi

$$I_y = 2(I_{y_1} + c^2 A_1). \qquad (11.74)$$

Efortul unitar normal corespunzător forţei critice este

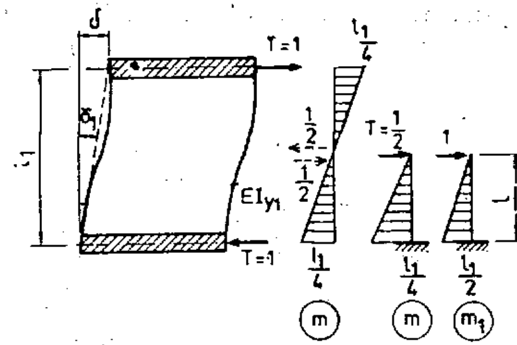


Fig. 11.12.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr_1}^{xOz}}{A} = \frac{\dfrac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}}{1 + \gamma_1 P_{cr}^{E(xOz)}} \qquad (11.75)$$

unde trebuie determinată lunecarea specifică γ_1 produsă de forţa tăietoare unitară.

Considerînd un panou între două plăcuţe de lungime l_1 (fig. 11.12), în ipoteza plăcuţelor infinit rigide la încovoiere rezultă

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{l_1}. \qquad (11.76)$$

Expresia deplasării δ se determină cu ajutorul formulei Maxwell-Mohr considerînd diagrama de momente încovoietoare din fig. 11.12 pe fiecare din barele de lungime l_1

$$\delta = \int \frac{m m_1}{EI}\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{1}{EI_{y_1}}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l_1}{4}\cdot\frac{l_1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l_1}{2}\right) = \frac{l_1^3}{24 E I_{y1}} \qquad (11.77)$$

deci

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{l_1} = \frac{l_1^2}{24 E I_{y1}} = \frac{l_1^2}{24 E A_1 i_{y1}^2} \qquad (11.78)$$

Cu mărimea γ_1 determinată expresia numitorului din relaţia (11.75) devine

$$1 + \gamma_1 P_{cr}^{E(xOz)} = 1 + \gamma_1 \frac{\pi^2 E I_y}{l_{fz}^2} = 1 + \frac{l_1^2}{24 E A_1 i_{y_1}^2}\cdot\frac{\pi^2 E\cdot 2A_1}{\left(\dfrac{l_{fz}}{i_y}\right)^2} = 1 + \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{\left(\dfrac{l_1}{i_{y1}}\right)^2}{\left(\dfrac{l_{fz}}{i_y}\right)^2} \qquad (11.79)$$

şi notînd $\lambda_{y1} = \dfrac{l_1}{i_{y1}}$; $\lambda_y = \dfrac{l_{fz}}{i_y}$ rezultă

$$1 + \gamma_1 P_{cr}^{E(xOz)} = 1 + \frac{\pi^2}{12}\,\frac{\lambda_{y1}^2}{\lambda_y^2}. \qquad (11.80)$$

Pentru un calcul aproximativ se consideră $\pi^2/12 \approx 1$ şi relaţia (11.80) devine

$$1 + \gamma_1 P_{cr}^{E(xOz)} = 1 + \frac{\lambda_{y1}^2}{\lambda_y^2} = \frac{\lambda_y^2 + \lambda_{y1}^2}{\lambda_y^2}. \qquad (11.81)$$

Introducînd relația (11.81) în (11.75) se obține

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2 + \lambda_{y_1}^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{yi}^2} \tag{11.82}$$

unde s-a notat $\lambda_{yi}^2 = \lambda_y^2 + \lambda_{y_1}^2$.

Relațiile (11.81) și (11.82) pun în evidență că față de axa Oy care nu taie materialul secțiunii transversale, coeficientul de zveltețe $\lambda_y = l_{fz}/i_y$ trebuie înlocuit cu un coeficient de zveltețe ideal λ_{yi} mai mare decît λ_y care ține seama de lunecările parțial împiedicate între elementele secțiunii transversale.

În cazul solidarizării cu zăbreluțe, corecția coeficientului de zveltețe are expresia

$$\lambda_{y_1} = \pi \sqrt{\frac{A}{A_d}\,\frac{l_d^3}{l_1 b^2}} \tag{11.83}$$

în care: A reprezintă aria întregii secțiuni; A_d — aria secțiunii transversale a zăbreluțelor așezate de ambele părți ale secțiunii; l_d — lungimea zăbreluței (fig. 11.11, *b*) iar l_1 — lungimea unui panou.

Aspectele de calcul la flambaj al barelor cu secțiune compusă sînt aceleași cu cele prezentate în cazul barelor cu secțiune transversală unitară, cu mențiunea că se va lucra cu coeficientul de flambaj φ corespunzător valorii maxime a coeficientului de zveltețe max $(\lambda_z$ și $\lambda_{yi})$.

Aplicația 11.1. Să se verifice talpa superioară S a grinzii cu zăbrele din fig. 11.13, *a*, a cărei secțiune transversală este alcătuită ca în fig. 11.13, *b*.

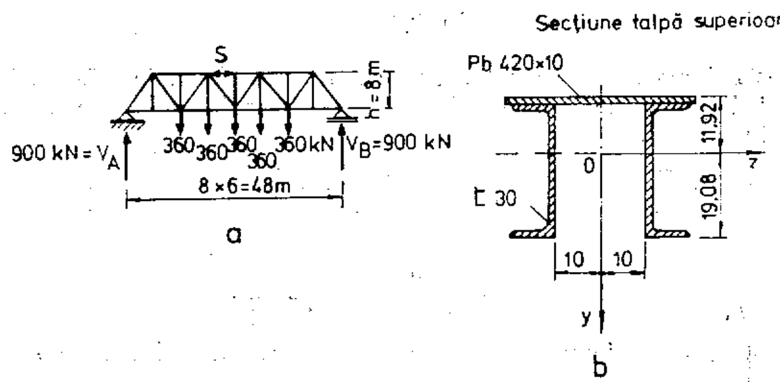


Fig. 11.13.

1) Determinarea efortului axial în talpa S prin procedeul secțiunilor oarecare

$$S = -\frac{M_i}{h} = -\frac{900\cdot24 - 360\cdot12 - 360\cdot6}{8} = 1\,890 \text{ kN}.$$

2) Caracteristici geometrice ale secțiunii transversale în raport cu axele de inerție centrale și principale

$$I_z = 42\cdot1\cdot11{,}42^2 + 2(8\,030 + 58{,}8\cdot4{,}08^2) = 23\,500 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1\cdot42^3}{12} + 2(495 + 58{,}8\cdot12{,}70^2) = 26\,120 \text{ cm}^4$$

$$A = 42\cdot1 + 2\cdot58{,}8 = 1{,}59{,}6 \text{ cm}^2$$

$$i_z = \sqrt{\frac{23\,500}{159{,}6}} = 12{,}15 \text{ cm}; \quad i_y = \sqrt{\frac{26\,120}{159{,}6}} = 12{,}78 \text{ cm}.$$

3) Lungimi de flambaj, coeficienți de zveltețe. Considerînd lungimea de flambaj a barei identică pentru cele două plane principale de inerție $l_f = 6{,}00$ m, rezultă

$$\lambda_z = \frac{l_f}{i_z} = \frac{600}{12{,}15} = 49{,}4; \quad \lambda_y = \frac{l_f}{i_y} = \frac{600}{12{,}78} = 47.$$

Deci $\lambda_{max} = \lambda_z = 49{,}4 \approx 50$.

4) Verificarea barei

$$\lambda_{max} = 50 \rightarrow \varphi = 0{,}852$$

$$\sigma_{ef} = \frac{S}{\varphi A} = \frac{189\,000}{0{,}852\cdot159{,}6} = 1\,390 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

Aplicația 11.2. Să se stabilească valoarea maximă a încărcării P astfel ca bara DE a structurii din fig. 11.14, *a*, să nu își piardă capacitatea portantă. Secțiunea barei DE este prezentată în fig. 11.14, *b*. Rezistența admisibilă $\sigma_a = 1\,500$ daN/cm².

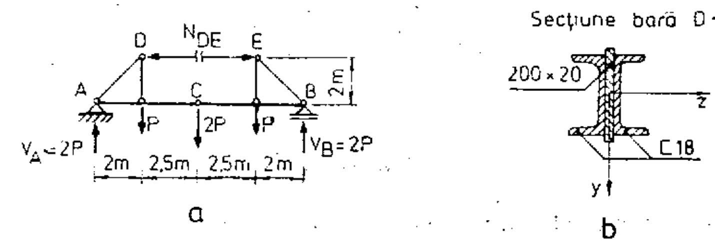


Fig. 11.14.

1) Determinarea efortului efectiv în bara DE. Din condiția ca momentul încovoietor în articulația C să fie zero, rezultă:

$$M_C^{st} = 0; \quad N_{DE} = \frac{2P\cdot4{,}5 - P\cdot2{,}5}{2} = 3{,}25\, P \quad [\text{kN}].$$

2) Stabilirea capacității portante la flambaj a barei DE. Caracteristicile geometrice ale secțiunii față de axele de inerție principale și centrale sînt:

$$I_z = 2\cdot1\,350 + \frac{2\cdot20^3}{12} = 4\,033 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 2(114 + 28\cdot2{,}92^2) = 706 \text{ cm}^4$$

$$A = 2\cdot28 + 20\cdot2 = 96 \text{ cm}^2;$$

$$i_z = \sqrt{\frac{4\,033}{96}} = 6{,}48 \text{ cm}; \quad i_y = \sqrt{\frac{706}{96}} = 2{,}71 \text{ cm}.$$

Bara este dublu articulată la capete și $l_f = 5{,}00$ m pentru ambele plane de inerție principale

$$\lambda_z = \frac{500}{6{,}48} = 77; \quad \lambda_y = \lambda_{max} = \frac{500}{2{,}71} = 185.$$

Corespunzător lui $\lambda_{max} = 185$ rezultă din tabele $\varphi = 0{,}175$

$$N_{DEcap} = \varphi A\sigma_a = 0{,}175 \cdot 96 \cdot 1\,500 = 252 \text{ kN}.$$

3) Stabilirea încărcării P maxime

$$N_{DE} = N_{DEcap}\,; \; 3{,}25\; P = 252\,; \; P_{cap} = \frac{252}{3{,}25} = 77{,}5 \text{ kN}.$$

Aplicația 11.3. Diagonala $a-b$ a grinzii cu zăbrele din fig. 11.15, a este alcătuită din două profile laminate tip U20 solidarizate cu plăcuțe amplasate la distanța $l_1 = 1{,}00$ m. Să se verifice diagonala ($\sigma_a = 1\,400$ daN/cm²).

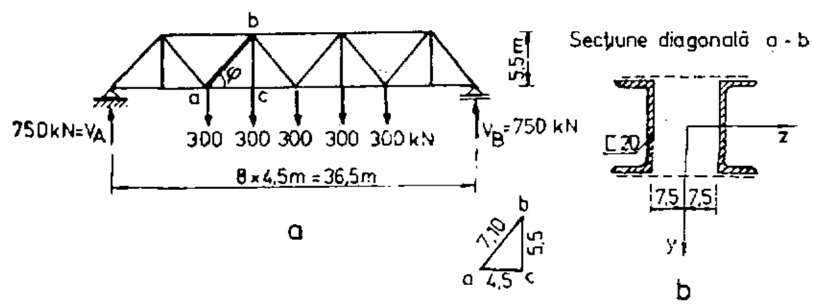


Fig. 11.15.

1) Determinarea efortului axial în diagonala $a-b$

$$D_{ab} = -\frac{T^{s}_{ac}}{\sin\varphi} = -\frac{750-300}{0{,}774} = -581{,}4 \text{ kN}.$$

Diagonala fiind comprimată se va face verificarea barei la flambaj.

2) Caracteristici geometrice ale secțiunii transversale în raport cu axele de inerție principale și centrale

$$A = 2 \cdot 32{,}2 = 64{,}40 \text{ cm}^2\,; \; I_z = 2 \cdot 1\,910 = 3\,820 \text{ cm}^4\,;$$

$$I_y = 2(148 + 32{,}2 \cdot 9{,}51^2) = 6\,140 \text{ cm}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{3\,820}{64{,}4}} = 7{,}70 \text{ cm}\,; \quad i_y = \sqrt{\frac{6\,140}{64{,}4}} = 9{,}76 \text{ cm}.$$

3) Stabilirea lungimilor de flambaj în cele două plane principale de inerție:

— în planul grinzii cu zăbrele (flambaj în raport cu axa Oz) l_f se adoptă 80% din lungimea barei

$$l_{fy} = 0{,}8l = 0{,}8 \cdot 7{,}10 = 5{,}68 \text{ m}\,;$$

— în plan transversal grinzii cu zăbrele (flambaj în raport cu axa Oy) l_f se adoptă chiar lungimea barei

$$l_{fz} = l = 7{,}10 \text{ m}.$$

4) Coeficienții de zveltețe

$$\lambda^{xOy} = \lambda_z = \frac{l_{fy}}{i_z} = \frac{568}{7{,}70} = 74\,; \; \lambda^{xOz} = \lambda_{yi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_{y_1}^2}.$$

Întrucît $l_1 = 100$ cm și $i_{y_1} = 2{,}14$ cm rezultă:

$$\lambda_{y_1} = \frac{100}{2{,}14} = 46{,}5\,; \quad \lambda_y = \frac{l_{fz}}{i_y} = \frac{710}{9{,}76} = 72{,}7\,;$$

$$\lambda_{yi} = \sqrt{72{,}7^2 + 46{,}5^2} = 86{,}3.$$

Deci $\lambda_{max} = 86{,}3 \approx 87$ și corespunzător $\varphi = 0{,}688$.

5) Verificarea barei

$$\sigma_{ef} = \frac{D_{ab}}{\varphi A_{ef}} = \frac{58\,140}{0{,}688 \cdot 64{,}4} = 1\,312{,}2 \text{ daN/cm}^2 < \sigma_a = 1\,400 \text{ daN/cm}^2.$$

12. Structuri static nedeterminate. Metoda generală a eforturilor

12.1. CARACTERIZAREA STATICĂ A STRUCTURILOR

12.1.1. STRUCTURI STATIC DETERMINATE ŞI STATIC NEDETERMINATE

În funcţie de numărul de legături, structurile de rezistenţă utilizate în construcţii pot fi de două tipuri:

Structuri static determinate care au un număr de legături egal cu numărul de legături strict necesar pentru a asigura invariabilitatea geometrică (fig. 12.1, *a*). Din punct de vedere geometric, structura este fixă avînd gradul de libertate $G_l = 0$. Din punct de vedere static, la structurile static determinate numărul de necunoscute, forţe de legătură, este egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru static. Determinarea forţelor de legătură şi a eforturilor la structuri static determinate se face deci numai pe baza ecuaţiilor de echilibru static.

Structuri static nedeterminate care au legături mai multe decît cele strict necesare invariabilităţii geometrice (fig. 12.1, *b*). Din punct de vedere geometric, aceste structuri sînt deci fixe avînd gradul de libertate $G_l < 0$. Numărul de necunoscute este mai mare decît numărul de ecuaţii de echilibru static şi deci, pentru determinarea forţelor de legătură şi a eforturilor, în afara ecuaţiilor de echilibru, sînt necesare ecuaţii suplimentare. Aceste ecuaţii suplimentare vor rezulta din restricţiile impuse deformatei de legăturile suplimentare peste cele strict necesare fixării structurii (în fig. 12.1, *a*, *b* sînt arătate cu linie întreruptă deformatele unei grinzi static determinate şi nedeterminate). La structuri static nedeterminate, reacţiunile şi eforturile depind de condiţii impuse de deformata reală şi deci diferă radical de cele pe structuri static determinate. În fig. 12.2,*a*, *b* se arată comparativ diagramele de momente

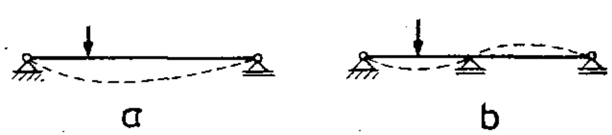


Fig. 12.1.

încovoietoare la o grindă simplu rezemată şi la una dublu încastrată. Deoarece încastrările nu permit rotiri, deformata se prezintă în zona reazemelor cu fibra întinsă la partea superioară şi deci în aceste zone diagrama de momente va fi la partea superioară.

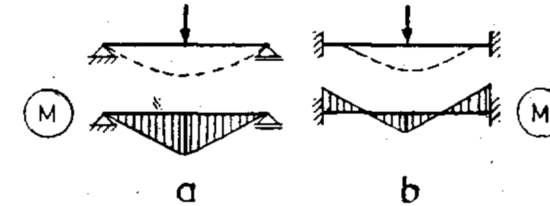


Fig. 12.2.

12.1.2. GRAD DE NEDETERMINARE STATICĂ

Prin grad de nedeterminare statică, notat G_{ns}, se înţelege numărul de legături simple suplimentare peste cele strict necesare asigurării invariabilităţii geometrice a structurii. Pentru rezolvarea unei structuri static nedeterminate prin metoda eforturilor, este necesar ca, în prealabil, să se determine gradul de nedeterminare statică pentru a cunoaşte numărul de necunoscute suplimentare şi deci numărul de ecuaţii suplimentare.

În continuare se prezintă trei procedee de stabilire a gradului de nedeterminare statică:

Procedeul izolării corpurilor. În acest procedeu, gradul de nedeterminare statică rezultă pe baza definiţiei date ca fiind diferenţa dintre numărul de necunoscute forţe de legătură N şi numărul de ecuaţii de echilibru E (fig. 12.3, *a*). Pentru structuri plane încărcate în planul lor se obţine

$$G_{ns} = N - E = (3i + 2a + s) - 3c \qquad (12.1)$$

în care: i reprezintă numărul încastrărilor; a — numărul articulaţiilor simple (articulaţii între două bare); s — numărul reazemelor simple; c — numărul de corpuri. O articulaţie multiplă în care intervin n corpuri este echivalentă cu $n - 1$ articulaţii simple (articulaţia din fig. 12.3, *b* în care intervin patru bare va fi considerată ca trei articulaţii simple).

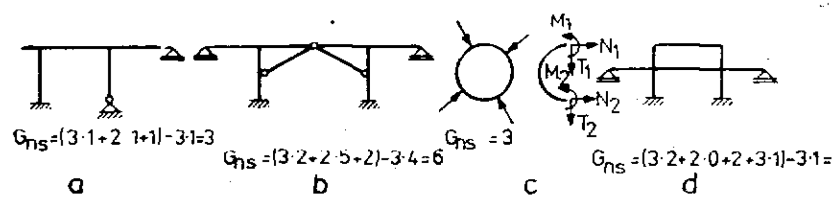


Fig. 12.3.

Relaţia pentru gradul de nedeterminare statică în forma stabilită nu poate fi aplicată la structuri care au contururi perfect închise (continuitatea barei nu este întreruptă). Un contur perfect închis, supus la forţe exterioare în echilibru, este de trei ori static nedeterminat deoarece, secţionînd conturul, apar şase eforturi şi nu se pot scrie decît trei ecuaţii de echilibru (fig. 12.3, *c*). Deci, pentru structuri care prezintă contururi perfect închise, fiecare contur aducînd trei necunoscute, gradul de nedeterminare statică se va determina cu relaţia

$$G_{ns} = N - E = (3i + 2a + s + 3k) - 3c \qquad (12.2)$$

în care k reprezintă numărul contururilor perfect închise. Aplicarea relaţiei se prezintă în fig. 12.3, *d*.

Procedeul transformării în sistem static determinat. În acest procedeu se transformă sistemul static nedeterminat în sistem static determinat cunoscut,

gradul de nedeterminare fiind dat de numărul de legături simple suprimate. Astfel, cadrul din fig. 12.4, *a* poate fi adus la cadrul static determinat din fig. 12.4, *a'*, alcătuit dintr-un cadru cu trei articulații și o grindă simplu rezemată, prin suprimarea a trei legături simple. Sistemul din fig. 12.4, *b* se aduce la sistemul static determinat din fig. 12.4, *b'* alcătuit din cadrul cu trei articulații de la partea superioară și cadrul simplu rezemat de la partea inferioară, prin suprimarea a patru legături simple, deci $G_{ns} = 4$. Grinda continuă din fig. 12.4, *c* se transformă în grindă simplu rezemată din fig. 12.4, *c'* prin suprimarea a trei reazeme simple, deci $G_{ns} = 3$.

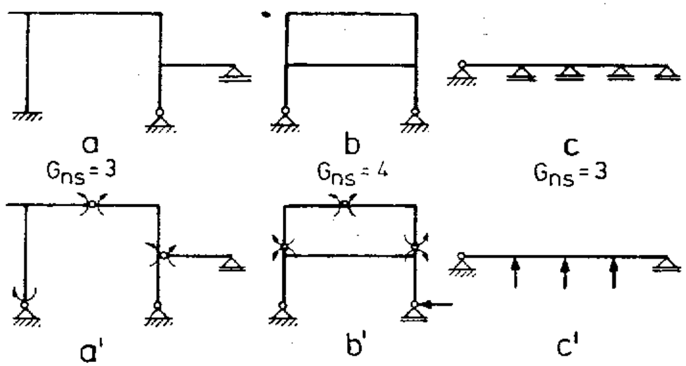


Fig. 12.4.

Procedeul contururilor. S-a arătat la primul procedeu că un contur perfect închis, fără întreruperea continuității barei, este de trei ori static nedeterminat. Întreruperea continuității printr-o articulație micșorează gradul de nedeterminare al conturului cu o unitate, deoarece în contur lipsește o legătură.

Întreruperea continuității printr-o legătură simplă micșorează gradul de nedeterminare al conturului cu doi, deoarece în secțiunea respectivă lipsesc două legături pentru a reface continuitatea. În acest procedeu, gradul de nedeterminare statică se obține cu relația

$$G_{ns} = 3k - (1a + 2s) \tag{12.3}$$

în care: k reprezintă numărul contururilor; a — numărul articulațiilor simple și s numărul legăturilor simple. Aplicarea relației se prezintă în fig. 12.5.

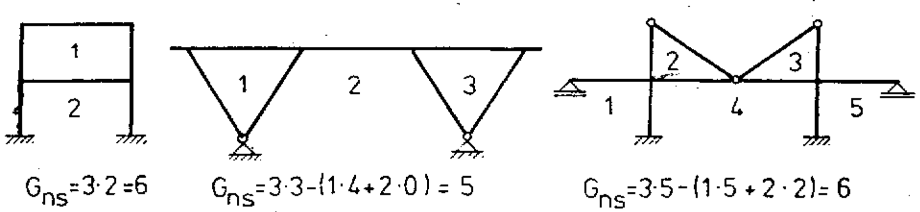


Fig. 12.5.

12.1.3. CONSECINȚE ALE NEDETERMINĂRII STATICE ASUPRA COMPORTĂRII STRUCTURII

La structuri static determinate, eforturile și reacțiunile determinîndu-se din ecuații de echilibru nu depind de distribuția materialului. În fig. 12.6, *a* grinda cu secțiune constantă și diagrama de momente corespunzătoare sînt reprezentate cu linie plină, iar grinda cu secțiune variabilă și diagrama de momente cores-

punzătoare, cu linie întreruptă. La structuri static nedeterminate, *eforturile depind de influența variației de rigiditate la deformație, deci depind de distribuția materialului în structură* (fig. 12.6, *b*). Rezultă că pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate trebuie stabilite în prealabil (predimensionate) secțiunile transversale ale barelor.

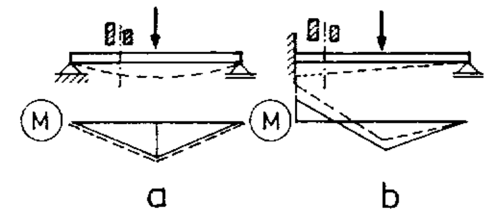


Fig. 12.6.

Spre deosebire de structurile static determinate, la structurile static nedeterminate, datorită restricțiilor impuse deformatei de către legăturile suplimentare (deplasările fiind parțial împiedicate) apar *eforturi din variații de temperatură, cedări de reazeme și erori de montaj.* Astfel, grinda simplu rezemată din fig. 12.7, *a*, sub acțiunea variațiilor de temperatură t_i la fibra inferioară și t_s la fibra superioară, se deformează liber fără să apară eforturi. Dacă grinda din fig. 12.7, *b* nu ar avea reazemul simplu, s-ar deforma liber ca o consolă, apărînd o deplasare în dreptul reazemului simplu. Reazemul simplu nu permite deplasarea pe verticală și astfel, în reazemul simplu apare o reacțiune R și pe grindă diagrama de momente M_t.

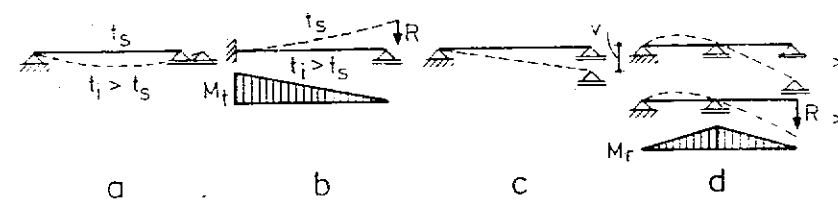


Fig. 12.7.

Structurile static determinate, sub acțiunea cedărilor de reazeme, se deplasează ca și corpurile rigide, fără să apară eforturi (fig. 12.7, *c*). Grinda static nedeterminată din fig. 12.7, *d*, sub acțiunea cedării de reazem v, se va deforma. Aceeași deformată se obține pe grinda static determinată, fără reazemul simplu, care cedează sub acțiunea forței R, ce reprezintă de fapt reacțiunea în acest reazem și care va da momente încovoietoare M_r.

12.2. METODA GENERALĂ A EFORTURILOR

12.2.1. PRINCIPIUL METODEI. NECUNOSCUTE. SISTEM DE BAZĂ

Determinarea eforturilor și a deplasărilor la structuri static nedeterminate se poate face dacă se cunosc forțele sau eforturile în legăturile suplimentare. Acestea se pot determina scriind ecuații suplimentare, în afara celor care exprimă echilibru static, rezultate din restricțiile impuse deformatei de legăturile suplimentare. Metoda de rezolvare a structurilor static nedeterminate

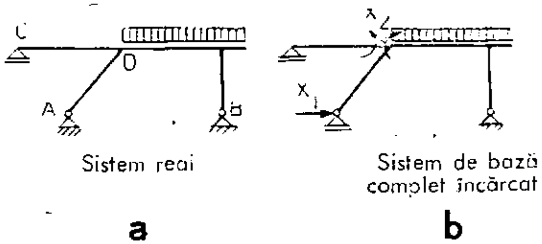


Fig. 12.8.

în care se consideră ca necunoscute forțele sau eforturile în legăturile suplimentare poartă numele de *metoda forțelor* sau *metoda eforturilor*.

Efectul forțelor suplimentare asupra deformării structurii poate fi stabilit prin exteriorizarea lor, adică prin suprimarea legăturilor suplimentare și înlocuirea lor cu forțele de legătură (eforturile) corespunzătoare. Se ajunge astfel ca rezolvarea sistemului static nedeterminat să se facă cu ajutorul unui sistem static determinat numit *sistem de bază*, obținut din sistemul real prin suprimarea unui număr de legături simple egal cu gradul de nedeterminare statică. Pentru sistemul de bază, necunoscutele sistemului real nedeterminat devin încărcări cu valoare necunoscută.

Pentru structura din fig. 12.8, *a* de două ori static nedeterminată ($G_{ns} = 2$), s-au considerat ca legături suplimentare, legătura orizontală în reazemul articulat A care prin suprimare se înlocuiește cu necunoscuta X_1 și o legătură interioară la stînga nodului D, în continuitatea barei, care suprimată se înlocuiește cu perechea de momente X_2. Se obține astfel sistemul de bază complet încărcat din fig. 12.8, *b*.

Ecuațiile suplimentare pentru determinarea necunoscutelor rezultă din condiția ca cele două sisteme, sistemul real nedeterminat și sistemul de bază complet încărcat, să lucreze identic, adică să aibă aceeași deformată. Rezultă că ecuațiile de condiție vor exprima nulitatea deplasărilor pe direcțiile necunoscutelor pe sistemul de bază complet încărcat deoarece, în sistemul real, pe direcțiile necunoscutelor, există legături, adică sînt ecuații de compatibilitate a deformatei. Pentru cadrul din fig. 12.8, cele două ecuații de condiție vor exprima că deplasarea pe orizontală în A și rotirea relativă la stînga nodului D, pe sistemul de bază acționat de necunoscute și încărcările date, sînt nule pentru că în sistemul real există legături pe aceste direcții. În continuare, se vor dezvolta aspectele prezentate aici pentru rezolvarea unei structuri static nedeterminate prin metoda eforturilor.

12.2.2. ALEGEREA NECUNOSCUTELOR ȘI A SISTEMULUI DE BAZĂ

În metoda eforturilor, necunoscutele sînt forțe de legătură sau eforturi în legăturile suplimentare. Legăturile suplimentare pot fi considerate fie legături la teren (reazem), fie legături interioare în diverse secțiuni de pe barele structurii. Rezultă că, pentru o structură se pot obține mai multe sisteme de bază în funcție de legăturile considerate ca suplimentare, care se suprimă. Astfel, pentru cadrul din fig. 12.9, *a*, de patru ori static nedeterminat, se pot obține sisteme de bază fie suprimînd numai legături exterioare (la teren), (fig. 12.9, *b*, *c*, *d*), fie suprimînd numai legături interioare (fig. 12.9, *e* și *f*) sau fie suprimînd și legături interioare și legături exterioare (fig. 12.9, *g* și *h*).

Necunoscutele corespunzătoare legăturilor interioare sînt formate din forțe sau cuple perechi, egale și de sens contrar pe cele două fețe ale secțiunii, deoarece sînt forțe de legătură interioare (eforturi). Necunoscutele corespunzătoare legăturilor exterioare sînt reprezentate de cîte o singură forță sau

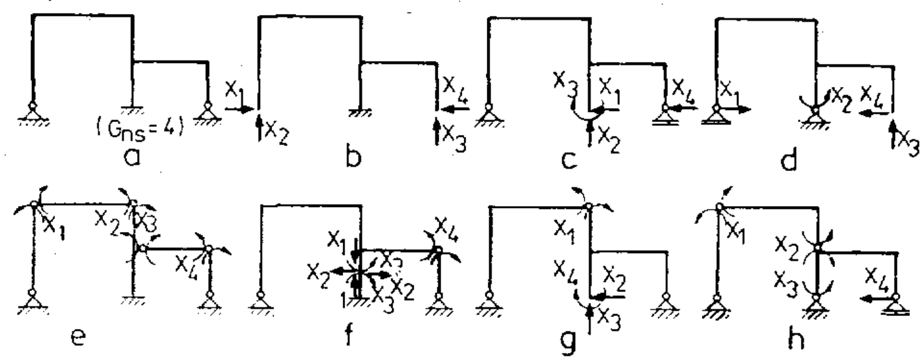


Fig. 12.9.

cuplu pentru fiecare legătură simplă suprimată, deoarece sînt forțe de legătură la teren (reacțiuni). Sensul necunoscutelor se ia arbitrar, din calcule urmînd să rezulte sensul lor real.

Sistemul de bază are ca acțiuni încărcările date și necunoscutele, pe care le poate prelua dacă este un sistem fix din punct de vedere geometric. Rezultă condiția esențială pe care trebuie s-o îndeplinească un sistem de bază și anume, să fie un sistem static determinat corect alcătuit, adică să nu fie critic. Un corp are legături critice cînd, cu toate că are numărul de legături necesare (trei în plan), dispunerea legăturilor permite o mișcare momentană. În fig. 12.10 se prezintă cîteva sisteme de bază cu legături critice pentru cadrul din fig. 12.10, *a*, de trei ori static nedeterminat ($G_{ns} = 3 \cdot 2 - 3 = 3$).

Sistemul de bază din fig. 12.10, *b*, este critic deoarece este format dintr-un singur corp care se poate deplasa normal pe cele trei legături simple paralele. Sistemul de bază din fig. 12.10, *c* are legături critice deoarece este un corp care se poate roti în jurul articulației din A devenită centru instantaneu de rotație. I, pentru că direcția legăturii simple din C trece prin articulația A. Sistemul de bază din fig. 12.10, *d* este critic deoarece corpul central se rotește în jurul punctului I în care se întîlnesc cele trei legături simple ale corpului. Sistemul

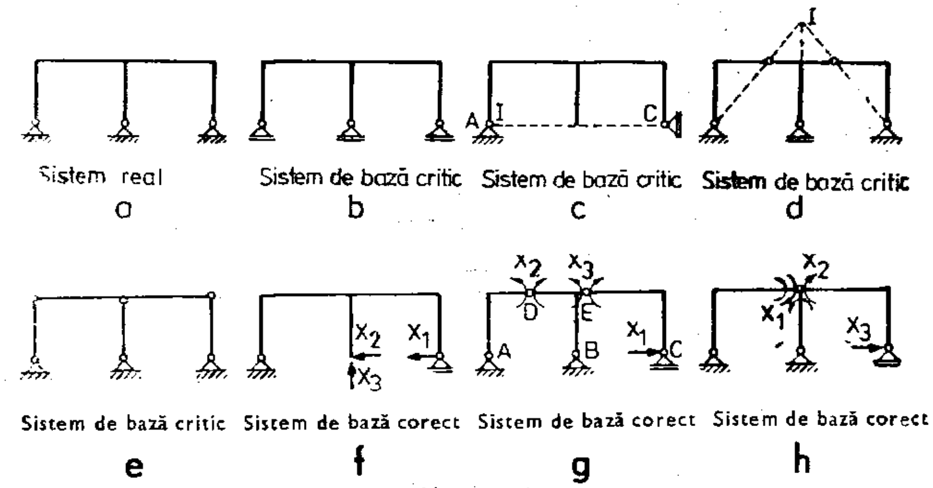


Fig. 12.10.

de bază din fig. 12.10, *e* are legături critice, rigla fiind legată prin trei pendul paraleli care permit deplasarea pe orizontală. Sistemul de bază din fig. 12.10, *f* este corect fiind un corp simplu rezemat, direcţia reazemului simplu neintersectînd articulaţia.

Sistemul de bază din fig. 12.10, *g* are legături corecte fiind alcătuit dintr-un cadru cu trei articulaţii (ABD) şi o grindă cotită simplu rezemată (articulaţie în E şi reazem simplu în C). Sistemul de bază din fig. 12.10, *h* este corect alcătuit din acelaşi motiv cu precedentul.

12.2.3. STABILIREA ECUAŢIILOR DE CONDIŢIE

În primul paragraf s-a arătat că ecuaţiile suplimentare pentru determinarea necunoscutelor rezultă din condiţia de comportare identică (eforturi şi deplasări identice) între sistemul real nedeterminat şi sistemul de bază acţionat de încărcările date şi necunoscute. Notînd cu S o mărime statică (efort, deplasare) într-o secţiune oarecare dintr-o încărcare dată (forţe, variaţii de temperatură, cedări de reazeme), cu S_0 aceeaşi mărime pe sistemul de bază din încărcarea dată şi cu S_X aceeaşi mărime pe sistemul de bază încărcat cu necunoscutele, condiţia de identitate între cele două sisteme este

$$S = S_X + S_0. \tag{12.4}$$

Această relaţie este valabilă şi pentru deplasări

$$\Delta = \Delta_X + \Delta_0. \tag{12.5}$$

Ecuaţiile de condiţie sub forma generală rezultă din condiţia ca deplasările pe direcţiile necunoscutelor X_i în sistemul real nedeterminat să fie nule, deoarece pe aceste direcţii există legături

$$\Delta_i = \Delta_{iX} + \Delta_{i0} = 0 \tag{12.6}$$

în care deplasarea pe direcţia unei necunoscute, Δ_{iX}, depinde de valorile reale necunoscute ale forţelor de legătură suplimentare.

Explicitarea necunoscutelor şi forma finală a ecuaţiilor de condiţie se va prezenta pentru structura de patru ori static nedeterminată din fig. 12.11, *a* folosind sistemul de bază din fig. 12.11, *b*.

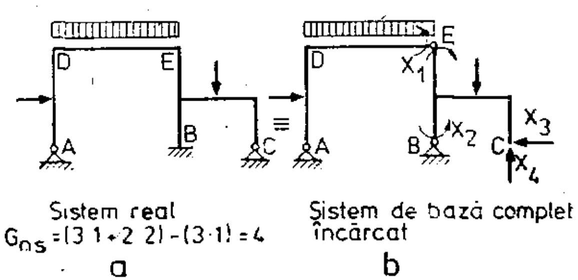


Fig. 12.11.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor pe sistemul de bază din fiecare necunoscută în parte şi din încărcările date, deplasările pe direcţiile necunoscutelor se pot scrie astfel:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_{1X} + \Delta_{10} = \Delta_1(X_1) + \Delta_1(X_2) + \Delta_1(X_3) + \Delta_1(X_4) + \Delta_{10} = 0\\
\Delta_2 &= \Delta_{2X} + \Delta_{20} = \Delta_2(X_1) + \Delta_2(X_2) + \Delta_2(X_3) + \Delta_2(X_4) + \Delta_{20} = 0\\
\Delta_3 &= \Delta_{3X} + \Delta_{30} = \Delta_3(X_1) + \Delta_3(X_2) + \Delta_3(X_3) + \Delta_3(X_4) + \Delta_{30} = 0\\
\Delta_4 &= \Delta_{4X} + \Delta_{40} = \Delta_4(X_1) + \Delta_4(X_2) + \Delta_4(X_3) + \Delta_4(X_4) + \Delta_{40} = 0.
\end{aligned} \tag{12.7}$$

Particularizînd pentru exemplul considerat, prima ecuaţie exprimă rotirea relativă nulă în articulaţia E, a doua reprezintă rotirea nulă în B, a treia şi a patra exprimă deplasări nule pe orizontală şi respectiv pe verticală în C, deoarece în sistemul real pe aceste direcţii în secţiunile respective există legături. Deplasările din necunoscute, $\Delta_i(X_j)$ (deplasarea pe direcţia necunoscutei X_i din încărcarea sistemului de bază numai cu necunoscuta X_j) se pot exprima pe baza proporţionalităţii dintre încărcare şi deplasare, în funcţie de necunoscute, astfel:

$$\Delta_i(X_j) = \Delta_i(X_j = 1)\cdot X_j = \delta_{ij}X_j \tag{12.8}$$

$\delta_{ij} = \Delta_i(X_j = 1)$, fiind deplasarea pe direcţia X_i din încărcarea sistemului de bază cu $X_j = 1$. Ecuaţiile de condiţie vor avea forma

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{10} &= 0\\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{20} &= 0\\
\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{30} &= 0\\
\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{40} &= 0.
\end{aligned} \tag{12.9}$$

Generalizînd, pentru un sistem de n ori static nedeterminat, forma finală a ecuaţiilor de condiţie, din care se determină valoarea necunoscutelor, este

$$\begin{aligned}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1i}X_i + \delta_{1j}X_j + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{10} &= 0\\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2i}X_i + \delta_{2j}X_j + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{20} &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ii}X_i + \delta_{jj}X_j + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{i0} &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{ni}X_i + \delta_{nj}X_j + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n0} &= 0.
\end{aligned} \tag{12.10}$$

O ecuaţie (i) exprimă nulitatea deplasării pe direcţia necunoscutei X_i pe sistemul de bază încărcat cu necunoscute ($X_1, \ldots, X_n$) şi încărcarea dată (forţe, variaţii de temperatură sau cedări de reazeme). Rezultă că un coeficient δ_{ij} are semnificaţia de deplasare pe direcţia necunoscutei X_i din încărcarea sistemului de bază cu $X_j = 1$. Termenul liber Δ_{i0} reprezintă deplasarea pe direcţia necunoscutei X_i din încărcarea sistemului de bază cu încărcarea dată: (încărcări cu forţe Δ_{ip}, variaţii de temperatură Δ_{it} sau cedări de reazeme $\Delta_{i\Delta r}$).

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi, avînd semnificația de deplasări pe sistemul de bază static determinat, se vor calcula cu formula Maxwell-Mohr :

— coeficienții necunoscutelor

$$\delta_{ij} = \sum\int \frac{m_i m_j}{EI}\,dx + \sum\eta\int \frac{t_i t_j}{GA}\,dx + \sum\int \frac{n_i n_j}{EA}\,dx\,; \tag{12.11}$$

— termenii liberi din încărcarea cu forțe

$$\Delta_{ip} = \sum\int \frac{m_i M_p^0}{EI}\,dx + \sum\eta\int \frac{t_i T_p^0}{GA}\,dx + \sum\int \frac{n_i N_p^0}{EA}\,dx\,; \tag{12.12}$$

— termenii liberi din încărcarea cu variații de temperatură

$$\Delta_{it} = \sum\alpha\int m_i \frac{\Delta t}{h}\,dx + \sum\alpha\int n_i t_0\,dx\,; \tag{12.13}$$

— termenii liberi din încărcarea cu cedări de reazeme

$$\Delta_{i\Delta r} = -\sum r_i \Delta_r \tag{12.14}$$

unde : m_i, n_i, t_i reprezintă eforturile pe sistemul de bază încărcat cu $X_i = 1$ considerată ca încărcare unitară virtuală (pentru că se calculează deplasarea pe direcția necunoscutei X_i) ; m_j, n_j, t_j — eforturile pe sistemul de bază încărcat cu $X_j = 1$ (considerată ca încărcare care produce deplasarea δ_{ij}) ; M_p^0, N_p^0, T_p^0 — eforturile pe sistemul de bază din solicitarea sistemului de bază cu încărcările date p ; Δt — diferența de temperatură între fețele barelor ; t_0 — variația temperaturii în axa barelor față de temperatura de montaj ; h — înălțimea secțiunilor barelor ; α — coeficientul de dilatare termică liniară a materialului din care este alcătuită structura ; η — coeficientul de secțiune care ține seamă de distribuția eforturilor unitare tangențiale pe secțiune ; $\sum r_i \Delta_r$ — lucrul mecanic al grupului de forțe în echilibru format din $X_i = 1$ și reacțiunile corespunzătoare prin cedările de reazeme reale Δ_r.

Diagramele m, n, t din necunoscute unitare se mai numesc diagrame unitare sau diagrame de autosolicitare.

În calculul coeficienților și al termenilor liberi se va ține seamă de observațiile făcute la calculul deplasărilor cu ajutorul formulei Maxwell-Mohr, legate de ponderea diferiților termeni. Datorită faptului că în cele mai multe cazuri secțiunile barelor nu se cunosc (A, I), că proiectantul pe baza experienței și a cazurilor similare își alege raportul momentelor de inerție ale secțiunilor barelor (I/I_0) față de momentul de inerție al unei bare luată ca reper (I_0) și pentru a lucra în calcule cu valori convenabile (valorile integralelor din expresiile coeficienților și termenilor liberi fiind foarte mici datorită valorii foarte mari a numitorilor), se multiplică sistemul ecuațiilor de condiție cu o rigiditate convențională EI_0 și deci se calculează deplasările pe baza următoarelor expresii :

— pentru cadre și grinzi (solicitate preponderent la încovoiere)

$$EI_0\delta_{ij} = \sum\int \frac{I_0}{I} m_i m_j\,dx\,;\quad EI_0\Delta_{ip} = \sum\int \frac{I_0}{I} m_j M_p^0\,dx\,; \tag{12.15}$$

— pentru arce

$$EI_0\delta_{ij} = \sum\int \frac{I_0}{I} m_i m_j\,ds + \sum\int \frac{I_0}{A} n_i n_j\,ds$$

$$EI_0\Delta_{ip} = \sum\int \frac{I_0}{I} m_i M_p^0\,ds + \sum\int \frac{I_0}{A} n_i N_p^0\,ds\,; \tag{12.16}$$

— pentru grinzi cu zăbrele

$$EA_0\delta_{ij} = \sum\int \frac{A_0}{A} n_i n_j\,dx = \sum \frac{A_0}{A} n_i n_j l\,;\quad EA_0\Delta_{ip} = \sum \frac{A_0}{A} n_i N_p^0 l. \tag{12.17}$$

Coeficienții principali δ_{ii} sînt întotdeauna pozitivi. Coeficienții secundari pot fi pozitivi, negativi sau nuli. Pe baza reciprocității deplasărilor din forțe unitare, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, rezultă că matricea coeficienților este o matrice simetrică față de diagonala principală. Coeficienții, reprezentînd deplasări din necunoscute unitare și obținîndu-se pe baza diagramelor de autosolicitare, nu depind de încărcările date, ci numai de caracteristicile geometrice și elastice ale structurii. Rezultă că, pentru o structură supusă la diferite tipuri de încărcări, coeficienții necunoscutelor nu se modifică cînd se folosește același sistem de bază pentru fiecare încărcare. Pentru fiecare încărcare trebuie recalculați numai termenii liberi, ei depinzînd de încărcări.

12.2.4. DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN SISTEMUL STATIC NEDETERMINAT

Diagramele de eforturi se pot obține prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază acționat de încărcările date și cu valoarea necunoscutelor determinată din sistemul ecuațiilor de condiție ca încărcări exterioare pe sistemul de bază static determinat, pe baza relației generale stabilită anterior

$$S = S_0 + S_X.$$

Astfel, considerînd separat efectul fiecărei necunoscute și folosind diagramele din necunoscute unitare pe baza proporționalității între efort și încărcare, diagramele de momente încovoietoare M, de forțe tăietoare T și de eforturi axiale N pe sistemul real static nedeterminat se obțin prin suprapunerea diagramelor pe sistemul de bază din încărcările date, M^0, T^0, N^0, cu diagramele din necunoscute unitare m_i, n_i, t_i, multiplicate cu valoarea determinată a necunoscutelor

$$M = M_p^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + \ldots + m_iX_i + \ldots + m_nX_n = M_p^0 + \sum_{i=1}^{n} m_iX_i$$

$$T = T_p^0 + t_1X_1 + t_2X_2 + \ldots + t_iX_i + \ldots + t_nX_n = T_p^0 + \sum_{i=1}^{n} t_iX_i \tag{12.18}$$

$$N = N_p^0 + n_1X_1 + n_2X_2 + \ldots + n_iX_i + \ldots + n_nX_n = N_p^0 + \sum_{i=1}^{n} n_iX_i.$$

Pentru structuri încărcate cu variații de temperatură sau cedări de reazeme, deoarece din aceste încărcări nu se obțin eforturi pe sistemul de bază static determinat ($M^0 = 0$, $T^0 = 0$, $N^0 = 0$), eforturile pe structura static nedeterminată se obțin prin suprapunerea efectelor necunoscutelor pe sistemul de bază

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_iX_i\,;\quad T = \sum_{i=1}^{n} t_iX_i\,;\quad N = \sum_{i=1}^{n} n_iX_i. \tag{12.19}$$

Determinarea în acest fel a diagramelor T şi N nu este indicată deoarece implică trasarea diagramelor de forţe tăietoare t_i şi de eforturi axiale n_i pe sistemul de bază din necunoscute unitare ($X_i = 1$) şi diagramele din încărcările date (T_p^0, N_p^0), diagrame care, pentru cadre şi grinzi, în general, nu sînt necesare la calculul coeficienţilor necunoscutelor şi termenilor liberi din ecuaţiile de condiţie. Diagrama de forţe tăietoare T pe sistemul static nedeterminat se poate obţine pe baza diagramei finale de momente încovoietoare M, considerînd fiecare bară dublu articulată la capete şi încărcată cu forţele ce-i revin şi cu momentele de capăt extrase din diagrama M. Pe această bază se pot determina reacţiunile normale pe bară şi în continuare se trasează diagrama T. Diagrama de eforturi axiale rezultă mai simplu pe baza condiţiilor de echilibru ale nodurilor.

În fig. 12.12, *c—j* se poate urmări obţinerea diagramelor de eforturi pe cadrul din fig. 12.12, *a*, de două ori static nedeterminat. Sistemul de bază, din fig. 12.12, *b* s-a obţinut prin suprimarea a două legături în continuitatea barelor *1—2* şi *1—3* lîngă nodul *1*, ceea ce echivalează cu o articulaţie totală în nod, deoarece bara *1—4* este articulată de fiecare bară din nod, *1—3* şi *1—2*. Apar ca necunoscute două momente, X_1 şi X_2, deoarece al treilea moment pe nodul cu trei bare rezultă din ecuaţia de echilibru a nodului. Diagrama finală de momente încovoietoare M din fig. 12.12, *f* se obţine prin suprapunerea diagramelor M_p^0, m_1 şi m_2

$$M = M_p^0 + m_1X_1 + m_2X_2.$$

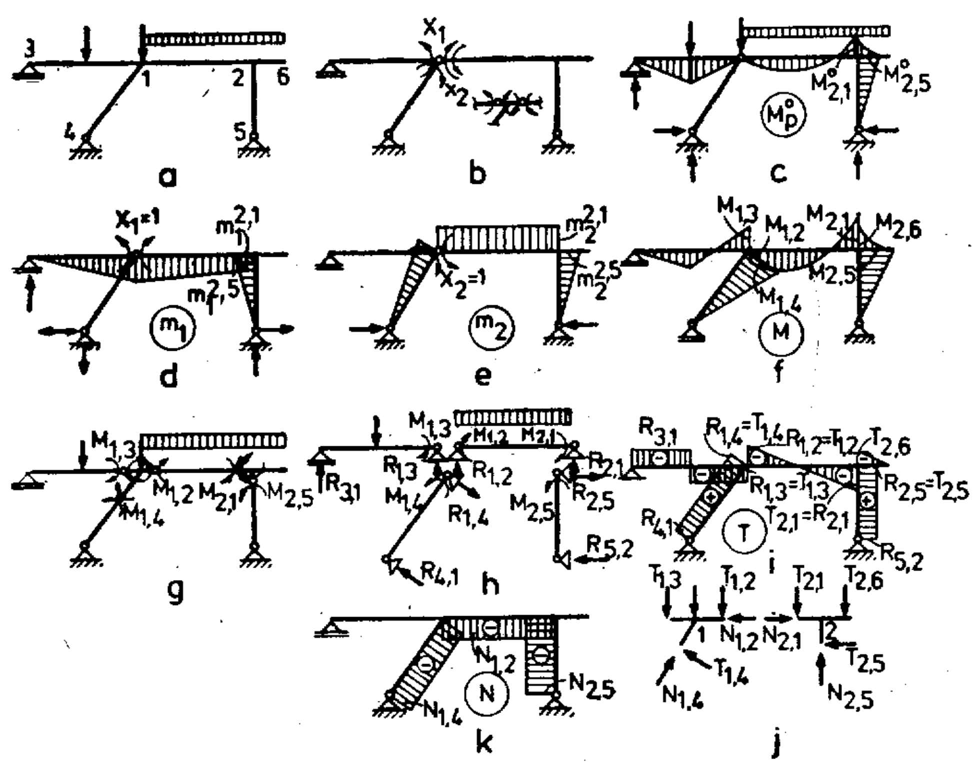


Fig. 12.12.

Cu această relaţie este suficient pentru trasarea diagramei M să se calculeze momentele la capetele barelor. Astfel, momentul M_{21} în capătul *2* pe bara *2—1* se va obţine prin însumarea algebrică pe sistemul de bază a momentelor din încărcările date şi din necunoscute

$$M_{2,1} = M_{2,1}^0 + m_1^{(2,1)} X_1 + m_2^{(2,1)} X_2$$

sau, în general, momentul în capătul j pe bara $j—k$ se va obţine

$$M_{j,k} = M_{j,k}^0 + \sum_{i=1}^{n} m_i^{j,k} \cdot X_i.$$

Cunoscînd momentele la capetele barelor, structura reală poate fi înlocuită cu mecanismul în echilibru din fig. 12.12, *g* obţinut prin articularea capetelor de bare şi înlocuind legăturile suprimate cu momentele de capăt. Fiecare bară devine astfel dublu articulată încărcată cu forţele ce-i revin şi cu momentele de capăt şi se pot calcula reacţiunile R normale pe bară (fig. 12.12, *h*). Cu ajutorul acestor reacţiuni se pot trasa diagramele de momente şi de forţe tăietoare (fig. 12.12, *i*) pe fiecare bară ca pentru o grindă simplu rezemată. Diagrama de eforturi axiale N din fig. 12.12, *k* se obţine determinînd eforturile axiale, de la capetele barelor, pe baza echilibrului nodurilor (ecuaţii de proiecţii).

Se observă că în diagramele de momente încovoietoare nu s-au trecut semnele, deoarece diagramele de momente, inclusiv cea finală, se desenează de partea fibrei întinse şi deci sensul momentului într-o secţiune oarecare va fi astfel încît să întindă fibra de partea căreia este desenată diagrama de momente.

12.2.5. OBSERVAŢII PRIVIND ALEGEREA AVANTAJOASĂ A SISTEMELOR DE BAZĂ

S-a arătat mai înainte că sistemul de bază trebuie să îndeplinească o singură condiţie şi anume, aceea că trebuie să fie un sistem static determinat, să nu prezinte legături critice. În funcţie de legăturile care se consideră suplimentare şi se suprimă pot apărea diverse sisteme de bază. Dintre aceste sisteme de bază se alege acela pentru care operaţiile de calcul sînt mai simple. În acest sens se prezintă în continuare cîteva observaţii privind alegerea avantajoasă a sistemului de bază.

O primă observaţie este aceea că este bine să se aleagă un sistem de bază pe care să apară necunoscute de acelaşi tip, ori forţe, ori momente. În acest caz, coeficienţii sînt de acelaşi ordin de mărime, ceea ce conduce la erori mult reduse în rezolvarea sistemului de ecuaţii cu rigla, decît în cazul unui sistem de bază care prezintă necunoscute de tipuri diferite, forţe şi momente, cînd coeficienţii diferă ca ordin de mărime. În unele cazuri această observaţie nu poate fi respectată dacă se urmăreşte simplificarea calculelor.

Un sistem de bază este bine să fie alcătuit din elemente simple, forţele de legătură şi diagramele de momente să se poată determina cît mai uşor. Astfel, pentru cadrul cu noduri fixe (cadre la care nodurile nu au deplasări translaţii) din fig. 12.13, *a*, cel mai simplu sistem de bază este cel din fig. 12.13, *b* format numai din bare dublu articulate pe care diagramele de momente din necunoscute unitare şi forţe se trasează simplu, fără calculul reacţiunilor, deoarece se cunosc momentele la capetele barelor (articulaţii).

Un sistem de bază avantajos este acela la care diagramele din necunoscute unitare se restrîng la cît mai puţine bare, conducînd la anularea unor coefi-

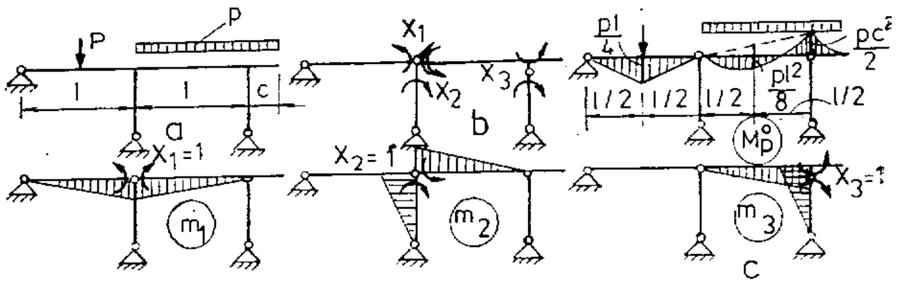


Fig. 12.13.

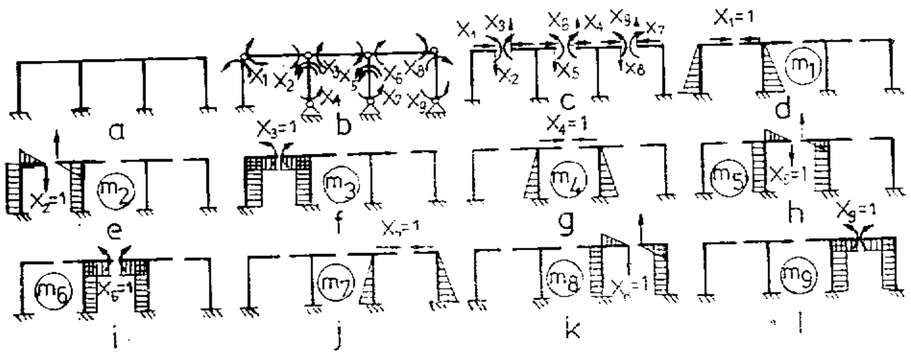


Fig. 12.14.

cienţi secundari, ceea ce simplifică mult calculele. Astfel, pentru cadrul din fig. 12.14, *a*, sistemul de bază din fig. 12.14, *b* nu este avantajos, cu toate că respectă prima observaţie, deoarece din orice necunoscută unitară se obţine diagramă de momente pe primul stîlp şi deci nu se anulează nici un coeficient secundar. Mai avantajos este sistemul de bază din fig. 12.14, *c*, deoarece diagramele din necunoscute unitare apar numai pe barele traveei pe care acţionează necunoscutele, ceea ce conduce, conform diagramelor unitare din fig. 12.14, *e—l*, la anularea următorilor coeficienţi secundari:

$$\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \delta_{27} = \delta_{28} = \delta_{29} = \delta_{37} = \delta_{38} = \delta_{39} = 0.$$

O altă recomandare este aceea că pe sistemul de bază ales, momentele din încărcările date, M_p^0, să fie de acelaşi ordin de mărime cu momentele din diagrama finală M. Astfel, pentru grinda continuă din fig. 12.15, *a*, sistemul de bază din fig. 12.15, *b* este avantajos, valorile M_p^0 fiind de acelaşi ordin de mărime cu valorile M. Sistemul de bază din fig. 12.15, *c*, obţinut prin suprimarea reazemelor simple, nu este avantajos deoarece valorile M_p^0 sînt mult mai mari decît valorile finale M, existînd posibilitatea de a introduce erori în calcul. Acest sistem de bază, care este o consolă, lucrează departe de sistemul real fiind legat într-o singură secţiune la teren.

În unele cazuri se pot utiliza şi sisteme de bază static nedeterminate, cînd numărul legăturilor suprimate este mai mic decît gradul de nedeterminare statică. Pentru aceste sisteme de bază trebuie să se cunoască (din tabele) sau să se determine (folosind un sistem de bază determinat) diagramele de eforturi din încărcările date şi din necunoscute unitare.

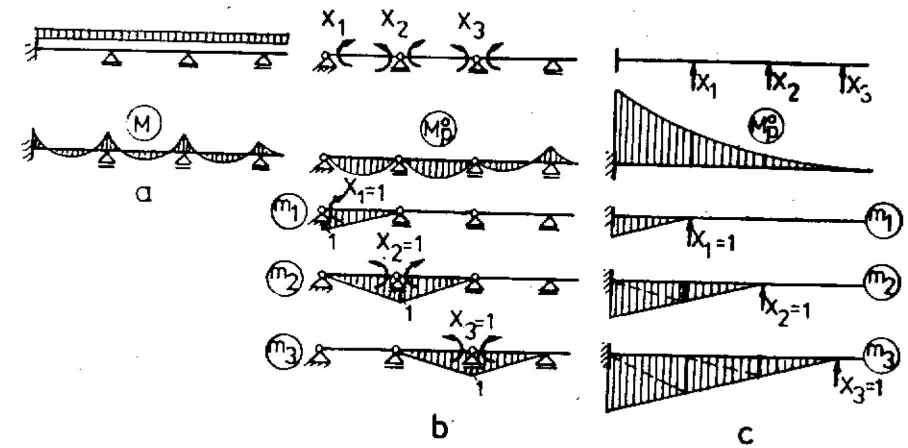


Fig. 12.15.

12.2.6. VERIFICAREA ECUAŢIILOR

Uneori, cînd numărul de necunoscute este mare, este util să se poată verifica coeficienţii şi termenii liberi din ecuaţiile de condiţie. Această verificare se face cu ajutorul unei diagrame, notată m_s, obţinută din încărcarea simultană a sistemului de bază cu toate necunoscutele egale cu unitatea. După terminarea diagramei m_s, se verifică pentru a depista eventualele greşeli în diagramele unitare, dacă această diagramă este aceeaşi cu cea obţinută prin însumarea diagramelor din fiecare necunoscută egală cu unitatea

$$m_s = m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Cu ajutorul acestei diagrame se face verificarea globală a tuturor coeficienţilor; dacă nu iese această verificare, se trece la verificarea coeficienţilor necunoscutelor dintr-o ecuaţie pentru a depista în care ecuaţie coeficienţii au fost calculaţi greşit, apoi se face verificarea termenilor liberi.

— Verificarea globală a coeficienţilor se face calculînd prin integrarea diagramei m_s cu ea însăşi următoarea integrală

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{m_s^2}{EI} \mathrm{d}x.$$

Înlocuind m_s prin suma diagramelor unitare, rezultă

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)^2}{EI} \mathrm{d}x = \sum \int \frac{m_1^2}{EI} \mathrm{d}x + \sum \int \frac{m_2^2}{EI} \mathrm{d}x + \ldots +$$

$$+ \sum \int \frac{m_n^2}{EI} \mathrm{d}x + \sum \int \frac{m_1 m_2}{EI} \mathrm{d}x + \sum \int \frac{m_1 m_3}{EI} \mathrm{d}x + \ldots + \sum \int \frac{m_1 m_n}{EI} \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum \int \frac{m_2 m_1}{EI} \mathrm{d}x + \sum \int \frac{m_2 m_3}{EI} \mathrm{d}x + \ldots + \sum \int \frac{m_2 m_n}{EI} \mathrm{d}x + \ldots =$$

$$= (\delta_{11} + \delta_{22} + \ldots + \delta_{nn}) + (\delta_{12} + \delta_{13} + \ldots + \delta_{1n} + \delta_{21} + \delta_{23} + \ldots +$$

$$+ \delta_{2n} + \ldots + \delta_{n-1,\, n}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} + \sum_{i \neq j = 1}^{n} \delta_{ij}.$$

Rezultă că δ_{ss} calculat pe baza diagramei m_s trebuie să fie egal cu suma tuturor coeficienților necunoscutelor din sistemul de ecuații.

— Verificarea coeficienților dintr-o ecuație (i) se face calculînd, prin integrarea diagramei m_s cu diagrama m_i din $X_i = 1$, următoarea integrală

$$\delta_{is} = \sum \int \frac{m_i m_s}{EI}\,\mathrm{d}x.$$

Această integrală va fi egală cu

$$\delta_{is} = \sum \int \frac{m_i(m_1 + m_2 + \dots + m_n)}{EI}\,\mathrm{d}x = \sum \int \frac{m_i m_1}{EI}\,\mathrm{d}x + \sum \int \frac{m_i m_2}{EI}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \dots + \sum \int \frac{m_i m_n}{EI}\,\mathrm{d}x = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}.$$

Deci, pentru verificarea coeficienților dintr-o ecuație, trebuie ca δ_{is} calculat să fie egal cu suma coeficienților necunoscutelor din ecuația respectivă.

— Verificarea termenilor liberi se face calculînd integrala

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{m_s M_p^0}{EI}\,\mathrm{d}x$$

care va fi egală cu

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n) M_p^0}{EI}\,\mathrm{d}x = \sum \int \frac{m_1 M_p^0}{EI}\,\mathrm{d}x + \sum \int \frac{m_2 M_p^0}{EI}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \dots + \sum \int \frac{m_n M_p^0}{EI}\,\mathrm{d}x = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ip}.$$

Termenii liberi sînt corect calculați dacă integrala calculată Δ_{sp} este egală cu suma termenilor liberi ai ecuațiilor de condiție.

Pentru exemplificare, se consideră cadrul din fig. 12.16, *a* de trei ori static nedeterminat. Pe baza diagramelor unitare, m_1, m_2, m_3 și din încărcări, M_p^0 (fig. 12.16, *b–c*), se determină coeficienții și termenii liberi din ecuațiile de condiție

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

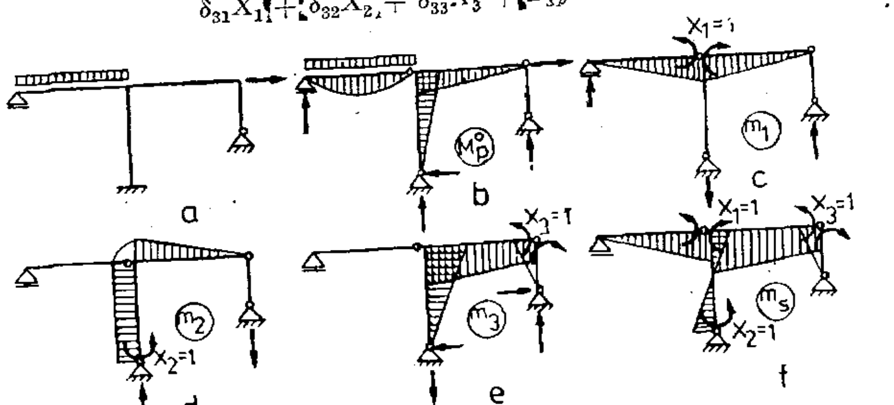


Fig. 12.16.

Se determină diagrama m_s (fig. 12.16, *f*) din toate necunoscutele egale cu unitatea la care se verifică că momentele la capetele barelor sînt egale cu suma momentelor respective din diagramele unitare. Se fac verificările menționate folosind diagrama m_s

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{m_s^2}{EI}\,\mathrm{d}x = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23})$$

$$\delta_{1s} = \sum \int \frac{m_1 m_s}{EI}\,\mathrm{d}x = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}$$

$$\delta_{2s} = \sum \int \frac{m_2 m_s}{EI}\,\mathrm{d}x = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23}$$

$$\delta_{3s} = \sum \int \frac{m_3 m_s}{EI}\,\mathrm{d}x = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33}$$

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{m_s M_p^0}{EI}\,\mathrm{d}x = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p}.$$

12.3. DETERMINAREA DEPLASĂRILOR PUNCTUALE LA STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

Calculul deplasărilor punctuale la structuri static nedeterminate se poate face folosind expresia generală dată la cap. 10, deoarece la stabilirea acestei expresii nu s-au făcut restricții asupra legăturilor structurii

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_p}{EI}\,\mathrm{d}x + \int \frac{n_i N_p}{EA}\,\mathrm{d}x + \int \eta \frac{t_i T_p}{GA}\,\mathrm{d}x + \int n_i \alpha t_0\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h}\,\mathrm{d}x - \sum r_i \Delta_r.$$

În aplicarea directă a acestei expresii la structuri static nedeterminate apare inconvenientul că atît diagramele de eforturi din încărcări M, N, T, cît și diagramele de eforturi m_i, n_i, t_i și reacțiunile r_i din încărcarea unitară virtuală, sînt determinate pe sistemul real static nedeterminat. Deci, sistemul static nedeterminat trebuie rezolvat și la încărcările date (forțe, variații, de temperatură, cedări de reazeme) și la fiecare încărcare unitară virtuală acționînd în secțiunea și pe direcția deplasării căutate. De exemplu,

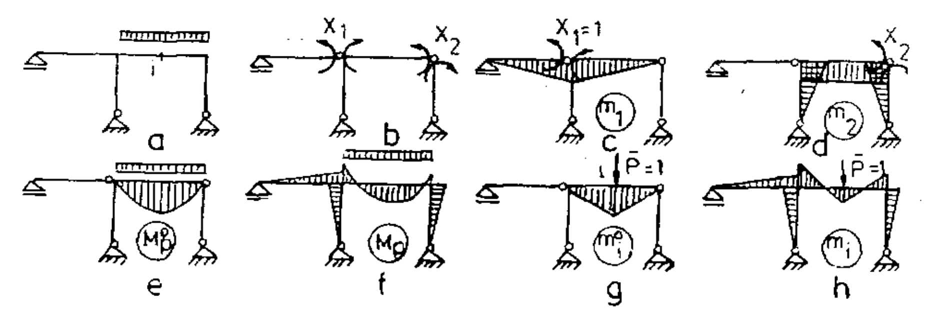


Fig. 12.17.

pentru calculul săgeții în secțiunea i la cadrul din fig. 12.17, a ar trebui determinate atît diagrama de momente din încărcarea reală

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2$$

cît și diagrama de momente pe sistemul static nedeterminat din forța unitară virtuală în secțiunea i pe direcția săgeții

$$m_i = m_i^0 + m_1 X_1' + m_2 X_2'$$

m^0 fiind diagrama de momente din încărcarea virtuală unitară pe sistemul de bază și, pentru a face distincție, necunoscutele din această încărcare sînt notate cu X_1', X_2', X_3'.

Se va prezenta în continuare cum se poate simplifica calculul deplasărilor la structuri static nedeterminate (fig. 12.17, b—h).

12.3.1. DEPLASARI PRODUSE DE INCARCAREA CU FORȚE

Pentru simplitatea demonstrației, în formula Maxwell-Mohr a deplasării elastice se reține numai termenul corespunzător efectului momentelor încovoietoare. Înlocuind momentul încovoietor din încărcarea virtuală unitară pe sistemul static nedeterminat prin expresia sa, se obține

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_p}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{(m_i^0 + m_1 X_1' + m_2 X_2' + \ldots + m_n X_n') M_p}{EI} \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{m_i^0 M_p}{EI} \mathrm{d}x + X_1' \int \frac{m_1 M_p}{EI} \mathrm{d}x + X_2' \int \frac{m_2 M_p}{EI} \mathrm{d}x + \ldots + X_n' \int \frac{m_n M_p}{EI} \mathrm{d}x.$$

În această expresie, în afară de prima integrală, restul integralelor sînt nule, deoarece reprezintă deplasări reale pe sistemul static nedeterminat (pe direcția necunoscutelor) care sînt nule datorită continuității structurii

$$\int \frac{m_1 M_p}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_2 M_p}{EI} \mathrm{d}x = \ldots = \int \frac{m_n M_p}{EI} \mathrm{d}x = 0. \qquad (12.20)$$

Aceasta se poate demonstra și prin introducerea expresiei momentului pe structura static nedeterminată, de exemplu

$$\int \frac{m_1 M_p}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_1 (M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots + m_n X_n)}{EI} \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} \mathrm{d}x + X_1 \int \frac{m_1^2}{EI} \mathrm{d}x + X_2 \int \frac{m_1 m_2}{EI} \mathrm{d}x + \ldots + X_n \int \frac{m_1 m_n}{EI} \mathrm{d}x =$$

$$= \Delta_{1p} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \ldots + \delta_{1n} X_n = 0.$$

care reprezintă prima ecuație de condiție.

Rezultă că o deplasare pe sistemul static nedeterminat poate fi determinată printr-un calcul redus, integrînd diagrama de momente M din încărcările reale construită pe structura static nedeterminată cu o diagramă de momente din încărcarea virtuală unitară pe orice sistem static determinat obținut din sistemul real. Analog se poate demonstra că se poate lua diagrama de momente M_p^0 din încărcarea reală pe sistemul static determinat și diagrama de momente din încărcarea virtuală unitară pe sistemul static nedeterminat

(această variantă nu este avantajoasă deoarece diagramele M, N, T pe sistemul nedeterminat sînt necesare pentru calculele de rezistență). Deci

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_p}{EI} \mathrm{d}x + \int \frac{n_i N_p}{EA} \mathrm{d}x + \int \eta \frac{t_i T_p}{GA} \mathrm{d}x = \int \frac{m_i^0 M_p}{EI} \mathrm{d}x + \int \frac{n_i^0 N_p}{EA} \mathrm{d}x +$$

$$+ \int \eta \frac{t_i^0 T_p}{GA} \mathrm{d}x = \int \frac{m_i M_p^0}{EI} \mathrm{d}x + \int \frac{n_i N_p^0}{EA} \mathrm{d}x + \int \eta \frac{t_i T_p^0}{GA} \mathrm{d}x.$$

Observațiile stabilite la cap. 10 legate de ponderea termenilor în valoarea deplasării și neglijarea unora dintre ei în funcție de solicitarea și tipul barelor rămîn valabile.

Astfel, pentru cadre și grinzi

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_p}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_i^0 M_p}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_i M_p^0}{EI} \mathrm{d}x. \qquad (12.21)$$

12.3.2. DEPLASĂRI DIN VARIAȚII DE TEMPERATURĂ ȘI CEDĂRI DE REAZEME

Deplasările din încărcarea cu variații de temperatură pe sistemul static nedeterminat se pot calcula luînd termenii respectivi din expresia generală a deplasărilor

$$\Delta_i = \int n_i \alpha t_0 \,\mathrm{d}x + \int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h} \mathrm{d}x$$

care prezintă însă inconvenientul că trebuie rezolvat sistemul static nedeterminat la încărcarea virtuală-unitară pentru a determina eforturile n_i și m_i.

Se ajunge la o formă mai simplă de calcul plecînd de la suprapunerea efectelor pe sistemul de bază care trebuie să aibă aceleași deplasări ca sistemul real

$$\Delta_i = \Delta_{i0}^t + \Delta_{iX}$$

în care, Δ_{i0}^t este deplasarea respectivă pe sistemul de bază din variații de temperatură, Δ_{iX} este deplasarea respectivă pe sistemul de bază din necunoscutele date de variațiile de temperatură. Folosind deplasările pe direcția respectivă din necunoscute unitare, se poate scrie

$$\Delta_i = \Delta_{i0}^t + \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \ldots + \delta_{in} X_n = \Delta_{i0}^t + \int \frac{m_i^0 m_1}{EI} X_1 \,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int \frac{m_i^0 m_2}{EI} X_2 \,\mathrm{d}x + \ldots + \int \frac{m_i^0 m_n}{EI} X_n \,\mathrm{d}x = \Delta_{i0}^t +$$

$$+ \int \frac{m_i^0 (m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots + m_n X_n)}{EI} \mathrm{d}x.$$

Rezultă că deplasările pe structuri static nedeterminate se pot calcula cu formula

$$\Delta_i = \int n_i^0 \alpha t_0 \mathrm{d}x + \int m_i^0 \alpha \frac{\Delta t}{h} \mathrm{d}x + \int \frac{m_i^0 M_t}{EI} \mathrm{d}x + \int \frac{n_i^0 N_t}{EA} \mathrm{d}x +$$

$$+ \int \eta \frac{t_i^0 T_t}{GA} \mathrm{d}x \qquad (12.22)$$

care prezintă avantajul că nu se mai rezolvă sistemul static nedeterminat la încărcarea virtuală unitară, ci numai la încărcarea reală cu variații de temperatură (M_t, N_t, T_t, eforturi pe sistemul static nedeterminat din încărcarea cu variații de temperatură).

Procedînd analog pentru încărcarea cu deplasări inițiale (cedări de reazem) se obține

$$\Delta_i = -\sum r_i \Delta_r = \Delta_{i0}^r + \Delta_{iX} = -\sum r_i^0 \Delta_r + \int \frac{m_i^0 M_r}{EI} dx + \int \frac{n_i^0 N_r}{EA} dx + + \int \eta \frac{t_i^0 T_r}{GA} dx \qquad (12.23)$$

în care: r_i sînt reacțiuni din încărcarea virtuală unitară pe sistemul static nedeterminat; r_i^0 — reacțiuni din aceeași încărcare pe sistemul static determinat; M_r, N_r și T_r — eforturi produse de cedările de reazeme pe sistemul static nedeterminat.

12.4. VERIFICAREA DIAGRAMELOR DE EFORTURI LA STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

Diagramele finale de eforturi pe structura statie nedeterminată pot fi verificate punînd condiția de continuitate a deformatei structurii reale în orice secțiune și pe orice direcție pe care există legături ($\Delta_k = 0$). Cum în calculul redus al deplasărilor la sisteme static nedeterminate diagramele de eforturi din încărcarea virtuală unitară se pot lua pe orice sistem static determinat obținut din sistemul real, rezultă condițiile generale de verificare a diagramelor de eforturi la structuri static nedeterminate sub forma:

— pentru încărcarea cu forțe

$$\Delta_k = \int \frac{m_k^0 M_p}{EI} dx + \int \frac{n_k^0 N_p}{EA} dx + \int \eta \frac{t_k^0 T_p}{GA} dx = 0;$$

— pentru încărcarea cu variații de temperatură

$$\Delta_k = \int n_k^0 \alpha t_0 \, dx + \int m_k^0 \alpha \frac{\Delta t}{h} dx + \int \frac{m_k^0 M_t}{EI} dx + \int \frac{n_k^0 N_t}{EA} dx + \int \eta \frac{t_k^0 T_t}{GA} dx = 0;$$

— pentru încărcarea cu cedări de reazem

$$\Delta_k = -\sum r_k^0 \Delta_r + \int \frac{m_k^0 M_r}{EI} dx + \int \frac{n_k^0 N_r}{EA} dx + \int \eta \frac{t_k^0 T_r}{EA} dx = 0$$

în care: m_k^0, n_k^0, t_k^0, r_k^0 sînt eforturi și reacțiuni pe un sistem static determinat din încărcarea virtuală unitară pe direcția unei legături suprimate pe direcția căreia se verifică continuitatea; M, N, T — eforturi pe sistemul static nedeterminat din încărcarea reală.

Pentru cadre și grinzi la care se neglijează deformarea din eforturi axiale și forțe tăietoare, condițiile pentru verificarea diagramelor de eforturi vor fi:

— pentru încărcarea cu forțe

$$\Delta_k = \int \frac{m_k^0 M_p}{EI} dx = 0;$$

— pentru încărcarea cu variații de temperatură

$$\Delta_k = \int n_k^0 \alpha t_0 \, dx + \int m_k^0 \alpha \frac{\Delta t}{h} dx + \int \frac{m_k^0 M_t}{EI} dx = 0;$$

— pentru încărcarea cu deplasări inițiale

$$\Delta_k = -\sum r_k^0 \Delta_r + \int \frac{m_k^0 M_r}{EI} dx = 0.$$

Astfel, pentru cadrul considerat în fig. 12.18, *a*, diagrama de momente din fig. 12.18, *b* se poate verifica calculînd o deplasare care este nulă în sistemul real, de exemplu, fie deplasarea pe orizontală u_c pe reazemul C (fig. 12.18, *c*) fie rotirea relativă φ_{Ddr}^{rel} la dreapta nodului D (fig. 12.18, *d*).

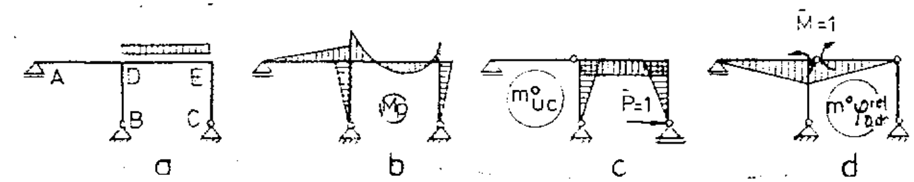


Fig. 12.18.

12.5. SIMPLIFICAREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE LA STRUCTURI SIMETRICE

La structuri simetrice se pot obține simplificări importante în calcule dacă se utilizează proprietățile de simetrie ale structurii. O încărcare oarecare pe o structură simetrică, poate fi descompusă în componente simetrice și antisimetrice (fig. 12.19, *a–c*).

După felul încărcării, la o structură simetrică rezultă că:

— la încărcări simetrice, deformata, forțele de legătură (exterioare sau interioare), diagramele N și M sînt simetrice, iar diagrama T este antisimetrică;

— la încărcarea antisimetrică, deformata, forțele de legătură (exterioare sau interioare), diagramele N și M sînt antisimetrice, iar diagrama T este simetrică.

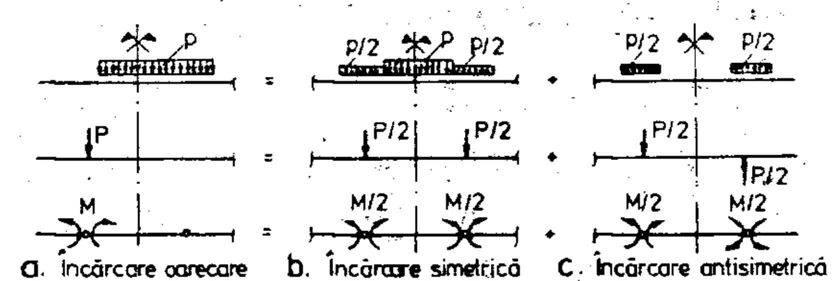


Fig. 12.19.

Din aceste observații se deduce că la structuri simetrice, la care încărcarea s-a descompus în simetrică și antisimetrică, utilizarea proprietăților de simetrie permite efectuarea calculelor pe jumătate de structură. La structuri simetrice sînt două procedee care permit aceleași simplificări : utilizarea sistemelor de bază simetrice și utilizarea semistructurilor.

12.5.1. UTILIZAREA SISTEMELOR DE BAZĂ SIMETRICE

La structuri simetrice se pot obține sisteme de bază simetrice dacă suprimarea legăturilor suplimentare se face în poziții simetrice. Obținerea sistemelor de bază simetrice se poate urmări pe exemplele din fig. 12.20, *a*—*f*. Folosirea sistemelor de bază simetrice va permite utilizarea proprietăților de simetrie menționate mai înainte. Pentru aceasta, pe sistemul de bază simetric necunoscutele trebuie descompuse ca orice încărcare în componente simetrice și antisimetrice.

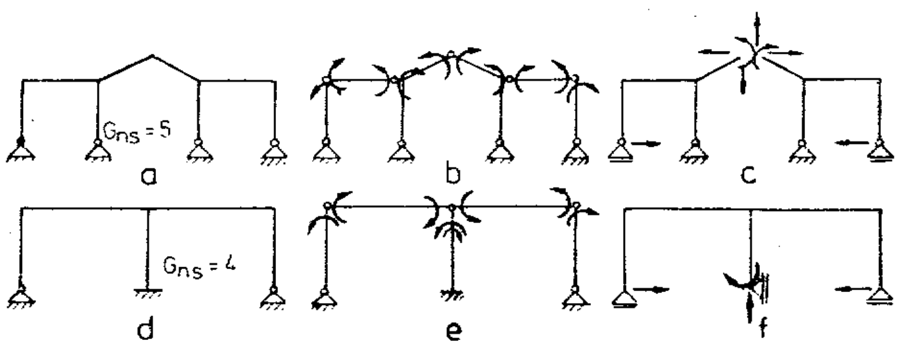


Fig. 12.20.

Se vor urmări simplificările care apar utilizînd proprietățile de simetrie la structura din fig. 12.21, *a*, pentru care se alege sistemul de bază simetric din fig. 12.21, *d*. Se descompun încărcările în simetrice și antisimetrice (fig. 12.21, *b*, *c*) ; de asemenea, se descompun necunoscutele simple X_1', X_2', X_3',

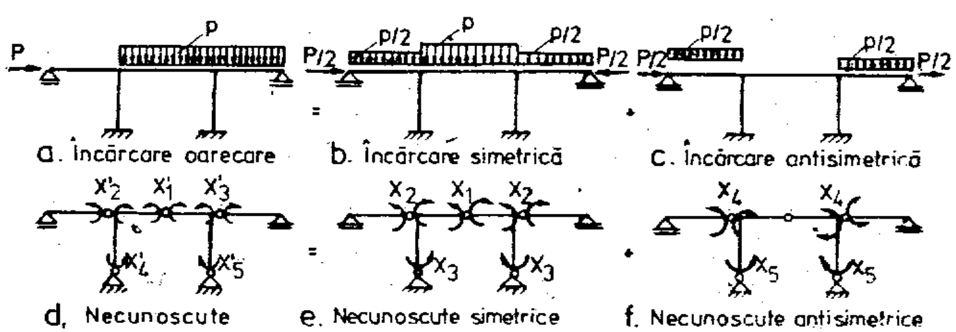


Fig. 12.21.

X_4', X_5' în necunoscute simetrice X_1, X_2, X_3 (fig. 12.21, *e*) și necunoscute antisimetrice X_4, X_5 (fig. 12.21, *f*) între care există următoarele relații :

$$X_1' = X_1 ; \quad X_2' = X_2 + X_4 ; \quad X_3' = X_2 - X_4 ; \quad X_4' = X_3 + X_5 ;$$

$$X_5' = X_3 - X_5$$

$$X_1 = X_1' ; \quad X_2 = \frac{X_2' + X_3'}{2} ; \quad X_3 = \frac{X_4' + X_5'}{2} ; \quad X_4 = \frac{X_2' - X_3'}{2} ; \quad X_5 = \frac{X_4' - X_5'}{2} .$$

Corespunzător descompunerii încărcărilor și necunoscutelor X' pe sistemul de bază în componente simetrice și antisimetrice, se vor modifica și ecuațiile de condiție. Astfel, considerînd, de exemplu, ecuația a doua pentru necunoscute corespunzătoare încărcării oarecare X'

$$\delta_{21}' X_1' + \delta_{22}' X_2' + \delta_{23}' X_3' + \delta_{24}' X_4' + \delta_{25}' X_5' + \Delta_{2p}' = 0$$

se obține, corespunzător descompunerii încărcării date

— La încărcarea simetrică ($X_1' = X_1'$, $X_2' = X_3'$; $X_4' = X_5'$)

$$\delta_{21}' X_1' + (\delta_{22}' + \delta_{23}') X_2' + (\delta_{24}' + \delta_{25}') X_4' + \Delta_{2p}' = 0$$

sau

$$\delta_{21}' X_1' + (\delta_{22}' + \delta_{23}') \left(\frac{X_2' + X_3'}{2} \right) + (\delta_{24}' + \delta_{25}') \left(\frac{X_4' + X_5'}{2} \right) + \Delta_{2p}' = 0$$

dar

$$\delta_{21}' = \int \frac{m_2' m_1'}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_2 + m_4}{2} m_1 \frac{\mathrm{d}x}{EI} = \int \frac{m_2 m_1}{2EI} \mathrm{d}x +$$

$$+ \int \frac{m_4 m_1}{2EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_2 m_1}{2EI} = \frac{1}{2} \delta_{21}$$

$$\delta_{22}' + \delta_{23}' = \int \frac{(m_2' + m_3') m_2'}{EI} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{m_2 + m_4}{2} + \frac{m_2 - m_4}{2} \right) \left(\frac{m_2 + m_4}{2} \right) \frac{\mathrm{d}x}{EI} =$$

$$= \int \frac{m_2 m_2}{2EI} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \delta_{22}$$

$$\delta_{24}' + \delta_{25}' = \int \frac{(m_4' + m_5') m_2'}{EI} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{m_3 + m_5}{2} + \frac{m_3 - m_5}{2} \right) \left(\frac{m_2 + m_4}{2} \right) \frac{\mathrm{d}x}{EI} =$$

$$= \int \frac{m_3 m_2}{2EI} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \delta_{23}$$

$$\Delta_{2p}' = \int \frac{m_2' M_p^{0,s}}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_2 + m_4}{2} \cdot \frac{M_p^{0,s}}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_2 M_p^{0,s}}{2EI} = \frac{1}{2} \Delta_{2p}^s$$

în care : m_i' sînt diagrame din necunoscute unitare X_i', corespunzător încărcării oarecare ; m_i — diagrame de momente din perechi de necunoscute unitare X_i simetrice sau antisimetrice.

Integralele din produsul unei diagrame simetrice cu una antisimetrică sînt nule

$$\int \frac{m_4 m_1}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_2 m_4}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_3 m_4}{EI} \mathrm{d}x = \int \frac{m_4 M_p^{0,s}}{EI} \mathrm{d}x = 0.$$

Deci, la încărcarea simetrică, ecuaţia va conţine numai necunoscute simetrice.

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p}^s = 0.$$

— La încărcarea antisimetrică ($X_1' = 0$, $X_2' = -X_3'$, $X_4' = -X_5'$)

$$\delta_{21}'X_1' + (\delta_{22}' - \delta_{23}')X_2' + (\delta_{24}' - \delta_{25}')X_4' + \Delta_{2p}' = 0$$

sau

$$(\delta_{22}' - \delta_{23}')\left(\frac{X_2' - X_3'}{2}\right) + (\delta_{24}' - \delta_{25}')\left(\frac{X_4' - X_5'}{2}\right) + \Delta_{2p}' = 0$$

dar

$$(\delta_{22}' - \delta_{23}') = \int \frac{(m_2' - m_3')m_2'}{EI}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{m_2 + m_4}{2} - \frac{m_2 - m_4}{2}\right)\left(\frac{m_2 + m_4}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{EI} =$$

$$= \int \frac{m_4 m_4}{2EI}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\delta_{44}$$

$$(\delta_{24}' - \delta_{25}') = \int \frac{(m_4' - m_5')m_2'}{EI}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{m_3 + m_5}{2} - \frac{m_3 - m_5}{2}\right)\left(\frac{m_2 + m_4}{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{EI} =$$

$$= \int \frac{m_5 m_4}{2EI} = \frac{1}{2}\,\delta_{45}$$

$$\Delta_{2p}' = \int \frac{m_2' M_p^{0,as}}{EI}\,\mathrm{d}x = \int \frac{m_2 - m_4}{2}\cdot\frac{M_p^{0,as}}{EI}\,\mathrm{d}x = \int \frac{m_4 M_p^{0,as}}{2EI} = \frac{1}{2}\Delta_{4p}^{as}.$$

Deci, la încărcarea antisimetrică ecuaţia va conţine numai necunoscute antisimetrice

$$\delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \Delta_{4p}^{as} = 0.$$

Din cele arătate rezultă că în locul necunoscutelor simple X_i' se poate lucra cu necunoscute grupate, X_i (simetrice sau antisimetrice) care acţionează în mai multe secţiuni. Coeficienţii şi termenii liberi capătă interpretare de deplasări generalizate, diagramele unitare pe baza cărora se calculează provenind din necunoscute grupate (fig. 12.22, *a*–*j*).

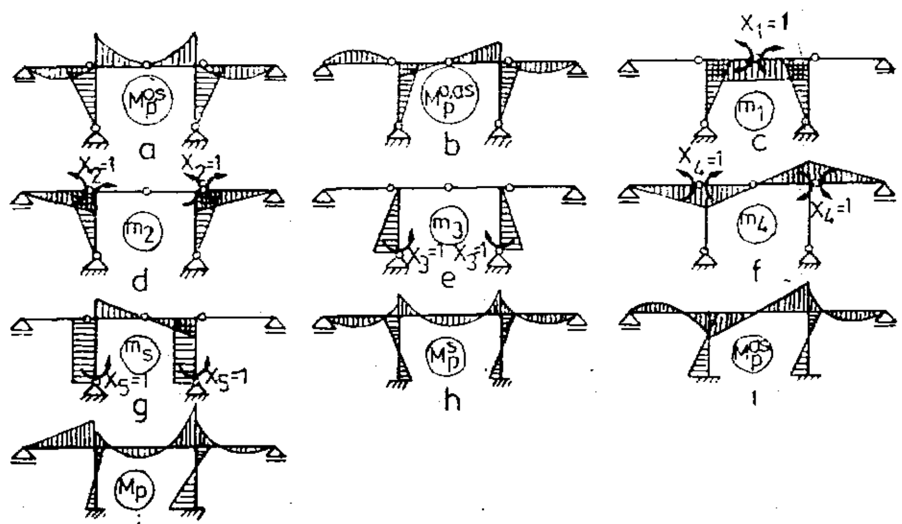


Fig. 12.22.

Din cele demonstrate rezultă că, la structuri simetrice, alegînd un sistem de bază simetric cu necunoscute simetrice şi antisimetrice, sistemul ecuaţiilor de condiţie, datorită anulării coeficienţilor secundari rezultaţi din integrarea produsului unei diagrame simetrice cu una antisimetrică, se scindează în două sisteme, sistemul necunoscutelor simetrice şi sistemul necunoscutelor antisimetrice. Astfel, pentru cazul studiat, se obţine

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \qquad \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \Delta_{4p} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \qquad \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5p} = 0.$$

Dacă se descompune şi încărcarea dată în simetrică şi antisimetrică, la încărcarea simetrică apar numai necunoscutele simetrice şi la încărcarea antisimetrică apar numai necunoscutele antisimetrice, celelalte fiind nule. Cu ajutorul lor se determină diagramele de momente pe sistemul static nedeterminat din încărcarea simetrică şi respectiv antisimetrică

$$M_p^s = M_p^{0,s} + m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3$$

$$M_p^{as} = M_p^{0,as} + m_4X_4 + m_5X_5.$$

În plus, toate calculele pentru coeficienţi, termeni liberi şi diagrame se pot face pe jumătate din structură, datorită simetriei şi antisimetriei diagramelor.

Diagrama finală din încărcarea iniţială se obţine prin suprapunerea celor două diagrame

$$M = M^s + M^{as}.$$

12.5.2. UTILIZAREA SEMISTRUCTURILOR

Efectuarea calculelor practice pe jumătate de structură, aşa cum s-a arătat mai înainte, conduce la ideea utilizării semistructurilor. Acestea se obţin din structura întreagă prin secţionare după axa de simetrie. În secţiunile din axa de simetrie se introduc legături destinate să înlocuiască efectul jumătăţii de structură îndepărtată asupra semistructurii rămase. Aceste legături fac ca deformata semistructurii să coincidă cu deformata structurii corespunzător încărcării respective (simetrică sau antisimetrică). Ele se stabilesc astfel încît să permită şi să împiedice aceleaşi deplasări ale secţiunilor din axa de simetrie care apar sau sînt nule în deformata structurii întregi corespunzătoare încărcării simetrice sau antisimetrice.

Stabilirea semistructurilor pentru încărcare simetrică sau antisimetrică se poate urmări pe exemplele din fig. 12.23. Pentru cazurile din fig. 12.23, *a* şi *b* (axa de simetrie taie o bară) din analiza deformatelor rezultă:

— la încărcare simetrică, secţiunea *s* din axa de simetrie are $v_s \neq 0$, $u_s = 0$, $\varphi_s = 0$, deci trebuie introduse legături care să împiedice deplasările *u* şi φ (încastrare cu translaţie sau ghidaj);

— la încărcare antisimetrică, deformata antisimetrică impune secţiunii *s* din axa de simetrie $v_s = 0$, $u_s \neq 0$, $\varphi_s \neq 0$, deci se introduce reazem simplu care să împiedice deplasarea paralelă cu axa de simetrie.

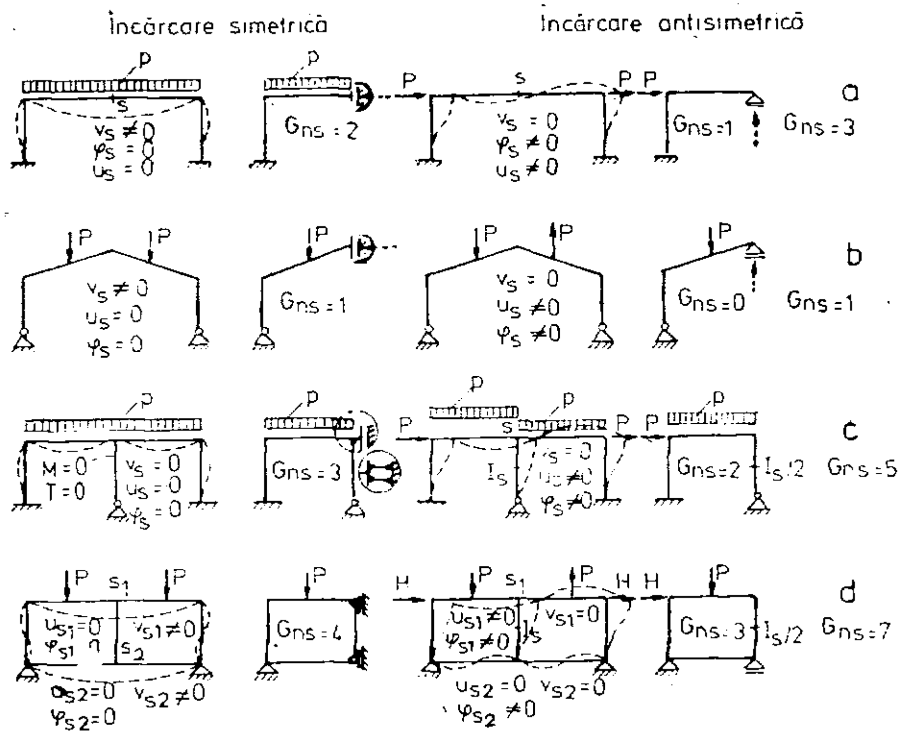


Fig. 12.23.

Pentru cazul din fig. 12.23, *c* (axa de simetrie coincide cu un stîlp) la încărcare simetrică toate deplasările secțiunii *s* sînt nule deci ar trebui introdusă încastrare (mai corect s-a introdus stîlpul sub formă pendulară pentru $M = 0$ și $T = 0$ și ghidaj de riglă, aceasta pentru a nu uita că în stîlp $N \neq 0$ și că la încărcare cu variații de temperatură stîlpul se poate alungi și deci $v_s \neq 0$). La încărcare antisimetrică, stîlpul central se deformează, pe el apar momente încovoietoare și deci trebuie să rămînă în semistructură. Stîlpul din axa de simetrie în semistructură trebuie să aibă aceeași deformată cu stîlpul în structura întreagă. Cum momentul pe acest stîlp în semistructură este jumătate din momentul pe stîlpul de la structura întreagă ($M'_s = M_s/2$), din egalitatea curburilor

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_s}{EI_s} = \frac{M'_s}{EI'_s},$$

rezultă că în semistructură stîlpul se ia convențional cu moment de inerție pe jumătate ($I'_s = I_s/2$).

Pentru cazul din fig. 12.23, *d* se observă că, la încărcare simetrică, stîlpul central se menține sub formă de bară dublu articulată deoarece în el apare numai efortul axial, iar la încărcare antisimetrică reazemul simplu pentru secțiunea s_1 nu mai este necesar deoarece deplasarea ei pe verticală este împiedicată de stîlp.

Ca o verificare a stabilirii corecte a semistructurilor trebuie ca suma gradelor de nedeterminare statică pentru semistructura corespunzătoare

încărcării simetrice și pentru semistructura corespunzătoare încărcării antisimetrice să fie egală cu gradul de nedeterminare statică al structurii întregi ($G_{ns} = G^s_{ns} + G^{as}_{ns}$).

O dată stabilită semistructura, se rezolvă ca orice structură la încărcările ce-i revin și apoi se trasează diagramele pe întreaga structură, simetric sau antisimetric, după încărcare. Dacă încărcarea este oarecare, diagrama finală se obține suprapunînd efectele pe întreaga structură

$$M = M^s + M^{as}.$$

Aplicația 12.1. Pentru cadrul din fig. 12.24, *a* să se determine diagramele de eforturi și să se calculeze săgeata în capătul consolei (v_5) și rotirea nodului *2* (φ_2).

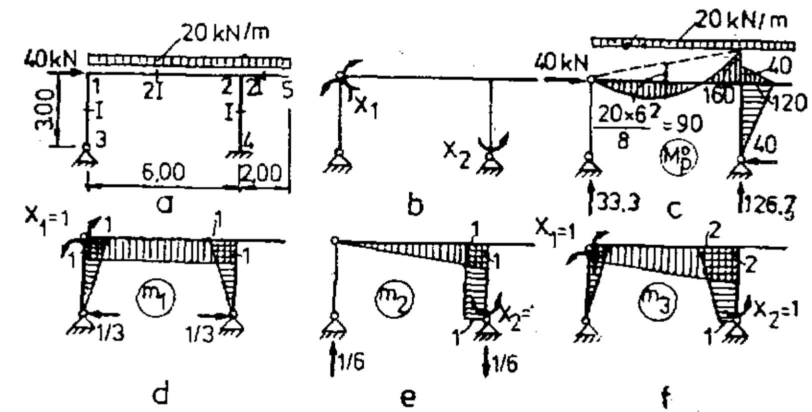


Fig. 12.24.

1) Structura este de două ori static nedeterminată

$$G_{ns} = (3\cdot 1 + 2\cdot 1) - 3\cdot 1 = 2.$$

2) Sistemul de bază (fig. 12.24, *b*) s-a obținut suprimînd o legătură în încastrarea *4* și în nodul *1* unde rămîn articulații, deci necunoscutele X_1 și X_2 sînt momente. Ecuațiile de condiție sînt

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

3) Diagramele din încărcările date (M^0_p) și din necunoscute unitare (m_1 și m_2) pe sistemul de bază sînt date în fig. 12.24, *c*, *d* și *e*.

4) Calculul coeficienților și termenilor liberi ($I_0 = I$)

$$EI_0\delta_{11} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_1^2\,dx = \frac{1}{1}\left(\frac{1\cdot 3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) + \frac{1}{2}(1\cdot 6)(1) = 5$$

$$EI_0\delta_{22} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_2^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) + \frac{1}{1}\left(\frac{1\cdot 3}{2}\right)(1) = 4$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_1 m_2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 6}{2}\right)(1) + \frac{1}{1}\left(\frac{1\cdot 3}{2}\right)(1) = 3$$

$$EI_0\Delta_{1p} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_1 M_p^0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 90\right)(1) - \frac{1}{2}\left(\frac{160\cdot 6}{2}\right)(1) - \frac{1}{1}\left(\frac{120\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) = -180$$

$$EI_0\Delta_{2p} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_2 M_p^0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 90\right)\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{160\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) - \frac{1}{1}\left(\frac{20\cdot 3}{2}\right)(1) = -250.$$

Verificarea coeficienţilor şi termenilor liberi cu ajutorul diagramei m_s din fig. 12.24, f

$$EI_0\delta_{ss} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_s^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1}\left(\frac{1\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) + \frac{1}{1}\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right) + \frac{1}{1}\left(\frac{1\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) + \left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 1\right)2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) + \left(\frac{2\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right) + 2\left(\frac{2\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 1\right)\right] = 15$$

$$EI_0\Sigma\delta_{ij} = EI_0(\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12}) = 5 + 4 + 2\cdot 3 = 15.$$

Se verifică

$$EI_0\delta_{ss} = EI_0\Sigma\delta_{ij}$$

$$EI_0\Delta_{sp} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_s M_p^0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 90\right)(1{,}5) - \frac{1}{2}\left(\frac{160\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1\right) - \left(\frac{120\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1\right) = -430$$

$$EI_0\Sigma\Delta_{ip} = EI_0(\Delta_{1p} + \Delta_{2p}) = -180 - 250 = -430$$

Se verifică

$$EI_0\Delta_{sp} = EI_0\Sigma\Delta_{ip}.$$

5) Determinarea necunoscutelor din sistemul de ecuaţii

$5X_1 + 3X_2 - 180 = 0;\qquad X_1 = -2{,}7\ \mathrm{kN\cdot m}$

$3X_1 + 4X_2 - 250 = 0;\qquad X_2 = +64{,}5\ \mathrm{kN\cdot m}.$

6) Determinarea diagramei de momente pe sistemul static nedeterminat prin suprapunerea efectelor pe sistemul static determinat

$$M = M_p^0 + m_1X_1 + m_2X_2.$$

Se determină cu această relaţie momentele pe fiecare capăt de bară; între aceste valori, diagrama variază după o anumită lege în concordanţă cu încărcarea (ca la bare static determinate), (fig. 12.25, a)

$M_{1,3} = M_{1,2} = 0 + 1(-2{,}7) + 0 = -2{,}7\ \mathrm{kN\cdot m};$

$M_{2,4} = -120 + 1(-2{,}7) + 1(64{,}5) = -58{,}2\ \mathrm{kN\cdot m}$

$M_{2,1} = -160 + 1(-2{,}7) + 1(64{,}5) = -98{,}2\ \mathrm{kN\cdot m};$

$M_{4,2} = 0 + 0 + 1(64{,}5) = 64{,}5\ \mathrm{kN\cdot m}.$

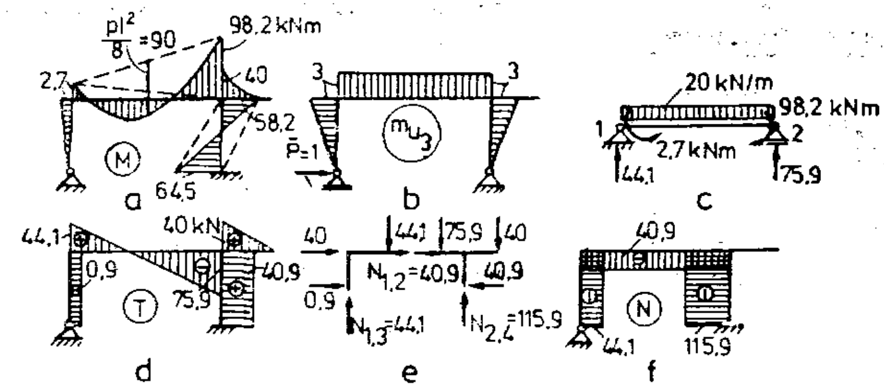


Fig. 12.25.

7) Verificarea diagramei de momente se face calculînd deplasarea pe orizontală în reazemul 3 (fig. 12.25, b)

$$EIu_3 = \frac{1}{1}\left(\frac{2{,}7\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{98{,}2 + 2{,}7}{2} - \frac{2}{3}\cdot 90\cdot 6\right]\cdot(3) + \frac{1}{1}\left(\frac{58{,}2\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right) - \frac{1}{1}\cdot\left(\frac{64{,}5\cdot 3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right) = 8{,}1 - 85{,}9 + 174{,}6 - 96{,}7 = 182{,}7 - 182{,}6 \approx 0.$$

8) Diagrama de forţe tăietoare T (fig. 12.25, d) se determină pe fiecare bară pe baza momentelor de capăt şi a încărcărilor. Astfel, pe bara $1-2$ considerată ca dublu articulată încărcată cu forţele ce-i revin şi momentele de capăt (fig. 12.25, c) se determină reacţiunile normale pe bară şi apoi rezultă diagrama T. Pe bare la care momentul variază liniar, forţa tăietoare va fi constantă fiind egală cu panta diagramei de momente. În acest caz, semnul se poate stabili mecanic şi anume, dacă bara se roteşte orar pentru a mătura diagrama M, T este pozitiv.

Eforturile axiale N rezultă din echilibrul nodurilor (fig. 12.25, e, f).

9) Pentru determinarea deplasărilor cerute, v_5 şi φ_2, încărcările unitare virtuale se pot considera pe orice sistem static determinat obţinut din sistemul real (fig. 12.26).

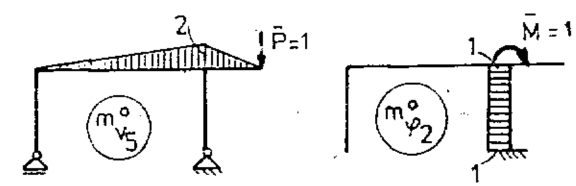


Fig. 12.26.

$$EIv_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{98{,}2\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}7\cdot 6}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 90\right)\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 40\cdot 2\right)\left(\frac{3}{4}\cdot 2\right) = 39{,}1$$

$$EI\varphi_2 = \frac{1}{1}\left(\frac{64{,}5\cdot 3}{2} - \frac{58{,}2\cdot 3}{2}\right)\cdot 1 = 9{,}45;\quad v_5 = \frac{39{,}1}{EI}\,\mathrm{m};\quad \varphi_2 = \frac{9{,}45}{EI}\,\mathrm{rad}.$$

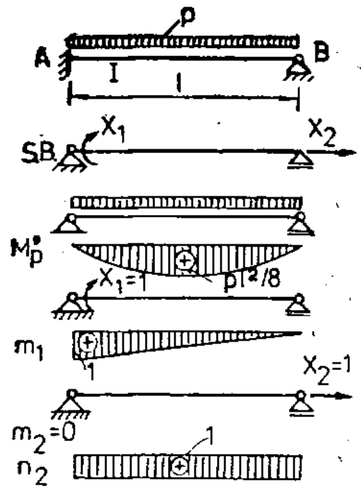


Fig. 12.27.

Aplicația 12.2. Să se traseze diagramele de eforturi M, T, N pentru grinda din fig. 12.27

$$G_{ns} = 3 - 1 = 2.$$

Sistemul de bază a rezultat din suprimarea legăturilor suplimentare pe direcția momentului din încastrare și a reacțiunii orizontale din reazemul B.

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

$$EI\delta_{11} = \int m_1^2\,dx = \frac{1\cdot 1\cdot l}{3} = \frac{l}{3}$$

$$EI\delta_{22} = \int m_2^2\,dx = 0$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int m_1 m_2\,dx = 0$$

$$EI\Delta_{1p} = \int m_1 M_p^0\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{pl^2}{8}\cdot l\cdot\frac{1}{2} = \frac{pl^3}{24}$$

$$EI\Delta_{2p} = \int m_2 M_p^0\,dx = 0.$$

Dacă în calculul coeficienților ecuațiilor de condiție se reține numai integrala momentelor încovoietoare, sistemul poate fi considerat ca avînd o singură nedeterminare statică:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0;\ \frac{l}{3}X_1 + \frac{pl^3}{24} = 0;\ X_1 = -\frac{pl^2}{8}.$$

Pentru sistemul de bază încărcat cu forțe și necunoscute, aplicînd suprapunerea liniară a efectelor, se obține

$$M_A = M_{Ap}^0 + m_{1.1}X_1 = 0 + 1\left(-\frac{pl^2}{8}\right) = -\frac{pl^2}{8}$$

și în continuare se trasează diagramele M și T (fig. 12.28).

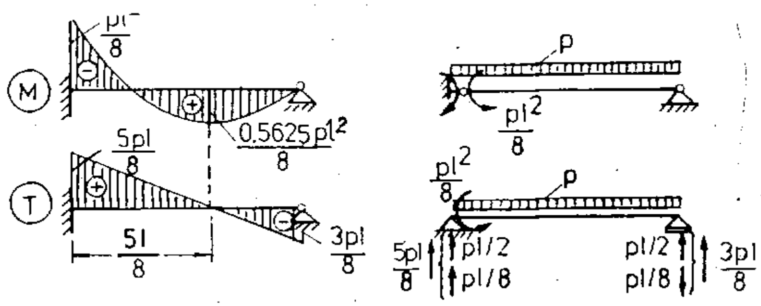


Fig. 12.28.

Pentru diagrama T se consideră grinda articulată la ambele extremități și se determină separat reacțiunile corespunzătoare încărcării cu forțele date și reacțiunile corespunzătoare încărcării cu momentul M_A; suprapunînd cele două efecte se poate trece la trasarea diagramei T

$$T = 0;\ x = \frac{5l}{8};\ M_{max} = -\frac{pl^2}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5pl}{8}\cdot\frac{5l}{8} = +\frac{0{,}5625}{8}pl^2.$$

Aplicația 12.3. Să se traseze diagramele M, N, T pentru cadrul din fig. 12.29, *a* cu verificarea ecuațiilor de condiție și a diagramei finale de momente încovoietoare

$$G_{ns} = 3\cdot 2 - (1 + 1 + 2\cdot 1) = 2.$$

Trecerea la sistemul de bază se face prin introducerea unei articulații în nodul C (fig. 12.29, *b*), momentele încovoietoare X_1 și X_2 fiind necunoscutele suplimentare.

Diagramele unitare m_1 și m_2 sînt trasate în fig. 12.30, *a*, *b*, iar diagrama M_p^0 dată de încărcarea cu forțe, în fig. 12.30, *c*.

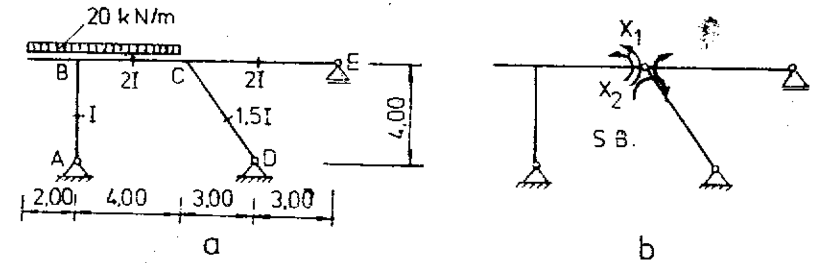


Fig. 12.29.

Sistemul fiind de două ori static nedeterminat, ecuațiile de condiție sînt:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

$$EI\delta_{11} = \Sigma\int\frac{I}{I_x}m_1^2\,dx = \frac{0{,}714\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}714 + \frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}714\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0{,}714 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}714\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 4}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 0{,}714 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 6}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = 3{,}163$$

$$EI\delta_{22} = \Sigma\int\frac{I}{I_x}m_2^2\,dx = \frac{1\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\cdot 1 + \frac{1}{1{,}5}\cdot\frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = 4{,}443$$

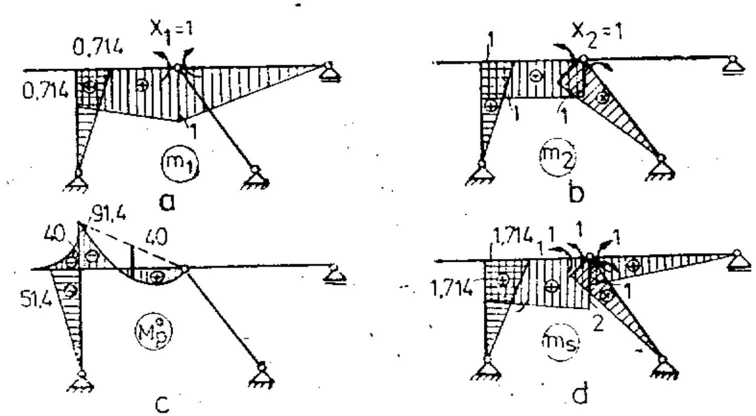


Fig. 12.30.

$$EI\delta_{12} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_1 m_2 \, dx = \frac{0,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,714 + 1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2,667$$

$$EI\Delta_{1p} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_1 M_p^0 \, dx = -\frac{51,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,714 - \frac{1}{2} \cdot \frac{91,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,714 -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{91,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}(0,714 + 1) = -77,35$$

$$EI\Delta_{2p} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_2 M_p^0 \, dx = -\frac{51,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{91,4 \cdot 4}{2} \cdot 1 +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \cdot 1 = -106,7$$

$$3,163X_1 + 2,667X_2 - 77,35 = 0$$

$$2,667X_1 + 4,443X_2 - 106,70 = 0.$$

Pentru verificarea coeficienţilor şi termenilor liberi din ecuaţiile de condiţie se încarcă sistemul de bază cu $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ simultan şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_s (fig. 12.30, *d*).

a) Verificarea globală a coeficienţilor necunoscutelor sistemului de ecuaţii. Se încarcă sistemul de bază cu $X_1 = 1$ şi $X_2 = 1$ simultan şi se calculează

$$EI\delta_{ss} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_s^2 \, dx = \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,714 +$$

$$+\frac{1}{1,5} \cdot \frac{1 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 12,95.$$

Pentru verificarea globală a coeficienţilor necunoscutelor trebuie ca

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}$$

$$EI(\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}) = 3,163 + 2,667 + 2,667 + 4,443 = 12,93.$$

Deşi verificarea corespunde, pentru exemplificare se vor efectua verificările parţiale pe ecuaţii.

b) Verificarea coeficienţilor necunoscutelor pentru prima ecuaţie. Se calculează coeficientul auxiliar

$$EI\delta_{1s} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_1 m_s \, dx = \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,714 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{2}{3} \cdot 0,714 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,714 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 +$$

$$+\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 5,83.$$

Pentru verificare, trebuie ca : $\delta_{1s} = \delta_{11} + \delta_{12}$

$$EI(\delta_{11} + \delta_{12}) = 3,163 + 2,667 = 5,83.$$

c) Verificarea coeficienţilor necunoscutelor pentru ecuaţia a doua. Se calculează coeficientul auxiliar

$$EI\delta_{2s} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_2 m_s \, dx = \frac{1,714 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1,714 + 2}{2} \cdot 4 \cdot 1 +$$

$$+\frac{1}{1,5} \cdot \frac{5 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 7,11.$$

Pentru verificare trebuie ca : $\delta_{2s} = \delta_{21} + \delta_{22}$

$$EI(\delta_{21} + \delta_{22}) = 2,667 + 4,443 = 7,11.$$

d) Verificarea termenilor liberi. Se calculează coeficientul auxiliar

$$EI\Delta_{sp} = \Sigma \int \frac{I}{I_x} m_s M_p^0 \, dx = -\frac{51,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 - \frac{1}{2} \cdot \frac{91,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,714 -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{91,4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}(1,714 + 2) = -184.$$

Pentru verificare, trebuie ca $\Delta_{sp} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p}$

$$EI(\Delta_{1p} + \Delta_{2p}) = -77,35 - 106,7 = -184,05.$$

Pe baza acestor verificări rezultă că ecuaţiile de condiţie sînt scrise corect. Din rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă pentru necunoscute valorile

$$X_1 = +8,6 \text{ kN·m} ; \; X_2 = 18,85 \text{ kN·m}.$$

Multiplicînd diagramele m_1 şi m_2 cu valorile necunoscutelor X_1 respectiv X_2 şi efectuînd suprapunerea efectelor pe sistemul de bază în secţiunile de la capătul barelor, se obţine diagrama finală de momente încovoietoare (fig. 12.31, *a*)

$$M = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2$$

$$M_B^{st} = -40 + 0 + 0 = -40 \text{ kN·m}$$

$$M_B^{dr} = -91,4 + 0,714 \cdot 8,6 + 1 \cdot 18,85 = -66,4 \text{ kN·m}$$

$$M_B^{inf} = -51,4 + 0,714 \cdot 8,6 + 1 \cdot 18,85 = -26,4 \text{ kN·m}$$

$$M_C^{st} = 0 + 1 \cdot 8,6 + 1 \cdot 18,85 = 27,45 \text{ kN·m}$$

$$M_C^{dr} = 0 + 1 \cdot 8,6 = 8,6 \text{ kN·m}$$

$$M_C^{inf} = 0 + 0 + 1 \cdot 18,85 = 18,85 \text{ kN·m}.$$

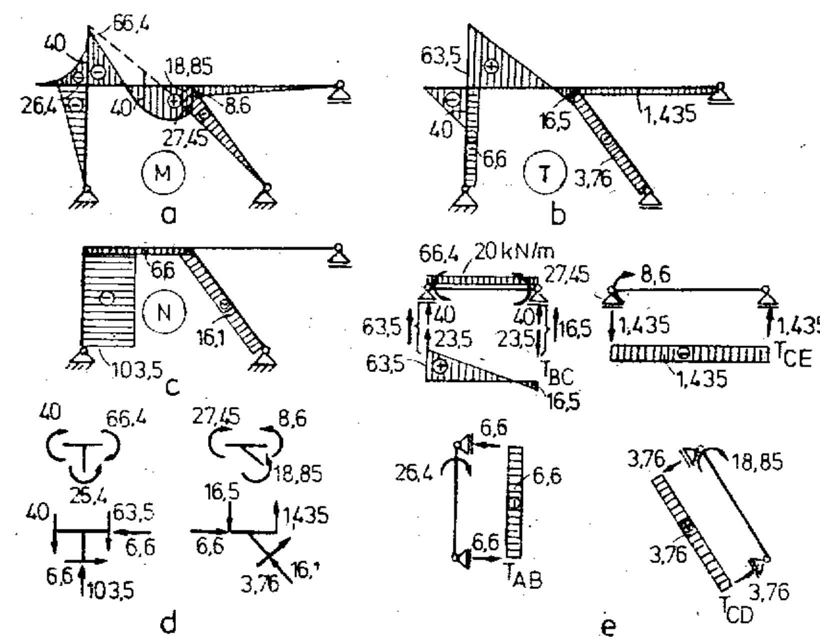


Fig. 12.31.

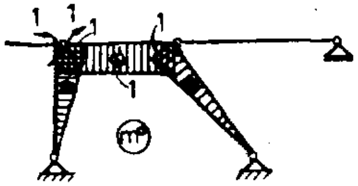


Fig. 12.32.

Condiția de echilibru a momentelor pe nodurile B și C este realizată (fig. 12.31, *d*). Diagrama de forțe tăietoare rezultată pe baza diagramei M este prezentată în fig. 12.31 *b* și *e*.

Pentru determinarea diagramei N se utilizează condițiile de echilibru ale nodurilor B și C exprimate prin proiecții (fig. 12.31, *c*).

Verificarea diagramei finale de momente încovoietoare se face calculînd cu ajutorul acesteia rotirea relativă în articulația B (fig. 12.32), care în sistemul real este nulă

$$EI\varphi_B^{rel} = \sum\int \frac{I}{I_x} m^0 M\,dx = -\frac{26,4\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{66,4\cdot 4}{2}\cdot 1 +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{27,45\cdot 4}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 40\cdot 4\cdot 1 + \frac{1}{1,5}\cdot\frac{18,85\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \approx 0.$$

Aplicația 12.4. Să se traseze diagramele M, T, N pentru structura din fig. 12.33.

$E = \text{const}$; $I_g/A_t = 0,0667\ \text{m}^2$;

$G_{ns} = 3\cdot 3 - (8\cdot 1) = 1.$

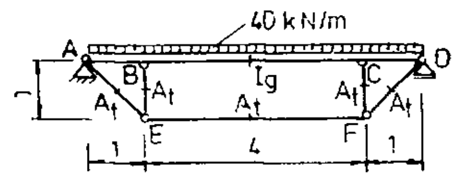


Fig. 12.33.

Sistemul are un grad de nedeterminare statică (nedeterminare interioară), iar ca necunoscută suplimentară s-a ales momentul încovoietor în secțiunea de la mijlocul riglei (fig. 12.34, *a*)

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

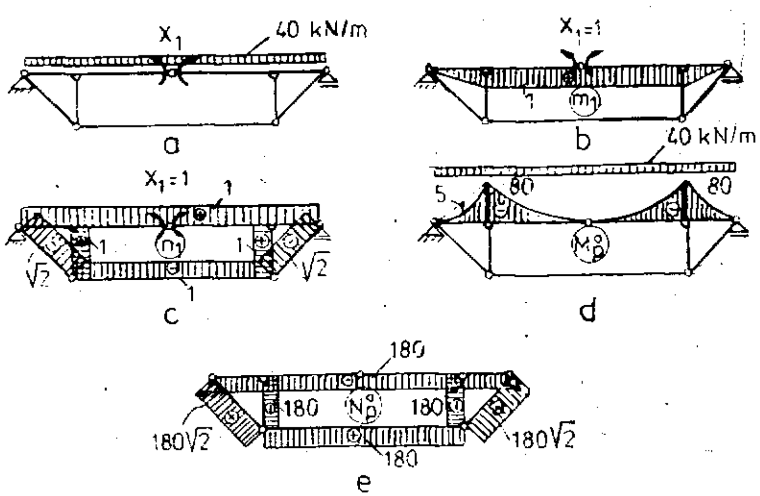


Fig. 12.34.

În calculul deplasărilor elastice δ_{11} și Δ_{1p} (fig. 12.34, *b*—*e*) se ține seama și de influența forțelor axiale numai în barele articulate (zăbrele)

$$EI_g\delta_{11} = \sum\int \frac{I_g}{I} m_1^2\,dx + \sum\int \frac{I_g}{A_t} n_1^2\,dx = 2\left(\frac{1\cdot 1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1\right) +$$

$$+ 2\cdot 0,0667(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1) = 5,444$$

$$EI_g\Delta_{1p} = \sum\int \frac{I_g}{I} m_1 M_p^0\,dx + \sum\int \frac{I_g}{A_t} n_1 N_p^0\,dx = 2\left(-\frac{80\cdot 1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot 80\cdot 2\cdot 1\right) + 2\cdot 0,067\cdot(-180\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 180\cdot 1\cdot 1 -$$

$$- 180\cdot 2\cdot 1) = -296,17$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{296,17}{5,4444} = 54,4\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

Prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază în secțiunile de la capetele barelor se obține diagrama M prezentată în fig. 12.35, *a*

$$M = M_p^0 = m_1 X_1.$$

Diagrama T s-a dedus din diagrama M (fig. 12.35, *b*, *d*).

Diagrama N s-a dedus prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază (fig. 12.35, *c*)

$$N = N_p^0 + n_1 X_1$$

$$N_{ABCD} = -180 + 1\cdot 54,4 = -125,6\ \text{kN}.$$

$$N_{BE} = N_{CF} = -180 + 1\cdot 54,4 = -125,6\ \text{kN}.$$

$$N_{AE} = N_{DF} = 180\sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot 54,4 = 125,6\sqrt{2}\ \text{kN}$$

$$N_{EF} = 180 - 1\cdot 54,4 = 125,6\ \text{kN}.$$

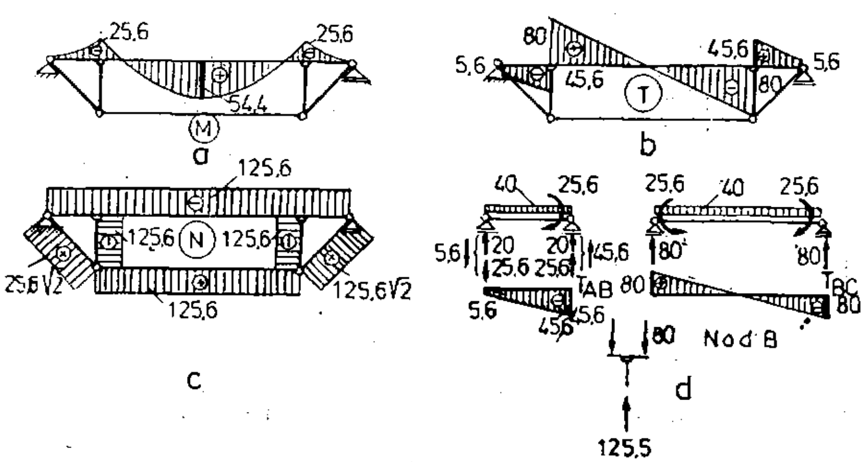


Fig. 12.35.

Aplicația 12.5. Să se traseze diagramele M, T, N pentru cadrul din fig. 12.36, *a*, supus unei variații de temperatură conform figurii.

Caracteristici geometrice și elastice ale elementelor cadrului:

$$E = 200\,000 \text{ daN/cm}^2 = 2\cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$I_{st} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}4^3}{12} = 0{,}0016 \text{ m}^4 = I_0;\ I_r = \frac{0{,}3\cdot 0{,}5^3}{12} = 0{,}003125 \text{ m}^4 =$$

$$= 1{,}95\ I_0;\ \alpha = 10^{-5};$$

$$G_{ns} = 3\cdot 2 - (2\cdot 1 + 1\cdot 2) = 2.$$

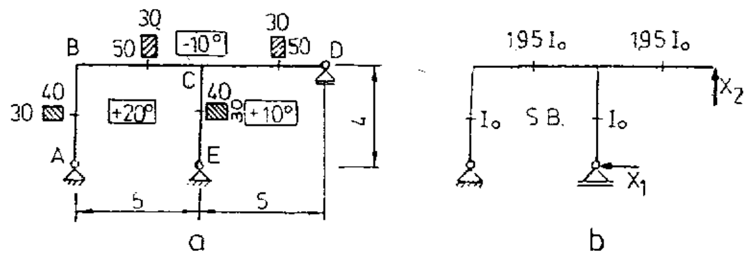
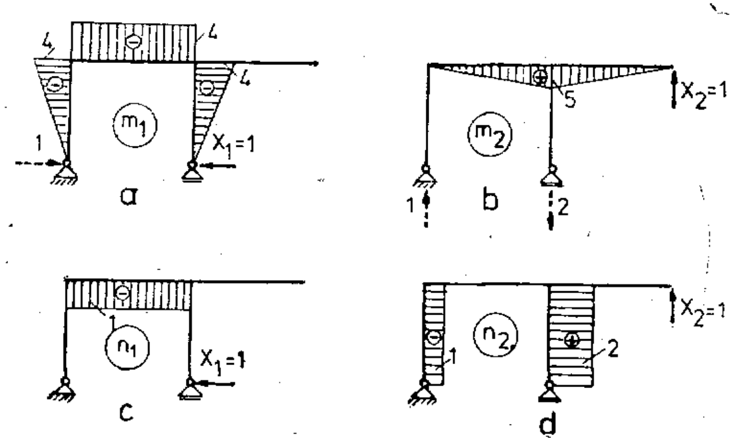


Fig. 12.36.

Trecerea la sistemul de bază se face prin suprimare de legături la teren (fig. 12.36, *b*); reacțiunea orizontală din E și cea verticală din D devin necunoscute suplimentare.

Diagramele unitare m_1, m_2, n_1, n_2 sînt trasate în fig. 12.37, *a—d* iar tabelul temperaturilor în axa barei și a diferențelor între cele două fețe este prezentat în fig. 12.37, *e*.



Bara	$t_o = \frac{t_1 + t_2}{2}$	$\Delta t = t_1 - t_2$
A - B	5	30
B - C	5	30
C - D	0	20
D - E	15	10

e

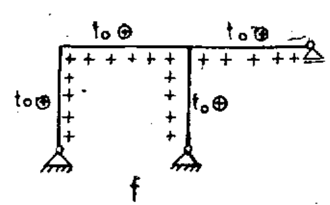


Fig. 12.37.

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0$$

$$EI_0\delta_{11} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_1^2\,dx = 2\cdot\frac{4\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{1{,}95}\cdot 4\cdot 5\cdot 4 = 83{,}67$$

$$EI_0\delta_{22} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_2^2\,dx = 2\cdot\frac{1}{1{,}95}\cdot\frac{5\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 5 = 42{,}70$$

$$EI_0\delta_{12} = \Sigma\int \frac{I_0}{I} m_1 m_2\,dx = -\frac{1}{1{,}95}\cdot\frac{5\cdot 5}{2}\cdot 4 = -25{,}60$$

$$EI_0\Delta_{1t} = EI_0\left(\Sigma\alpha t_0\Omega^{n_i} + \Sigma\alpha\frac{\Delta t}{h}\,\Omega^{m_i}\right) = 2\cdot 10^7\cdot 0{,}0016\cdot 10^{-5}\cdot\left(-5\cdot 1\cdot 5 - \right.$$

$$\left. - \frac{30}{0{,}4}\cdot\frac{4\cdot 4}{2} - \frac{30}{0{,}5}\cdot 4\cdot 5 - \frac{10}{0{,}4}\cdot\frac{4\cdot 4}{2}\right) = -648$$

$$EI_0\Delta_{2t} = EI_0\left(\Sigma\alpha t_0\Omega^{n_i} + \Sigma\alpha\frac{\Delta t}{h}\,\Omega^{m_i}\right) = 2\cdot 10^7\cdot 0{,}0016\cdot 10^{-5}\left(5\cdot 1\cdot 4 + \right.$$

$$\left. + 15\cdot 2\cdot 4 + \frac{30}{0{,}5}\cdot\frac{5\cdot 5}{2} + \frac{20}{0{,}5}\cdot\frac{5\cdot 5}{2}\right) = 432{,}5.$$

În fig. 12.37, *f*, pentru fiecare bară în parte s-au punctat fibrele supuse unei temperaturi mai înalte, necesare stabilirii semnului termenilor din expresia Δ_{it}.

$$83{,}67X_1 - 25{,}6X_2 - 648 = 0;\ X_1 = 5{,}7 \text{ kN}$$

$$-25{,}6\ X_2 + 42{,}7X_2 + 432{,}5 = 0;\ X_2 = 6{,}71 \text{ kN}.$$

Diagrama de momente încovoietoare se obține sub forma $M = m_1X_1 + m_2X_2$ și este prezentată în fig. 12.38, *a*.

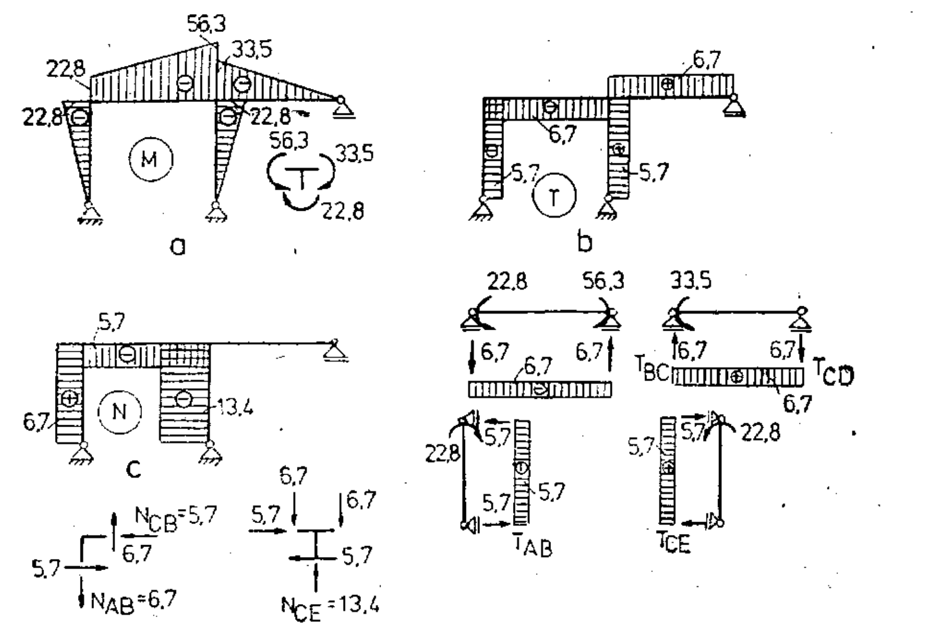


Fig. 12.38.

De remarcat absența termenului M_t^0, deoarece variația temperaturii nu produce eforturi la sistemele static determinate ci numai modificări ale configurației geometrice (deplasări). Se trasează în continuare diagramele T și N (fig. 12.38, *b, c*).

Aplicația 12.6. Să se traseze diagramele de eforturi M, T, N pentru cadrul din fig. 12.39, cînd se produce cedarea reazemului E cu valorile prezentate în figură (v. aplicația 12.5).

$$EI_0 = 2\cdot10^7\cdot1{,}6\cdot10^{-3} = 3{,}2\cdot10^4 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 ; \; G_{ns} = 2.$$

Sistemul de bază, necunoscutele suplimentare, diagramele de eforturi unitare și reacțiunile pentru situațiile auxiliare de încărcare sînt prezentate în cadrul aplicației 12.5 (v. fig. 12.36 și 12.37)

$$EI_0\delta_{11} = 83{,}67 ; \; EI_0\delta_{22} = 42{,}70 ; \; EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = -25{,}60.$$

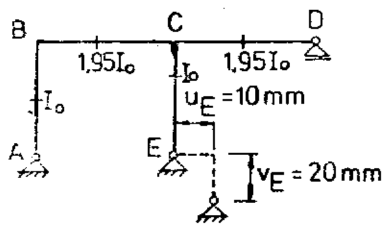


Fig. 12.39.

Se încarcă sistemul de bază cu $X_1 = 1$ și reacțiunile corespunzătoare (v. fig. 12.37, *a*). Lucrul mecanic efectuat de necunoscuta unitară și reacțiunile corespunzătoare r_1 parcurgînd deplasările reale date va fi

$$EI_0\Delta_{1\Delta_r} = -EI_0\Sigma r_1\cdot\Delta_r =$$

$$= -3{,}2\cdot10^4(-1\cdot0{,}01) = 320.$$

Se încarcă sistemul de bază cu $X_2 = 1$ și reacțiunile corespunzătoare (v. fig. 12.37, *b*). Lucrul mecanic efectuat de $X_2 = 1$ și reacțiunile r_2 parcurgînd deplasările reale date, va fi

$$EI_0\Delta_{2\Delta_r} = -EI_0\Sigma r_2\Delta_r = -3{,}2\cdot10^4(2\cdot0{,}02) = -1\,280.$$

Sistemul ecuațiilor de condiție este

$$83{,}67\,X_1 - 25{,}60\,X_2 + 320 = 0 ; \qquad X_1 = 6{,}63 \text{ kN}$$

$$-25{,}60\,X_1 + 42{,}70\,X_2 - 1\,280 = 0 ; \qquad X_2 = 33{,}9 \text{ kN}.$$

Diagrama de momente încovoietoare se obține sub forma $M = m_1X_1 + m_2X_2$ și este prezentată în fig. 12.40, *a*. Și în acest caz este de remarcat

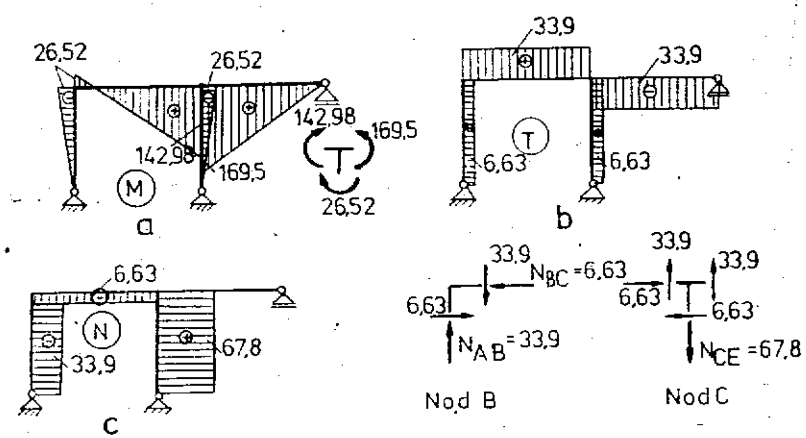


Fig. 12.40.

absența lui M^0; cedările de reazem nu produc eforturi la sisteme static determinate ci numai modificări ale configurației geometrice. Diagramele T și N sînt reprezentate în fig. 12.40, *b, c*.

Aplicația 12.7. Să se determine eforturile axiale în barele grinzii cu zăbrele din fig. 12.41, *a*

$$G_{ns} = (b + r) - 2n = (11 + 3) - 2\cdot6 = 2.$$

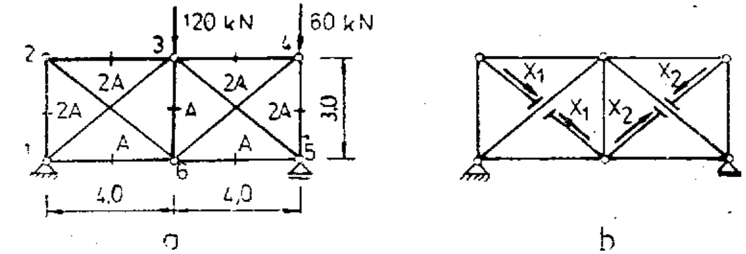


Fig. 12.41.

Sistemul este de două ori static nedeterminat. Sistemul de bază rezultă alegînd ca necunoscute eforturile în barele $2-6$ și $4-6$ (fig. 12.41, *b*).

Sistemul ecuațiilor de condiție va fi

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Datorită simetriei structurii se poate obține o descompunere a sistemului de ecuații în ecuații independente.

Sistemul de bază s-a obținut prin secționare de bare în poziție simetrică, deci necunoscutele apar și ele în poziție simetrică (v. fig. 12.41, *b*). Aceste necunoscute vor fi grupate la încărcare simetrică (fig. 12.42, *c*) și la încărcare antisimetrică (fig. 12.42, *f*). Această operație este efectuată în fig. 12.42, *a—f*.

$$Y_1^s = \frac{X_1 + X_2}{2} ; \quad Y_2^{as} = \frac{X_1 - X_2}{2}.$$

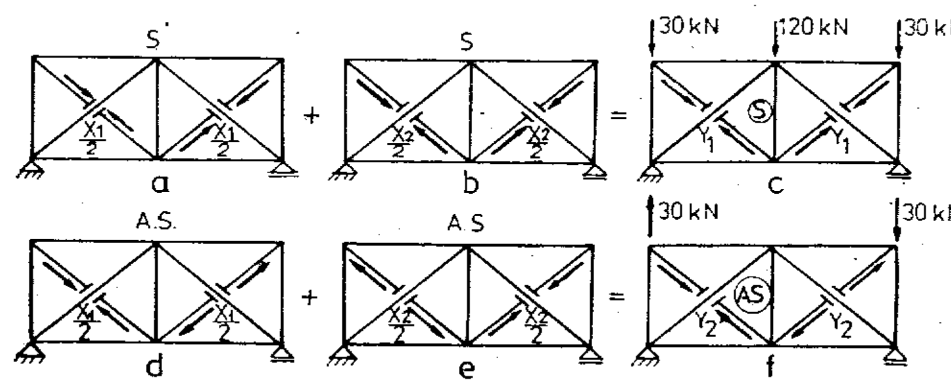


Fig. 12.42.

Încărcările exterioare au fost descompuse în componente simetrice şi antisimetrice, cărora le corespund diagrama N_p^0 simetrică, respectiv antisimetrică (fig. 12.43).

Se observă că în sistemul de bază s-au secţionat barele $2-6$ şi $4-6$ fără a le suprima. Cele două jumătăţi ale fiecărei bare astfel rezultate sînt mecanisme, însă forţele care le acţionează sînt în echilibru şi mecanismele rămîn în stare de repaus.

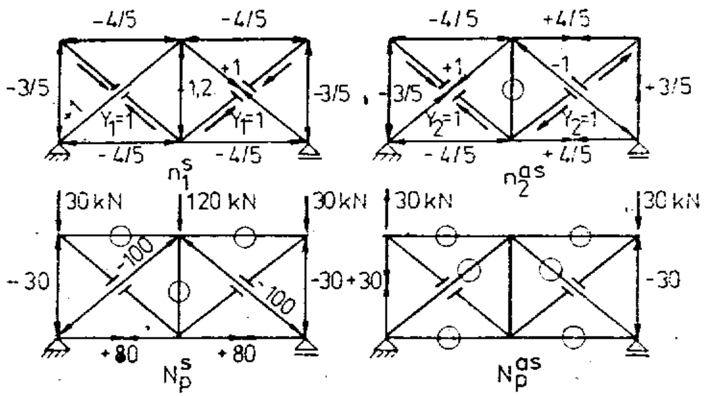


Fig. 12.43.

În calculul coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie se va ţine seama şi de influenţa forţelor axiale de-a lungul barelor secţionate.

În urma grupării necunoscutelor şi a descompunerii încărcărilor în componentele simetrice şi antisimetrice rezultă

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{n_1^s n_1^s}{EA} \mathrm{d}x \quad - \text{ numai din componenta simetrică ;}$$

$$EA\delta_{11} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot3\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot4\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot4\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot5\cdot1 + 1\cdot5\cdot1 + 1{,}2\cdot3\cdot1{,}2\right) = 33{,}08$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \Sigma \int \frac{n_1^s n_2^{as}}{EA} \mathrm{d}x \quad - \text{ se integrează o diagramă simetrică cu una antisimetrică ;}$$

$$\delta_{22} = \Sigma \int \frac{n_2^{as}\cdot n_2^{as}}{EA} \mathrm{d}x \quad - \text{ numai din componenta antisimetrică ;}$$

$$EA\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot3\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot4\cdot\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\cdot4\cdot\frac{4}{5} + 1\cdot5\cdot1 + 1\cdot5\cdot1\right) = 28{,}76$$

$$\Delta_{1p} = \Sigma \int \frac{n_1^0\cdot N_p^s}{EA} \mathrm{d}x \quad - \text{ numai din componenta simetrică ;}$$

$$EA\Delta_{1p} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot30\cdot3 - 100\cdot5\cdot1 - 80\cdot4\cdot\frac{4}{5}\right) = -1\,458$$

$$\Delta_{2p} = \Sigma \int \frac{n_2^{as} N_p^{as}}{EA} \mathrm{d}x \quad - \text{ numai din componenta antisimetrică ;}$$

$$EA\Delta_{2p} = -2\cdot\frac{1}{2}\cdot30\cdot\frac{3}{5}\cdot3 = -54.$$

Deci sistemul de ecuaţii s-a scindat în două ecuaţii independente :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad - \text{ provenind din componenta simetrică ;}$$

$$X_1 = \frac{1\,458}{33{,}08} = 44 \text{ kN}$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \quad - \text{ provenind din componenta antisimetrică}$$

$$X_2 = \frac{54}{28{,}76} = 1{,}87 \text{ kN}.$$

În vederea determinării diagramelor de eforturi axiale finale, se suprapun efectele pe sistemul de bază separat, pentru cele două componente, simetrică şi antisimetrică (fig. 12.44), urmînd a se aduna diagramele obţinute

$$N^s = N_p^s + n_1^s X_1 ; \quad N^{as} = N_p^{as} + n_2^{as} X_2 ; \quad N = N^s + N^{as}.$$

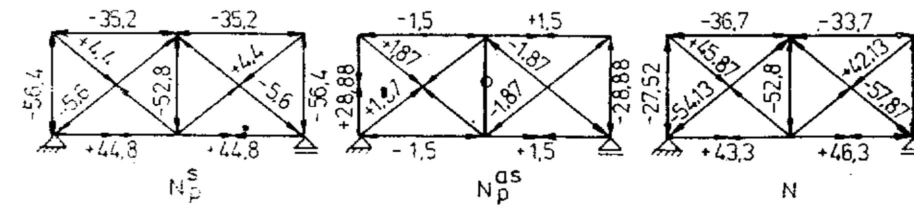


Fig. 12.44.

Aplicaţia 12.8. Să se determine diagramele de eforturi M, T, N utilizînd procedeul semistructurilor pentru structura din fig. 12.45, *a*.

Caracteristicile geometrice şi elastice ale elementelor cadrului sînt :

$$I_{st} = \frac{0{,}4\cdot0{,}4^3}{12} = 0{,}00213 \text{ m}^4 = I_0 ; \quad I_r = \frac{0{,}4\cdot0{,}6^3}{12} = 0{,}0072 \text{ m}^4 = 3{,}375\, I_0 ;$$

$$I_0/A_t = 0{,}68 \text{ m}^2.$$

Încărcarea dată se descompune într-un grup simetric şi unul antisimetric. Structura avînd simetrie elastică şi de rezemare poate fi tratată în continuare prin procedeul semistructurilor.

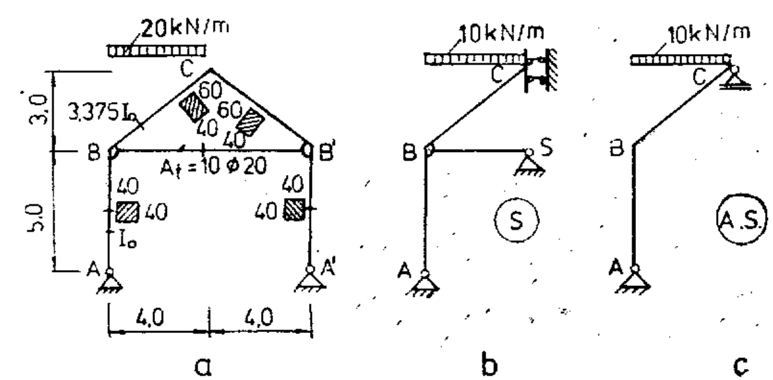


Fig. 12.45.

Semistructura corespunzătoare unei încărcări simetrice este prezentată în **fig.** 12.45, *b*, iar cea corespunzătoare unei încărcări antisimetrice în fig. 12.45, *c*.

1) Rezolvarea semistructurii pentru încărcarea simetrică

$$G_{ns} = 3\cdot 2 - (3\cdot 1 + 1) = 2.$$

Trecerea la sistemul de bază se face prin introducerea unor articulații în nodurile B și C; momentele încovoietoare din aceste secțiuni devin necunoscutele suplimentare X_1 și X_2 (fig. 12.46, *a*).

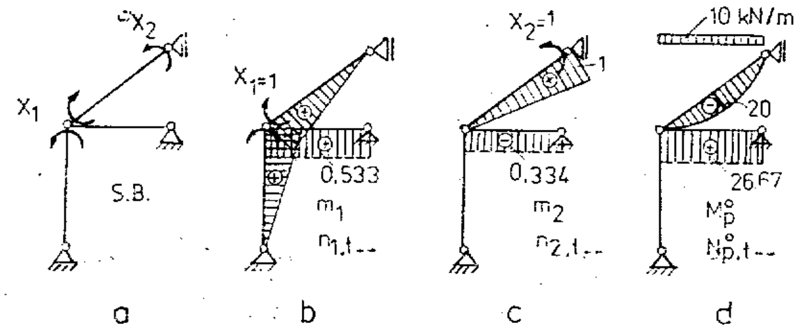


Fig. 12.46.

Diagramele m_1, n_1, m_2, n_2 sînt prezentate în fig. 12.46, *d* și *c* iar diagramele M_p^0 și N_p^0 sînt trasate în fig. 12.46, *d*.

În calculul deplasărilor elastice se ține seama și de influența forțelor axiale numai în tirantul $B-S$, motiv pentru care diagramele de eforturi axiale au fost trasate numai pe acesta.

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

$$EI_0\delta_{11} = \Sigma\int \frac{I_0}{I_x} m_1^2\,dx + \int \frac{I_0}{A_t} n_1^2\,dx = \frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3{,}375}\cdot\frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 +$$
$$+ 0{,}68\cdot 0{,}533\cdot 4\cdot 0{,}533 = 3{,}049$$

$$EI_0\delta_{12} = EI_0\delta_{21} = \Sigma\int \frac{I_0}{I_x} m_1 m_2\,dx + \int \frac{I_0}{A_t} n_1 n_2\,dx = \frac{1}{3{,}375}\cdot\frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 -$$
$$-0{,}68\cdot 0{,}533\cdot 4\cdot 0{,}334 = -0{,}238$$

$$EI_0\delta_{22} = \Sigma\int \frac{I_0}{I_x} m_2^2\,dx + \int \frac{I_0}{A_t} n_2^2\,dx = \frac{1}{3{,}375}\cdot\frac{1\cdot 5}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 +$$
$$+ 0{,}68\cdot 0{,}334\cdot 4\cdot 0{,}334 = 0{,}797$$

$$EI_0\Delta_{1p} = \Sigma\int \frac{I_0}{I_x} m_1 M_p^0\,dx + \int \frac{I_0}{A_t} n_1 N_p^0\,dx = \frac{1}{3{,}375}\cdot\frac{2}{3}\cdot 20\cdot 5\cdot\frac{1}{2} +$$
$$+ 0{,}68\cdot 26{,}67\cdot 4\cdot 0{,}533 = 48{,}58$$

$$EI_0\Delta_{2p} = \Sigma\int \frac{I_0}{I_x} m_2 M_p^0\,dx + \int \frac{I_0}{A_t} n_2 N_p^0\,dx = \frac{1}{3{,}375}\cdot\frac{2}{3}\cdot 20\cdot 5\cdot\frac{1}{2} -$$
$$- 0{,}68\cdot 26{,}67\cdot 4\cdot 0{,}334 = -14{,}32$$

$$3{,}049X_1 - 0{,}238X_2 + 48{,}58 = 0$$
$$-0{,}238X_1 + 0{,}797X_2 - 14{,}32 = 0$$
$$X_1 = -15;\ X_2 = 13{,}5.$$

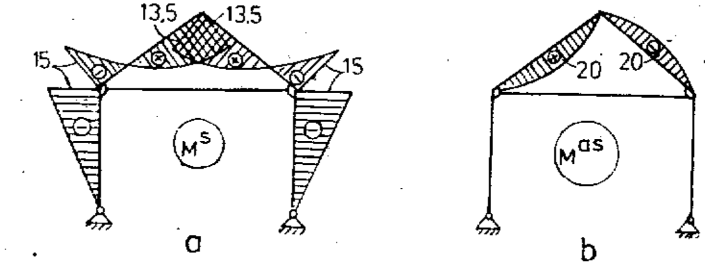


Fig. 12.47.

Cu aceste valori ale necunoscutelor se trasează, prin suprapunere, diagrama de momente încovoietoare pe semistructură, urmînd ca prin simetrie să se traseze pe întreaga structură (fig. 12.47, *a*).

2) Rezolvarea semistructurii pentru încărcare antisimetrică

$$G_{ns} = 3\cdot 1 - (1\cdot 1 + 1\cdot 2) = 0.$$

Structura este static determinată. Diagrama de momente încovoietoare pentru încărcarea antisimetrică este trasată în fig. 12.47, *b* pentru structura completă.

Diagrama de momente încovoietoare finală se obține sub forma (fig. 12.48, *a*)

$$M = M^s + M^{as}.$$

Diagramele T și N sînt date în fig. 12.48, *b*, *c*.

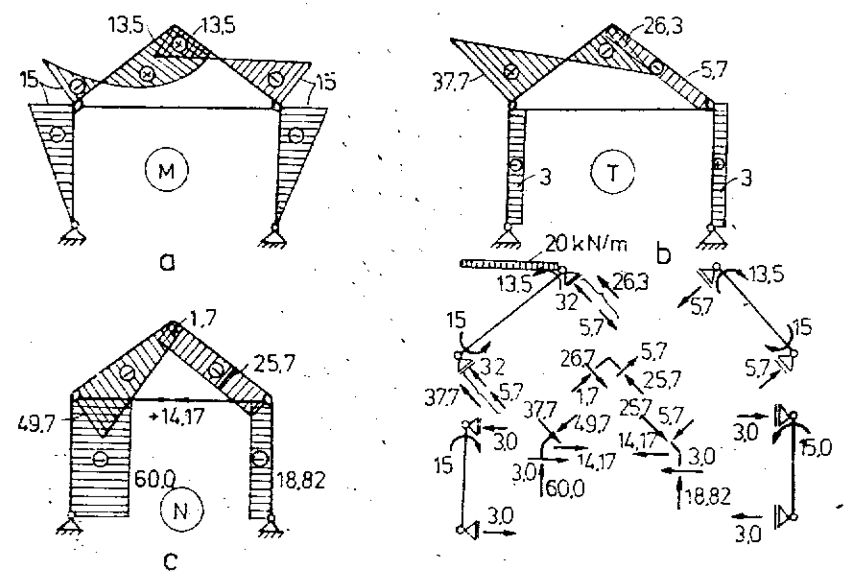


Fig. 12.48.

Aplicația 12.9. Să se traseze diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul din fig. 12.49, *a*, utilizîndu-se procedeul semistructurilor (fig. 12.49, *b*, *c*).

Se va face o verificare a diagramei M, și se va calcula deplasarea pe orizontală a nodului C.

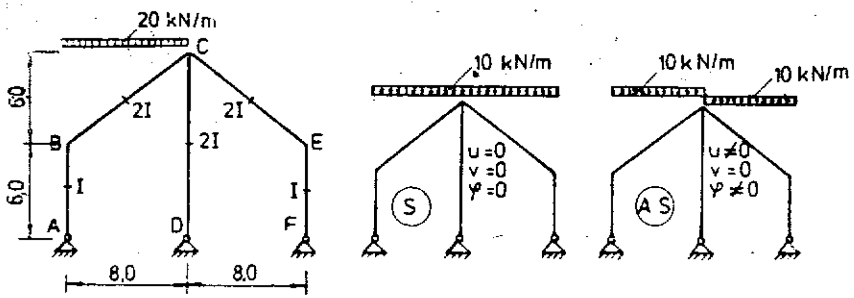


Fig. 12.49.

1) Rezolvarea semistructurii pentru încărcarea simetrică (fig. 12.50, $a-c$).

$$G_{ns} = 3 \cdot 1 - (1 \cdot 1) = 2$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

$$EI\delta_{11} = \frac{1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 3{,}667;\ EI\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 1{,}667$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 0{,}833;\ EI\Delta_{1p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 133{,}3$$

$$EI\Delta_{2p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 133{,}3$$

$$3{,}667X_1 + 0{,}833X_2 + 133{,}3 = 0$$

$$0{,}833X_1 + 1{,}667X_2 + 133{,}3 = 0$$

$$X_1 = -20{,}5\ \text{kN}\cdot\text{m};\ X_2 = -69{,}7\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

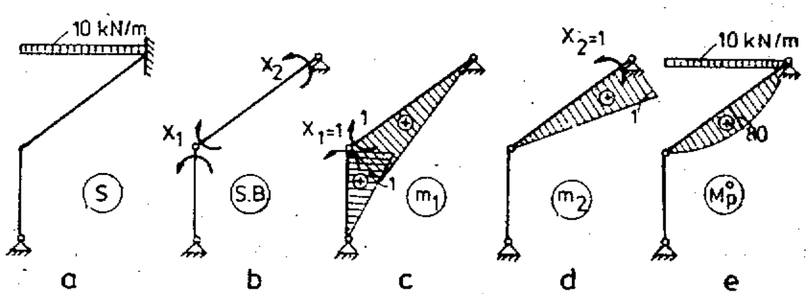


Fig. 12.50.

Suprapunînd efectele pe sistemul de bază se obține diagrama M din componenta simetrică a încărcării (fig. 12.51)

$$M^s = M_p^{0s} + m_1X_1 + m_2X_2.$$

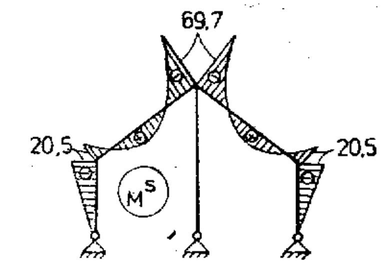


Fig. 12.51.

2) Rezolvarea semistructurii pentru încărcarea antisimetrică (fig. 12.52, $a-d$)

$$G_{ns} = 3 \cdot 1 - (2 \cdot 1) = 1.$$

Ecuația de condiție este $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$

$$EI\delta_{11} = \frac{0{,}5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}5 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{0{,}5 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5\right) + \frac{1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 7{,}415$$

$$EI\Delta_{1p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}(0.5 + 1) = 200$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{200}{7{,}415} = -27\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

Suprapunînd efectele pe sistemul de bază se obține diagrama M din componenta antisimetrică a încărcării (fig. 12.53, a).

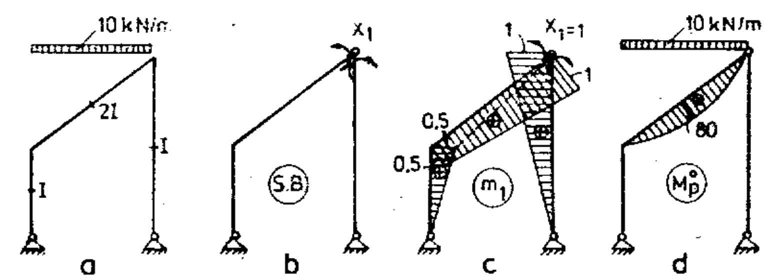


Fig. 12.52.

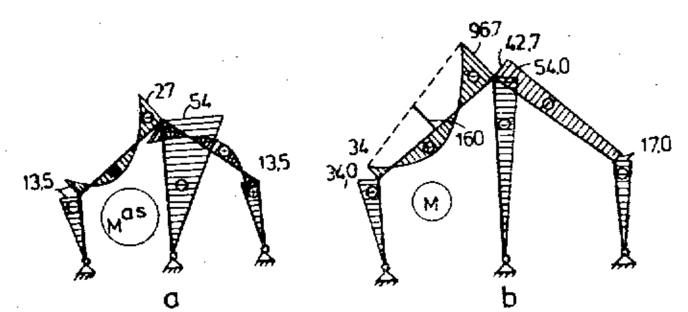


Fig. 12.53.

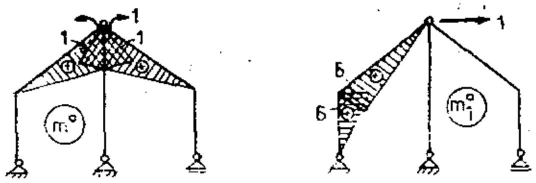


Fig. 12.54.

Diagrama finală de momente încovoietoare se obține sub forma (fig. 12.53, *b*)

$$M = M^s + M^{as}.$$

Verificarea diagramei M finale se obține calculînd rotirea relativă a secțiunilor de capăt ale riglelor ce converg în nodul C; în sistemul real această rotire este nulă. Diagrama auxiliară m^0 este trasată pe un sistem static determinat (fig. 12.54, *a*).

$$EI\varphi_C^{rel} = \frac{1}{2}\left(-\frac{34\cdot1\cdot10}{6} - \frac{96{,}7\cdot1\cdot10}{3} + \frac{2}{3}\cdot160\cdot10\cdot\frac{1}{2}\cdot1 - \right.$$

$$\left. - \frac{54\cdot1\cdot10}{3} - \frac{17\cdot1\cdot10}{6}\right) \approx 0.$$

Pentru calculul deplasării elastice u_c se utilizează o diagramă auxiliară m_1 (fig. 12.54, *b*)

$$EIu_c = \sum\int\frac{I}{I^x}m_1^0M\,dx = \frac{34\cdot6\cdot6}{3} + \frac{1}{2}\left(-\frac{34\cdot6\cdot10}{3} - \frac{96{,}7\cdot6\cdot10}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\cdot160\cdot10\cdot\frac{1}{2}\cdot6\right) = 370;\ u_c = \frac{370}{EI}.$$

13. Metoda generală a deplasărilor

13.1. CARACTERIZAREA GEOMETRICĂ A STRUCTURILOR. CADRE CU NODURI FIXE. CADRE CU NODURI DEPLASABILE

Caracterizarea structurilor din punct de vedere geometric se referă la stabilirea numărului de parametri independenți care definesc poziția deformată sub acțiunea încărcărilor. Structurile alcătuite din bare solicitate predominant la încovoiere și legate între ele în noduri rigide sînt denumite cadre. Datorită rigidității nodurilor, unghiurile dintre tangentele la axele barelor în nod se păstrează și după deformare, toate capetele de bare într-un nod avînd aceleași deplasări ca și nodul. Poziția deformată a unui cadru va fi deci precizată prin deplasările nodurilor care pot fi de două tipuri : rotiri și translații. Structurile la care aceste deplasări sînt necunoscute sînt geometric nedeterminate. Astfel, pentru definirea poziției deformate a cadrului din fig. 13.1 sînt necesare rotirile celor două noduri (φ_1 și φ_2) și translația nodurilor (u).

Din punctul de vedere al deplasărilor pe care le suferă nodurile, cadrele sînt de două tipuri : cadre cu noduri fixe la care nodurile pot avea numai rotiri și cadre cu noduri deplasabile la care nodurile pot avea rotiri și translații. Pentru a stabili dacă un cadru este cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile, se studiază invariabilitatea sistemului auxiliar obținut din structura reală prin articularea tuturor nodurilor și încastrărilor. Invariabilitatea sistemului de bare articulate astfel obținut se studiază cu relația care dă numărul gradelor de libertate la sisteme de bare articulate

$$G_l = 2n - (b + r) \qquad (13.1)$$

unde : n reprezintă numărul de noduri ; b — numărul de bare și r — numărul de legături simple la teren.

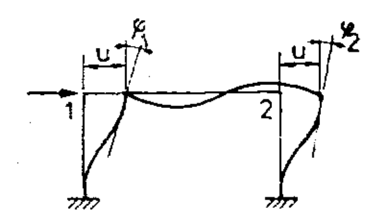


Fig. 13.1.

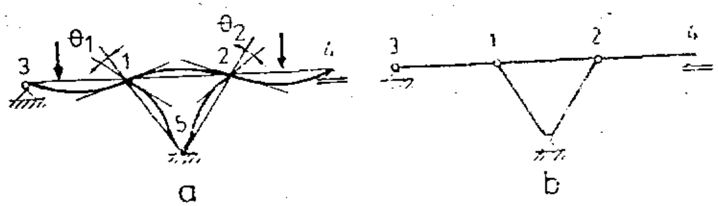


Fig. 13.2.

Dacă sistemul auxiliar calculat este invariabil geometric, $G_l \leq 0$, cadrul este cu noduri fixe. Astfel, cadrul din fig. 13.2, *a* este un cadru cu noduri fixe deoarece sistemul articulat corespunzător (fig. 13.2, *b*) are $G_l = 2\cdot5 - (5\cdot5) = 0$.

Dacă sistemul articulat este mecanism, $G_l > 0$, cadrul este cu noduri deplasabile, deoarece nodurile nu sînt fixate printr-un număr suficient de bare. Astfel, cadrul din fig. 13.3, *a* este un cadru cu noduri deplasabile nodurile avînd și translații (u) în afară de rotiri (φ); sistemul auxiliar articulat (fig. 13.3, *c*) este mecanism $G_l = 2\cdot5 - (4+5) = +1$.

Se observă din fig. 13.3, *b* că se pot înlocui consolele, care sînt static determinate, cu efectul lor asupra nodului

$$M = \frac{pc^2}{2}; \quad P = pc \qquad (13.2)$$

deci ele nu intervin la stabilirea tipului cadrului.

La cadre cu noduri deplasabile nu toate translațiile nodurilor sînt independente, deoarece nodurile sînt legate prin bare la care se neglijează variația lungimii datorită deformării (deplasările nodurilor datorită deformării elastice a structurii sînt foarte mici în raport cu lungimea barelor).

Astfel, cadrul din fig. 13.4, *a* este cadru cu noduri deplasabile, sistemul auxiliar articulat (fig. 13.4, *b*) avînd două grade de libertate, $G_l = 2\cdot5 - (4+4) = 2$, care pot fi anulate prin adăugarea a doi penduli *a* și *b*. Pentru

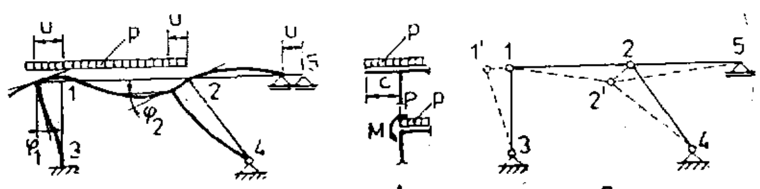


Fig. 13.3.

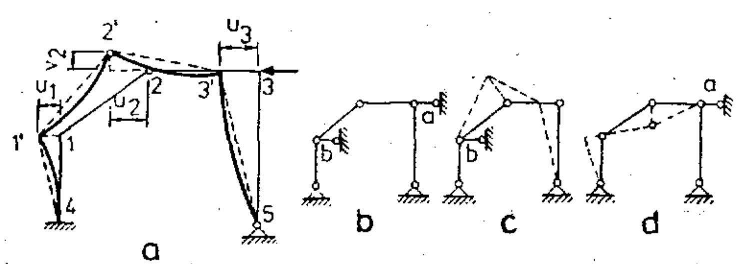


Fig. 13.4.

definirea deformatei elastice a cadrului din fig. 13.4, *a* ar fi necesare șase translații (cîte două pentru fiecare nod), din care patru pot fi exprimate în funcție de celelalte două ținînd seama că lungimile celor patru bare nu variază prin deformare (în figură axele punctate care leagă nodurile deplasate). Deci, din cele șase necunoscute translații rămîn numai două independente, adică un număr egal cu numărul gradelor de libertate cinematică ale sistemului auxiliar articulat. În fig. 13.4, *a*, se vede că translațiile nodurilor au ca efect rotiri de bare și deci necunoscutele translații de noduri pot fi înlocuite cu necunoscute rotiri de bare. Forma poziției rotite a barelor după deformare (liniile întrerupte care unesc nodurile deplasate) este asemănătoare cu poziția barelor obținute prin suprapunerea liniară a rotirilor barelor corespunzătoare fiecărui grad de libertate cinematic separat (fig. 13.4, *c* și *d*) pe sistemul articulat. Acestor grade de libertate cinematică pe mecanismul corespunzător le corespund pe cadrul real grade de libertate elastice, pentru care poziția rotită a barelor are aceeași formă dar corespunde la deplasări elastice, barele încovoindu-se. Din cele arătate rezultă că translațiile independente ale nodurilor sînt echivalente cu gradele de libertate elastică ale cadrului.

În concluzie, numărul parametrilor independenți, care definesc geometric poziția deformată, este egal cu numărul nodurilor rigide și al gradelor de libertate elastice.

13.2. CONVENȚIA DE SEMNE

Deoarece în această metodă necunoscutele sînt rotiri de noduri și rotiri de bare (grade de libertate), este necesară o nouă convenție de semne care să fie aceeași pentru rotiri și momente la capetele barelor. În această convenție se consideră pozitive atît rotirile cît și momentele care au sens orar. Pentru cadrul din fig. 13.5, *a*, corespunzător deformatei, rotirea nodului φ_1 și rotirea barei ψ_{13} fiind orare sînt pozitive.

În convenția clasică de semne, perechea de momente de la un capăt al unei bare, care reprezenta efectul de continuitate din secțiune, avea același semn în funcție de fibra întinsă față de sensul axei barei. În noua convenție, momentele unei perechi fiind de sens contrar, vor avea semne diferite. În fig. 13.5, *c* sînt reprezentate semnele în noua convenție pentru momentele încovoietoare de capăt care acționează atît pe bară cît și pe nod. Deoarece în noua convenție momentele de capăt care acționează pe bară și nod au semne diferite, în calcule se va lucra cu momentele aplicate pe bare. Noua convenție nu modifică reprezentarea diagramei de momente, care se va face tot pe partea fibrei întinse.

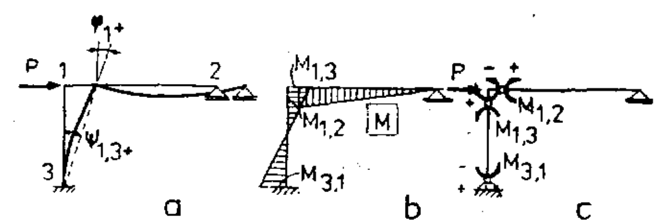


Fig. 13.5.

13.3. NECUNOSCUTE. SISTEM DE BAZĂ

Pentru determinarea deformatei unei structuri şi, pe baza ei, a diagramelor de eforturi, este necesară cunoaşterea deplasărilor nodurilor care devin astfel necunoscutele problemei. În metoda deplasărilor, necunoscutele sînt deci deplasările distincte ale nodurilor:

— necunoscute rotiri de noduri notate cu Z_1, Z_2, ..., egale ca număr cu numărul nodurilor rigide;

— necunoscute grade de libertate elastice ale structurii, care caracterizează translaţiile nodurilor, notate cu Z_a, Z_b, ..., egale ca număr cu numărul gradelor de libertate cinematică ale sistemului auxiliar articulat.

Sistemul de bază în metoda deplasărilor, sistem la care necunoscutele sînt nule, se obţine prin adăugare de legături care să blocheze deplasările distincte ale nodurilor, şi anume:

— încastrări suplimentare care să blocheze rotirile nodurilor rigide şi în care apar numai reacţiuni-momente;

— legături simple suplimentare (penduli) care să blocheze gradele de libertate elastică ale structurii; pendulii trebuie astfel aşezaţi încît să blocheze toate translaţiile nodurilor.

În fig. 13.6 sînt date cîteva exemple de sisteme de bază în metoda deplasărilor. Sistemul de bază din fig. 13.6, *a* comportă adăugarea a 4 încastrări suplimentare care să blocheze cele 4 necunoscute rotiri de noduri (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) şi 2 penduli (*a* şi *b*) care să blocheze cele două necunoscute grade de libertate elastică. La fel, sistemul de bază din fig. 13.6, *b* s-a obţinut prin adăugarea a 4 încastrări suplimentare şi 3 penduli. Pentru cadrul din fig. 13.6, *c*, în stabilirea numărului de necunoscute grade de libertate elastice şi deci a *numărului de penduli* (*a* şi *b*) care să le blocheze nu s-a ţinut seama de tirantul elastic. Pentru cadrul cu bare curbe din fig. 13.6, *d* s-a adăugat şi cîte un pendul care să blocheze gradul de libertate elastică adus de fiecare bară curbă.

Sistemul de bază în metoda deplasărilor, avînd toate deplasările distincte ale nodurilor blocate, este un sistem geometric determinat. El este alcătuit din bare care pot fi considerate ca independente deoarece sînt încastrate perfect la noduri şi a căror rezolvare este cunoscută pe baza metodei eforturilor. Sistemul de bază prezintă deci două tipuri de bare, bare dublu încastrate şi bare încastrate la un capăt şi articulate sau simplu rezemate la celălalt capăt. În cazul rezolvării prin semistructuri a structurilor simetrice încărcate simetric poate apărea şi bara în care axa de simetrie a structurii are încastrarea cu translaţie (ghidaj).

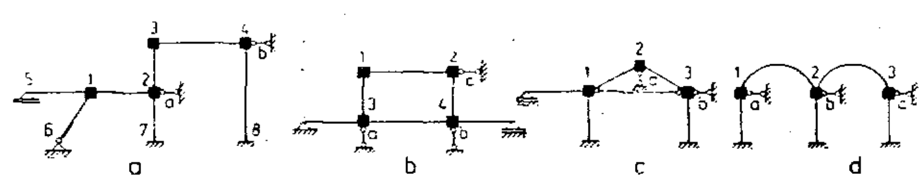


Fig. 13.6.

13.4. ECUAŢIILE DE CONDIŢIE ÎN METODA DEPLASĂRILOR

Echilibrul elastic al unei structuri este caracterizat prin condiţii de echilibru static şi prin condiţii de compatibilitate (continuitate) a deformatei. În metoda deplasărilor, *ultimele sînt îndeplinite prin faptul că barele*, fiind legate rigid în noduri, toate capetele de bară de la un nod vor avea aceleaşi deplasări ca şi nodul. Rezultă că ecuaţiile de condiţie în metoda deplasărilor sînt ecuaţii de echilibru static şi vor fi stabilite pe baza comportării identice dintre structura reală şi sistemul de bază încărcat cu deplasările reale ale nodurilor (rotiri şi translaţii sau grade de libertate elastice) şi încărcări date (forţe, variaţii de temperatură sau cedări de reazeme). Reacţiunile în blocaje din toate aceste încărcări trebuie să fie nule, deoarece în structura reală nodurile se pot deplasa (nu există blocaje). Se obţine astfel un număr de ecuaţii egal cu numărul de necunoscute. Corespunzător celor două tipuri de legături adăugate, blocarea nodurilor la rotiri în care apar din fiecare încărcare reacţiuni-momente şi blocarea gradelor de libertate elastice prin penduli în care apar reacţiuni-forţe, se vor obţine două tipuri de ecuaţii:

— ecuaţii care exprimă că reacţiunea-moment în blocajul oricărui nod la rotire din încărcarea sistemului de bază cu deplasările reale ale nodurilor şi încărcările date este nulă ($R_i = 0$);

— ecuaţii care exprimă că reacţiunea-forţă în blocajul oricărui grad de libertate elastică *b* din încărcarea sistemului de bază cu deplasările reale ale nodurilor şi încărcările date este nulă ($R_b = 0$).

Stabilirea formei acestor ecuaţii se poate urmări mai clar pe exemplul din fig. 13.7, *a*, care are cinci necunoscute, trei necunoscute rotiri de noduri (Z_1, Z_2, Z_3) şi două necunoscute grade de libertate (Z_a, Z_b).

Din încărcarea sistemului de bază din fig. 13.7, *b* cu deplasările nodurilor, în legăturile suplimentare se obţin reacţiuni proporţionale cu aceste deplasări arătate în fig. 13.7, *c*–*g*, iar din acţiunea cu încărcările date se obţin reac-

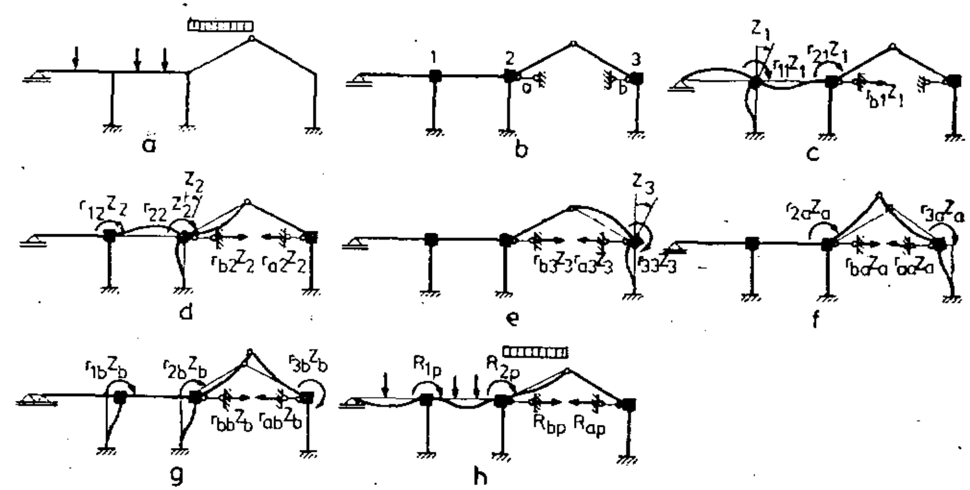


Fig. 13.7.

țiunile din fig. 13.7, *h*. Suprapunînd efectele, se obțin ecuațiile de condiție sub forma

$$\begin{aligned} R_1 &= r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + 0 + 0 + r_{1b}Z_b + R_{1p} = 0 \\ R_2 &= r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + 0 + r_{2a}Z_a + r_{2b}Z_b + R_{2p} = 0 \\ R_3 &= 0 + 0 + r_{33}Z_3 + r_{3a}Z_a + r_{3b}Z_b + R_{3p} = 0 \\ R_a &= 0 + r_{a2}Z_2 + r_{a3}Z_3 + r_{aa}Z_a + r_{ab}Z_b + R_{ap} = 0 \\ R_b &= r_{b1}Z_1 + r_{b2}Z_2 + r_{b3}Z_3 + r_{ba}Z_a + r_{bb}Z_b + R_{bp} = 0. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Generalizînd, pentru o structură oarecare, ecuațiile de condiție în metoda deplasărilor sînt de forma

$$\begin{aligned} &(1)\ r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1i}Z_i + \ldots + r_{1a}Z_a + r_{1b}Z_b + \ldots + R_{10} = 0 \\ &(2)\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{2i}Z_i + \ldots + r_{2a}Z_a + r_{2b}Z_b + \ldots + R_{20} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{i)}\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \ldots + r_{ii}Z_i + \ldots + r_{ia}Z_a + r_{ib}Z_b + \ldots + R_{i0} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(a)\ r_{a1}Z_1 + r_{a2}Z_2 + \ldots + r_{ai}Z_i + \ldots + r_{aa}Z_a + r_{ab}Z_b + \ldots + R_{a0} = 0 \\ &(b)\ r_{b1}Z_1 + r_{b2}Z_2 + \ldots + r_{bi}Z_i + \ldots + r_{ba}Z_a + r_{bb}Z_b + \ldots + R_{b0} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{13.4}$$

Aceste ecuații de echilibru pot fi interpretate și pe baza principiului lucrului mecanic virtual (prin înmulțirea ecuației cu o deplasare cinematică unitară), astfel :

— ecuația (i) arată că lucrul mecanic efectuat de momentele care apar în jurul nodului i din încărcarea sistemului de bază cu deplasările elastice $Z_1, Z_2, \ldots, Z_a, Z_b, \ldots$ și încărcările date prin deplasarea virtuală cinematică $Z_i = 1$ este nul ;

— ecuația (b) arată că, lucrul mecanic efectuat de momentele și forțele care apar în legăturile suplimentare din încărcarea sistemului de bază cu deplasările elastice $Z_1, Z_2, \ldots, Z_a, Z_b, \ldots$ și încărcările date, prin deplasarea virtuală cinematică (pe sistemul auxiliar articulat) $Z_b = 1$, este nul. Deplasarea Z_b corespunzătoare gradului de libertate b poate fi sau o translație de nod sau o rotire de bară, efectul fiind același.

Semnificația termenilor care intervin în ecuațiile de condiție rezultă prin particularizări pe baza semnificației ecuațiilor :

— coeficienții r_{ij} reprezintă reacțiunea-moment ce se dezvoltă în încastrarea suplimentară i din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică unitară $Z_j = 1$ sau lucrul mecanic efectuat prin deplasarea cinematică unitară $Z_i = 1$ de momentele care apar în blocajul i din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică unitară $Z_j = 1$;

— coeficienții de tip r_{ib} reprezintă reacțiunea-moment ce apare în încastrarea suplimentară i din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea unitară $Z_b = 1$ corespunzătoare gradului de libertate b, sau lucrul mecanic efectuat prin deplasarea cinematică unitară $Z_i = 1$ de momentele care apar în blocajul i din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică unitară $Z_b = 1$ corespunzătoare gradului de libertate b ;

— coeficienții de tip r_{ab} reprezintă reacțiunea-forță ce apare în pendulul suplimentar a din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică unitară $Z_b = 1$, sau lucrul mecanic efectuat prin deplasarea cinematică $Z_a = 1$ de momentele care apar la capetele barelor din încărcarea sistemului de bază cu deplasarea elastică $Z_b = 1$;

— termenii liberi de tip R_{i0} reprezintă reacțiunea-moment ce se dezvoltă în încastrarea suplimentară i din încărcarea sistemului de bază cu încărcările date (forțe R_{ip}, variații de temperatură R_{it} sau cedări de reazeme $R_{i\Delta r}$), sau lucrul mecanic efectuat prin deplasarea cinematică $Z_i = 1$ de momentele care apar în blocajul i din încărcarea sistemului de bază cu încărcările date ;

— termenii liberi de tip R_{b0} reprezintă reacțiunea-forță ce apare în pendulul suplimentar b din încărcarea sistemului de bază cu încărcările date (forțe R_{bp}, variații de temperatură R_{bt}, cedări de reazeme $R_{b\Delta r}$), sau lucrul mecanic efectuat prin deplasarea cinematică $Z_b = 1$ de momentele care apar la capetele barelor din încărcarea sistemului de bază cu încărcările date.

Coeficienții secundari din sistemul ecuațiilor de condiție au valori simetrice față de diagonala principală, deoarece pe baza teoremei reciprocității forțelor din deplasări unitare (Maxwell) rezultă

$$r_{ij} = r_{ji}\ ;\ r_{ia} = r_{ai}\ ;\ r_{ab} = r_{ba}.$$

Pentru cadre cu noduri fixe, ecuațiile se vor reduce corespunzător conținînd numai necunoscute rotiri de noduri.

13.5. RELAȚII FUNDAMENTALE ÎNTRE MOMENTELE DE CAPĂT, DEPLASĂRILE SECȚIUNILOR DE CAPĂT ȘI ÎNCĂRCĂRILE DATE

Deoarece în metoda deplasărilor se determină mai întîi deplasările distincte ale nodurilor care definesc deformata structurii, pentru determinarea diagramelor de momente sînt necesare relații care să exprime momentele încovoietoare de la capetele barelor în funcție de deplasările secțiunilor de la capetele barelor (deplasările nodurilor) și încărcări. Aceste momente se obțin prin suprapunerea momentelor obținute pe sistemul de bază din încărcarea acestuia cu încărcările date și cu deplasările reale rotiri de noduri și grade de libertate elastice care fac ca deformata sistemului de bază să coincidă cu deformata structurii reale. Barele sistemului de bază avînd legături perfecte la capete (nodurile fiind complet blocate) sînt static nedeterminate și vor fi rezolvate la încărcările specificate mai înainte prin metoda eforturilor.

Momentele încovoietoare de la capetele barelor sistemului de bază din încărcările date se numesc momente de încastrare perfectă (pentru că deplasările nodurilor sînt complet blocate) fiind notate cu $\mathcal{M}$ și vor fi analizate într-un paragraf ulterior.

Deplasările reale, rotiri de noduri și grade de libertate elastice (rotiri de bare), fiind necunoscute, se vor încărca barele sistemului de bază cu deplasări unitare. În continuare, se prezintă determinarea momentelor de capăt prin metoda eforturilor pentru barele tip ale sistemului de bază din încărcări cu rotiri unitare ale secțiunilor de capăt și cu rotiri unitare de bare.

Bara dublu încastrată. Se examinează separat influența celor două tipuri de rotiri.

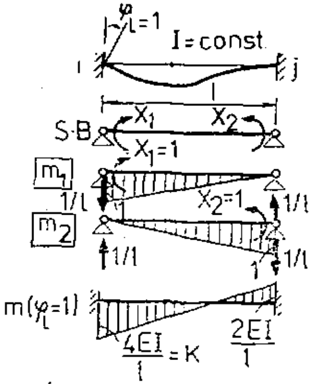


Fig. 13.8.

Încărcarea cu rotire de nod. Se consideră o bară dublu încastrată de secțiune constantă I și lungime l, încărcată cu rotirea capătului i, cu $\varphi_i = 1$ ca o cedare de reazem. În fig. 13.8 este arătat sistemul de bază, diagramele din necunoscute unitare și diagrama finală $m(\varphi_i = 1)$ care se obțin prin metoda eforturilor.

Coeficienții din ecuațiile de condiție vor fi

$$EI\delta_{11} = \frac{l}{3};\ EI\delta_{22} = \frac{l}{3};\ EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{l}{6}.$$

Termenii liberi provin din încărcarea cu rotirea nodului ca la cedări de reazeme

$$\Delta_{ir} = -\sum \bar{r}_i \Delta_r;\ \Delta_{1r} = -(1\cdot 1) = -1;\ \Delta_{2r} = 0.$$

Ecuațiile de condiție vor fi

$$\begin{aligned} &\frac{l}{3}X_1 + \frac{l}{6}X_2 - 1\cdot EI = 0 \\ &\frac{l}{6}X_1 + \frac{l}{3}X_2 = 0 \end{aligned} \qquad (13.5)$$

din care rezultă necunoscutele $X_1 = 4EI/l$ și $X_2 = -2EI/l$ pe baza cărora rezultă diagrama finală $m(\varphi_1 = 1)$ în care necunoscutele sînt chiar momentele de la capete.

Procedînd analog pentru o rotire unitară în celălalt capăt, $\varphi_j = 1$, se obțin momentele reprezentate în fig. 13.9.

Valoarea momentului care apare într-un capăt al barei dintr-o rotire unitară dată în acest capăt poartă numele de *rigiditatea barei la încovoiere* din rotire unitară de nod. Pentru bara dublu încastrată, această rigiditate este $K_{ij} = 4EI/l$.

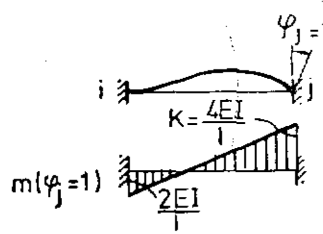


Fig. 13.9.

Încărcarea cu rotire de bară. Se dă barei o rotire orară $\psi_{ij} = 1$ căreia îi corespunde o deplasare a capătului j cu $\Delta_j = l$. Luînd ca sistem de bază tot baza dublu articulată, termenii liberi din ecuațiile de condiție vor fi:

$$\Delta_{ir} = -\left(-\frac{1}{l}\cdot l\right) = 1;\ \Delta_{2r} = -\left(+\frac{1}{l}\cdot l\right) = -1.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} &\frac{l}{3}X_1 + \frac{l}{6}X_2 + 1\cdot EI = 0 \\ &\frac{l}{6}X_1 + \frac{l}{3}X_2 - 1\cdot EI = 0 \end{aligned} \qquad (13.6)$$

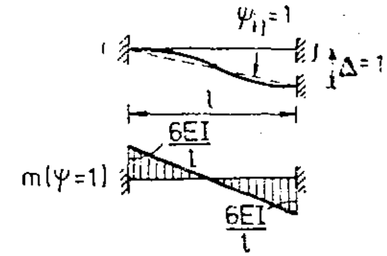


Fig. 13.10.

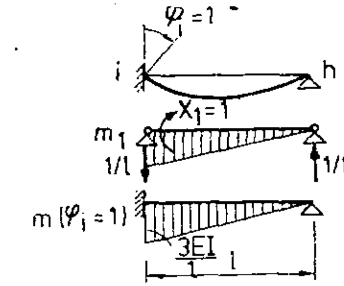


Fig. 13.11.

se obțin valorile momentelor de capăt $X_1 = -6EI/l$ și $X_2 = +6EI/l$, în convenția de semne clasică cu ajutorul cărora a rezultat diagrama $m(\psi = 1)$ din fig. 13.10. Cele două momente de capăt sînt egale cu $K'_{ij} = 6EI/l = (3/2)K_{ij}$.

Bara încastrată și articulată. Se examinează influența celor două tipuri de rotiri.

Încărcarea cu rotire de nod: Bara încastrată și articulată sau simplu rezemată se încarcă cu rotirea de capăt $\varphi_i = 1$ (fig. 13.11). Rezolvind prin metoda eforturilor se obține

$$EI\delta_{11} = \frac{l}{3};\ \Delta_{1r} = -(1\cdot 1) = -1$$

$$\frac{l}{3}X_1 - 1\cdot EI = 0;\ X_1 = \frac{3EI}{l}.$$

Valoarea momentului în încastrare dintr-o rotire unitară a acesteia $K_{ih} = 3EI/l$ se numește *rigiditatea barei încastrate și articulate la încovoiere.*

Încărcarea cu rotire de bară. Încărcînd bara cu rotirea de bară $\psi_{ih} = 1$, se obține diagrama de momente $m(\psi = 1)$ din fig. 13.12

$$EI\delta_{11} = \frac{l}{3};\ \Delta_{1r} = -\left(-\frac{1}{l}\cdot l\right) = +1$$

$$\frac{l}{3}X_1 + EI = 0;\ X_1 = -\frac{3EI}{l}.$$

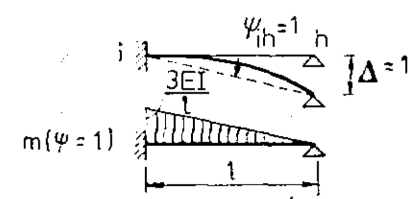


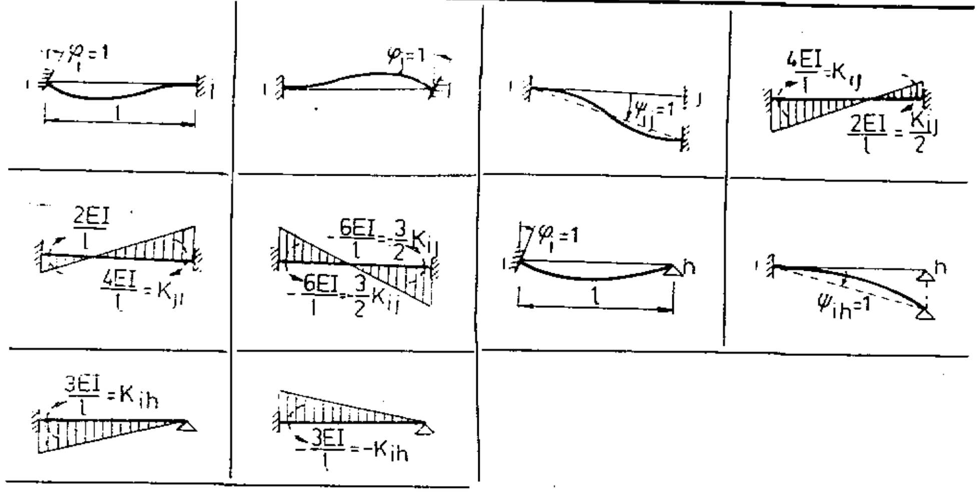
Fig. 13.12.

În tabelul 13.1 sînt prezentate momentele încovoietoare din încărcare cu rotiri unitare de noduri și rotiri unitare de bare pentru cele două tipuri de bare cu semnele rezultate din noua convenție de semne.

Suprapunînd efectele din cele trei încărcări la care pot fi supuse barele sistemului de bază, încărcarea cu forțele exterioare, încărcarea cu rotiri de noduri (φ_i, φ_j) și încărcarea cu rotirile de bare (θ_{ij}), se obțin momentele la capetele barelor în sistemul real.

Momente de capăt din deplasări unitare

Bara dublu încastrată		Bara încastrată şi articulată	
Încărcare	Momente de capăt	Încărcare	Momente de capăt



a) Pentru bara dublu încastrată $i-j$ aceste relaţii vor fi

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \frac{4EI}{l}\varphi_i + \frac{2EI}{l}\varphi_j - \frac{6EI}{l}\theta_{ij}$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \frac{2EI}{l}\varphi_i + \frac{4EI}{l}\varphi_j - \frac{6EI}{l}\theta_{ij} \quad (13.7)$$

care, în funcţie de rigiditatea barei dublu încastrate la încovoiere ($K_{ij} = 4EI/l$), pot fi scrise

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + K_{ij}\varphi_i + \frac{1}{2}K_{ij}\varphi_j - \frac{3}{2}K_{ij}\theta_{ij}$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \frac{1}{2}K_{ij}\varphi_i + K_{ij}\varphi_j - \frac{3}{2}K_{ij}\theta_{ij}. \quad (13.8)$$

Cum, pentru structuri din acelaşi material eforturile nu depind de material ci de distribuţia lui (I), se poate lucra cu coeficientul de rigiditate convenţional $\rho_{ij} = I/l$ considerînd în expresia rigidităţii $E = 1/4$. Expresiile momentelor de capăt folosind coeficienţii de rigiditate vor fi

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\varphi_i + \frac{1}{2}\rho_{ij}\varphi_j - \frac{3}{2}\rho_{ij}\theta_{ij}$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \frac{1}{2}\rho_{ij}\varphi_i + \rho_{ij}\varphi_j - \frac{3}{2}\rho_{ij}\theta_{ij}. \quad (13.9)$$

Cei doi indici aferenţi momentului definesc bara, primul indice indicînd capătul barei în care se calculează momentul.

b) Pentru bara încastrată şi articulată $i-h$, expresia momentului din capătul încastrat elastic în nod va fi

$$M_{ih} = \mathfrak{M}_{ih} + \frac{3EI}{l}\varphi_i - \frac{3EI}{l}\theta_{ih}$$

sau

$$M_{ih} = \mathfrak{M}_{ih} + K_{ih}\varphi_i - K_{ih}\theta_{ih} \quad (13.10)$$

$K_{ih} = 3EI/l$ fiind rigiditatea barei încastrate şi articulate la încovoiere. Făcînd $E = 1/4$, se obţine pentru această bară coeficientul de rigiditate $\rho_{ih} = 3/4\ I/l$, în funcţie de care momentul de capăt va avea expresia

$$M_{ih} = \mathfrak{M}_{ih} + \rho_{ih}\varphi_i - \rho_{ih}\theta_{ih}. \quad (13.11)$$

În calculele practice, deoarece s-a văzut la metoda eforturilor că eforturile nu depind de valorile absolute ale momentelor de inerţie ci de valorile relative ale lor, pentru diferitele bare, pentru determinarea coeficienţilor de rigiditate se poate lua o valoare arbitrară convenabilă pentru momentul de inerţie I în funcţie de care sînt exprimate momentele de inerţie ale barelor.

La cadre cu noduri fixe la care rotirile barelor $\theta_{ij} = 0$, expresiile momentelor de capăt vor fi:

— pentru bara dublu încastrată

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\varphi_i + \frac{1}{2}\rho_{ij}\varphi_j$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \frac{1}{2}\rho_{ij}\varphi_i + \rho_{ij}\varphi_j; \quad (13.12)$$

— pentru bara încastrată şi articulată

$$M_{ih} = \mathfrak{M}_{ih} + \rho_{ih}\varphi_i. \quad (13.13)$$

Pe baza acestor relaţii rezultă şi momentele de capăt din deplasări unitare necesare în calculul coeficienţilor necunoscutelor, pentru tipurile de bare întîlnite în sistemul de bază.

13.6. MOMENTE DE ÎNCASTRARE PERFECTĂ

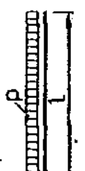
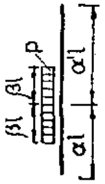
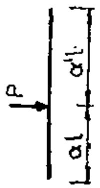
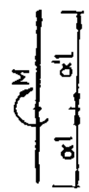
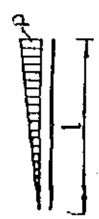
Momentele care se obţin la capetele barelor sistemului de bază (şi în cazul încastrării parţiale la teren) din încărcarea cu forţe date, variaţii de temperatură sau cedări de reazeme, se numesc momente de încastrare perfectă $\mathfrak{M}$. Ele se obţin rezolvînd bara respectivă prin metoda eforturilor.

13.6.1. ÎNCĂRCARE CU FORŢE

În tabelul 13.2 se dau valorile termenilor de încărcare şi ale momentelor de încastrare perfectă la bara cu secţiune constantă şi legături perfecte la capete pentru cîteva cazuri uzuale de încărcare cu forţe.

Tabelul 13.2

Termeni de încărcare și momente de încastrare perfectă pentru bare cu secțiune constantă

Încărcarea	Termeni de încărcare	Momente de încastrare perfectă	
			
	$m_{ij} = m_{ji} = \frac{1}{4} pl^2$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{1}{12} pl^2; \quad \mathfrak{M}_{ji} = \frac{1}{12} pl^2$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{1}{8} pl^2$
	$m_{ij} = 2\beta\alpha'(1 - \beta^2 - \alpha'^2)pl^2$ $m_{ji} = 2\beta\alpha(1 - \beta^2 - \alpha^2)pl^2$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{2}{3} \beta[3\alpha\alpha'^2 - \beta^2(2\alpha' - \alpha)]pl^2$ $\mathfrak{M}_{ji} = \frac{2}{3} \beta[3\alpha^2\alpha' - \beta^2(2\alpha - \alpha')]pl^2$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\beta\alpha'(1 - \beta^2 - \alpha'^2)pl^2$
	$m_{ij} = \alpha\alpha'(1 + \alpha')Pl$ $m_{ji} = \alpha\alpha'(1 + \alpha)Pl$ Pentru $\alpha = \alpha'$, $m = \frac{3}{8} Pl$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\alpha\alpha'^2 Pl$ $\mathfrak{M}_{ji} = \alpha^2\alpha' Pl$ Pentru $\alpha \neq \alpha'$, $\mathfrak{M}_{ji} = -\mathfrak{M}_{ij} = \frac{1}{8} Pl$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{1}{2} \alpha\alpha'(1 + \alpha')Pl$ Pentru $\alpha = \alpha'$; $\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{3}{16} Pl$
	$m_{ij} = (3\alpha'^2 - 1)M$ $m_{ji} = (1 - 3\alpha^2)M$	$\mathfrak{M}_{ij} = (2\alpha\alpha' - \alpha'^2)M$ $\mathfrak{M}_{ji} = (2\alpha\alpha' - \alpha^2)M$	$\mathfrak{M}_{ij} = \frac{1}{2} (1 - 3\alpha'^2)M$
	$m_{ij} = \frac{2pl^2}{15}$ $m_{ji} = \frac{7pl^2}{60}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{pl^2}{30}$ $\mathfrak{M}_{ji} = \frac{pl^2}{20}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{7pl^2}{120}$
	$m_{ij} = m_{ji} = \frac{5pl^2}{32}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{5pl^2}{96}; \quad \mathfrak{M}_{ji} = \frac{5pl^2}{96}$	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{5pl^2}{64}$

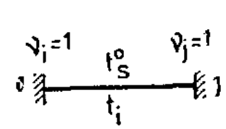
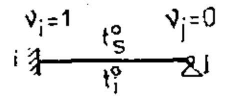
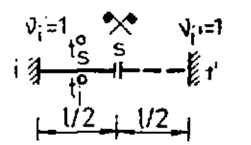
13.6.2. ÎNCĂRCARE CU VARIAȚII DE TEMPERATURĂ

Acțiunea variațiilor de temperatură ca încărcări asupra sistemului de bază conduce la apariția de momente de încastrare perfectă. Variațiile de temperatură față de temperatura de realizare a structurii intervin sub două forme: diferența de temepratură $\Delta t°$ între fețele extreme ale barelor și variația temperaturii $t°$ în axa barelor, care au efecte deosebite asupra barelor sistemului de bază.

Diferența de temperatură între fețe ($\Delta t° = t_i^o - t_s^o$) are ca efect alungirea diferită a fibrelor de la partea inferioară, *i*, și de la partea superioară *s* și deci curbarea barelor. În secțiunile de la capetele barelor blocate la rotiri, în sistemul de bază apar momente de încastrare perfectă care se determină prin metoda eforturilor. Expresiile acestor momente de încastrare perfectă pentru diferite cazuri de bare întîlnite în sistemul de bază sînt date în tabelul 13.3, în care, față de celelalte tabele, s-a mai notat cu h = înălțimea secțiunilor barelor și cu α coeficientul de dilatare termică liniară a materialului.

Tabelul 13.3

Momente de încastrare perfectă din $\Delta t° = t_i^o - t_s^o > 0$

Tipul barei	$\mathfrak{M}$
	$\mathfrak{M}_{ij} = -EI\frac{\alpha\Delta t_0}{h}$ $\mathfrak{M}_{ji} = EI\frac{\alpha\Delta t_0}{h}$
	$\mathfrak{M}_{ij} = -\frac{3}{2} EI\frac{\alpha\Delta t_0}{h}$
	$\mathfrak{M}_{i} = \mathfrak{M}_{ii'} = -EI\frac{\alpha\Delta t_0}{h}$

Observație. Momentele $\mathfrak{M}$ întind fibra mai rece.

Variația temperaturii în axele barelor $\left(t° = \frac{t_i^o + t_s^o}{2}\right)$ are ca efect alungirea barelor, nodurile blocate la rotiri în sistemul de bază suferă translații și deci barele se deformează. Momentele de încastrare provin din rotirile barelor sistemului de bază și se calculează cu termenii corespunzători din relațiile:

— pentru bara dublu încastrată $i-j$

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = -\frac{6EI}{l} \theta_{ij}^{t°}; \tag{13.14}$$

— pentru bara încastrată și articulată $i-h$

$$\mathfrak{M}_{ih} = -\frac{3EI}{l} \theta_{ih}^{t°}. \tag{13.15}$$

Rotirile barelor în sistemul de bază din încărcarea cu variația temperaturii în axa barelor se determină pe sistemul auxiliar articulat în toate nodurile și încastrările sistemului de bază (cu gradele de libertate elastice blocate), deci pe un sistem invariabil format numai din bare articulate (gen grindă cu zăbrele). Aceste rotiri se pot determina fie pe baza configurației pe care o ia sistemul articulat cînd barele se alungesc cu $\Delta l = \alpha l t^\circ$ (se poate folosi și epura Williot), fie cu formula Maxwell-Mohr pentru sisteme articulate

$$\theta_{ij} = \sum \alpha t^\circ \int n \, dx = \sum_k \alpha t_k^\circ n_k l_k$$

în care k este o bară oarecare a sistemului, iar n_k este efortul axial în barele sistemului articulat din încărcarea virtuală pentru rotirea barei (un cuplu unitar format din forțe $1/l_{ij}$ la capetele barei $i-j$ și normale pe bară).

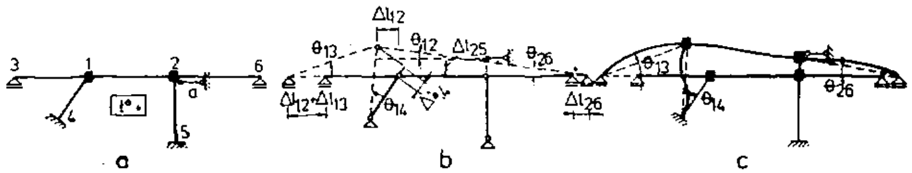


Fig. 13.13.

În fig. 13.13 se exemplifică efectul variației temperaturii în axele barelor asupra sistemului de bază, prezentîndu-se configurația sistemului auxiliar articulat al sistemului de bază din alungirea barelor, pe care se determină rotirile barelor (fig. 13.13, *b*) și deformarea barelor sistemului de bază (fig. 13.13, *c*) corespunzător acestor rotiri.

13.6.3. ÎNCĂRCARE CU CEDĂRI DE REAZEME DATE

Momentele de încastrare perfectă rezultate din acțiunea cedărilor de reazeme date se determină corespunzător efectului diferit al celor două tipuri de cedări asupra sistemului de bază.

Cedările de reazeme rotiri sînt echivalente cu rotiri ale capetelor de bară unde are loc cedarea. Dacă cedează un capăt i al barei $i-j$ printr-o rotire φ_i, se deformează numai această bară, momentele de încastrare obținîndu-se cu termenii respectivi din relațiile fundamentale:

— pentru bara dublu încastrată

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}} \varphi_i \, ; \; \mathcal{M}_{ji} = \frac{2EI}{l_{ij}} \varphi_j \qquad (13.16)$$

— pentru bara încastrată și articulată

$$\mathcal{M}_{ih} = \frac{3EI}{l_{ih}} \varphi_{ih}. \qquad (13.17)$$

Cedările de reazeme translații au ca efect asupra sistemului de bază translații de noduri care sînt echivalente cu rotiri de bare θ_{ij}. Momentele de încastrare perfectă se calculează cu termenii corespunzători de la rotiri de bare din relațiile fundamentale stabilite anterior:

— pentru bara dublu încastrată

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_{ji} = -\frac{6EI}{l_{ij}} \theta_{ij} \, ; \qquad (13.18)$$

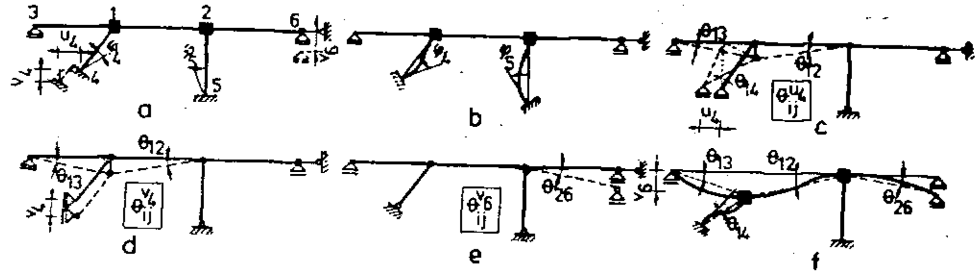


Fig. 13.14.

— pentru bara încastrată și articulată

$$\mathcal{M}_{ih} = -\frac{3EI}{l_{ih}} \theta_{ih}. \qquad (13.19)$$

Determinarea rotirilor de bare θ_{ij} se face pe baza configurației sistemului articulat al sistemului de bază la care se impun cedările de reazeme date.

În expresiile date pentru momente de încastrare perfectă rotirile φ_i și θ_{ij} se introduc cu semnul lor.

În fig. 13.14 se exemplifică efectul cedărilor de reazeme asupra sistemului de bază, cedări rotiri în fig. 13.14, *b* și cedări translații în fig. 13.14, *f*. În fig. 13.14, *c*—*e* se arată determinarea mai simplă a rotirilor de bare din fiecare cedare translație, care apoi se suprapun.

13.7. EXPRESIILE COEFICIENȚILOR ȘI TERMENILOR LIBERI DIN ECUAȚIILE DE CONDIȚIE

În metoda generală a deplasărilor se pot stabili expresii tip pentru coeficienții *și termenii liberi* din ecuațiile de condiție pe baza semnificației lor de reacțiuni în blocaje sau pe baza interpretării lor ca lucru mecanic virtual. Stabilirea acestor expresii se va urmări pe exemplul din *fig. 13.15*, în care sînt prezentate diagramele de momente pe barele sistemului de bază din încărcarea cu necunoscute unitare (conform tabelului 13.1) și din încărcările date și reacțiunile în blocaje din aceste încărcări.

Din echilibrul nodului *1* la momentele care apar din $Z_1 = 1$ și reacțiunea în blocaj, rezultă

$$r_{11} - \rho_{12} - \rho_{14} - \rho_{15} - \rho_{17} = 0 \, ; \; r_{11} = \rho_{12} + \rho_{14} + \rho_{15} + \rho_{17}.$$

Din echilibrul nodului *2* la momentele din $Z_1 = 1$ și reacțiunea în blocaj, rezultă

$$r_{21} - \frac{1}{2} \rho_{12} = 0 \, ; \; r_{21} = \frac{1}{2} \rho_{12}.$$

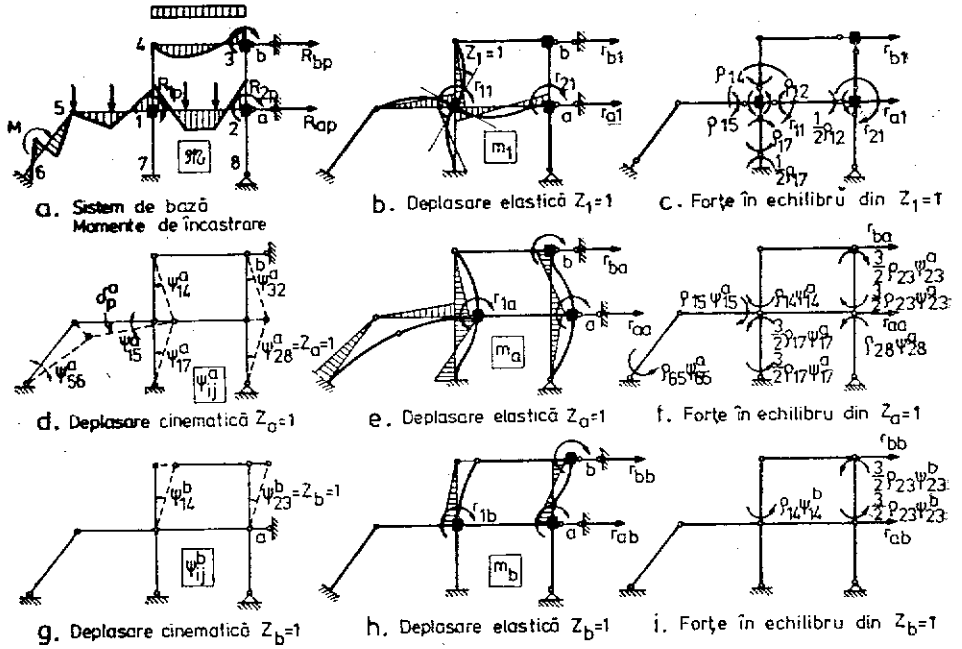


Fig. 13.15.

Scriind echilibrul momentelor și reacțiunilor în blocaje din deplasarea elastică $Z_1 = 1$, pe baza principiului lucrului mecanic virtual, folosind ca deplasare virtuală deplasarea cinematică $Z_a = 1$, se obține

$$\rho_{15}\psi_{15}^a + \rho_{14}\psi_{14}^a + \frac{3}{2}\rho_{17}\psi_{17}^a + r_{a1}\cdot 1 = 1$$

$$r_{a1} = -(\rho_{15}\psi_{15}^a + \rho_{14}\psi_{14}^a) - \frac{3}{2}\rho_{17}\psi_{17}^a$$

în care rotirile barelor din $Z_a = 1$ s-au considerat pozitive.

Aplicînd principiul lucrului mecanic virtual pentru momentele și reacțiunile în blocaje din deplasarea elastică $Z_b = 1$, folosind deplasarea cinematică $Z_a = 1$, se obține

$$r_{ab}\cdot 1 - \rho_{14}\psi_{14}^b\psi_{14}^a - 3\rho_{23}\psi_{23}^b\psi_{23}^a = 0$$

$$r_{ab} = \rho_{14}\psi_{14}^b\psi_{14}^a + 3\rho_{23}\psi_{23}^b\psi_{23}^a.$$

Din echilibrul nodului *1* la momentele de încastrare perfectă și reacțiunea în blocaj din încărcări rezultă

$$R_{1p} - \mathfrak{M}_{15} + \mathfrak{M}_{12} = 0\,;\; R_{1p} = \mathfrak{M}_{15} - \mathfrak{M}_{12}.$$

Echilibrul momentelor de încastrare perfectă cu încărcările și reacțiunile în blocaje pe baza principiului lucrului mecanic virtual, folosind ca deplasare virtuală deplasarea cinematică $Z_a = 1$, dă

$$R_{ap}\cdot 1 + L_{\mathfrak{M}}^a + L_p^a = 0\,;\; R_{ap} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi_{ij}^a - \sum P\delta_p^a - \sum M\psi^a.$$

Pentru o structură oarecare din bare cu secțiune constantă expresiile tip pentru coeficienții necunoscutelor și termenii liberi din ecuațiile de condiție au forma următoare:

$$r_{ii} = \sum_i \rho_{ij} = \rho_i\,;\; r_{ij} = \frac{1}{2}\rho_{ij}\,;\; r_{ia} = -\sum_i^{|-\circ}\rho_{ij}\psi_{ij}^a - \sum_i^{|-|}\frac{3}{2}\rho_{ij}\psi_{ij}^a\,.$$

$$r_{ab} = \sum^{|-\circ}\rho_{ij}\psi_{ij}^a\psi_{ij}^b + \sum^{|-|}3\rho_{ij}\psi_{ij}^a\psi_{ij}^b\,;\; r_{aa} = \sum^{|-\circ}\rho_{ij}(\psi_{ij}^a)^2 + \sum^{|-|}3\rho_{ij}(\psi_{ij}^a)^2 \quad (13.20)$$

$$R_{ip} = \sum_i \mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i\,;\; R_{ap} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi_{ij}^a - \sum P\delta_p^a - \sum M\psi^a$$

în care ρ_{ij} este coeficientul de rigiditate pe bara $i-j$ determinat cu relațiile: $\rho_{ij}^{|-|} = \frac{I_{ij}}{l_{ij}}$; $\rho_{ik} = \frac{3}{4}\frac{I_{ik}}{l_{ik}}$; ψ_{ij}^a și ψ_{ij}^b sînt rotirile barelor din gradele de libertate $Z_a = 1$ și respectiv $Z_b = 1$ pe sistemul articulat al sistemului de bază suprimînd legătura *a*, respectiv *b*; ele se introduc cu semnul lor; $\mathfrak{M}_{ij}$ este momentul de încastrare perfectă în capătul *i* pe bara $i-j$; se introduce cu semnul lui pe capăt de bară (nu pe nod).

Observații:

— Semnele (|—∘) și (|—|) indică faptul că $\sum$ se referă la bare încastrate și articulate, respectiv dublu încastrate.

— La coeficienții de tip r_{ii} și r_{ia} sumele $\sum_i$ se referă numai la barele care sînt încastrate în nodul *i*.

— La coeficienții de tip r_{ab} suma $\sum$ se referă la toate barele structurii care au rotiri ψ_{ij}^a, ψ_{ij}^b.

— Indicii coeficienților și termenilor liberi corespund nodurilor (*i* sau $j = 1, 2, 3, \ldots$) și gradelor de libertate ($a, b, c, \ldots$).

— La încărcarea cu variații de temperatură și cedări de reazeme, termenii liberi R_{ao} vor conține numai lucrul mecanic al momentelor de încastrare perfectă corespunzătoare

$$R_{at} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij}^t + \mathfrak{M}_{ji}^t)\psi_{ij}^a\,;\; R_{a\Delta r} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij}^{\Delta r} + \mathfrak{M}_{ji}^{\Delta r})\psi_{ij}^a.$$

— Efectul tiranților la cadre cu tiranți apare numai în coeficienții corespunzători gradelor de libertate pentru care se produc deplasări relative ale articulațiilor de capăt, deoarece numai din aceste încărcări pe sistemul de bază apar eforturi în tiranți. La coeficienții respectivi se mai adaugă corecția din tirant care are forma

$$r_{ab}^t = \frac{E_t A_t}{l_t}\Delta l_t^a \Delta l_t^b \frac{(EI)^c}{(EI)^r}$$

în care: E_t, A_t, l_t sînt caracteristicile elastice și geometrice ale tirantului, Δl_t^a și Δl_t^b sînt alungirile tirantului din $Z_a = 1$ și respectiv $Z_b = 1$; $(EI)^c/(EI)^r$ este raportul dintre valoarea convențională dată la calculul coeficienților de rigiditate ρ și valoarea reală.

13.8. OBȚINEREA DIAGRAMEI FINALE DE MOMENTE ÎNCOVOIETOARE

După calculul coeficienților și termenilor liberi cu expresiile anterioare se poate rezolva sistemul ecuațiilor de condiție și afla necunoscutele. Avînd valorile necunoscutelor Z_i și Z_a se cunosc rotirile nodurilor $\varphi_i = Z_i$ și se pot

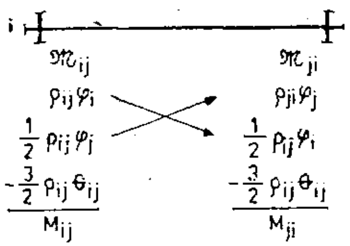


Fig. 13.16.

determină rotirile reale ale barelor prin suprapunerea rotirilor corespunzătoare gradelor de libertate unitare

$$\theta_{ij} = \psi_{ij}^a Z_a + \psi_{ij}^b Z_b + \ldots$$

Valorile totale ale momentelor de la capetele barelor se obțin cu ajutorul relațiilor *fundamentale stabilite în* paragraful 13.5. Calculul cu aceste relații se poate conduce și direct pe schema cadrului, efectuînd la capetele fiecărei bare operațiile indicate în fig. 13.16.

Între momentele de capăt, diagrama de momente pe fiecare bară variază corespunzător încărcării date.

Un alt mod de obținere a diagramei de momente finale constă din suprapunerea diagramelor pe sistemul de bază din încărcări și necunoscute unitare

$$M = \mathfrak{M} + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \ldots + m_a Z_a + m_b Z_b + \ldots$$

Acest procedeu nu este practic deoarece, avînd expresii tip pentru coeficienții necunoscutelor, nu sînt necesare diagramele pe sistemul de bază din necunoscute unitare.

În metoda deplasărilor, verificarea diagramei de momente se face pe baza echilibrului static verificînd echilibrul nodurilor.

Observație. La structuri simetrice calculul se poate efectua pe semistructuri ca pentru orice structură. În cazul în care axa de simetrie taie o riglă, în sistemul de bază apare al treilea tip de bară, bara încastrată la un capăt și cu încastrare cu translație (ghidaj) la celălalt capăt.

Stabilirea semistructurilor este prezentată la metoda eforturilor. În multe cazuri, la încărcare simetrică, translațiile nodurilor sînt nule, deci cadrul se comportă ca un cadru cu noduri fixe avînd numai necunoscute rotiri de noduri.

Aplicația 13.1. Pentru cadrul din fig. 13.17, *a* să se traseze diagramele de momente încovoietoare folosind metoda generală a deplasărilor.

1) Necunoscute. Cadrul din fig. 13.17, *a* este cadru cu noduri deplasabile cu două grade de libertate elastice [pe structura auxiliară articulată $G_l = 2n - (b + r) = 2 \cdot 8 - (7 + 7) = 2$]. În metoda deplasărilor, structura prezintă cinci necunoscute, trei necunoscute rotiri de noduri Z_1, Z_2, Z_3 și două necunoscute grade de libertate elastice Z_a și Z_b.

2) Momentele de încastrare perfectă (fig. 13.17, *b*)

$$\mathfrak{M}_{15} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 60 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 60 \cdot 12 = 240 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

$$\mathfrak{M}_{24} = -\frac{3}{16} \cdot 60 \cdot 8 = -90 \text{ kN} \cdot \text{m} ; \quad \mathfrak{M}_{34} = +\frac{20 \cdot 8^2}{8} = 160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\mathfrak{M}_{39} = -\frac{20 \cdot 2^2}{2} = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

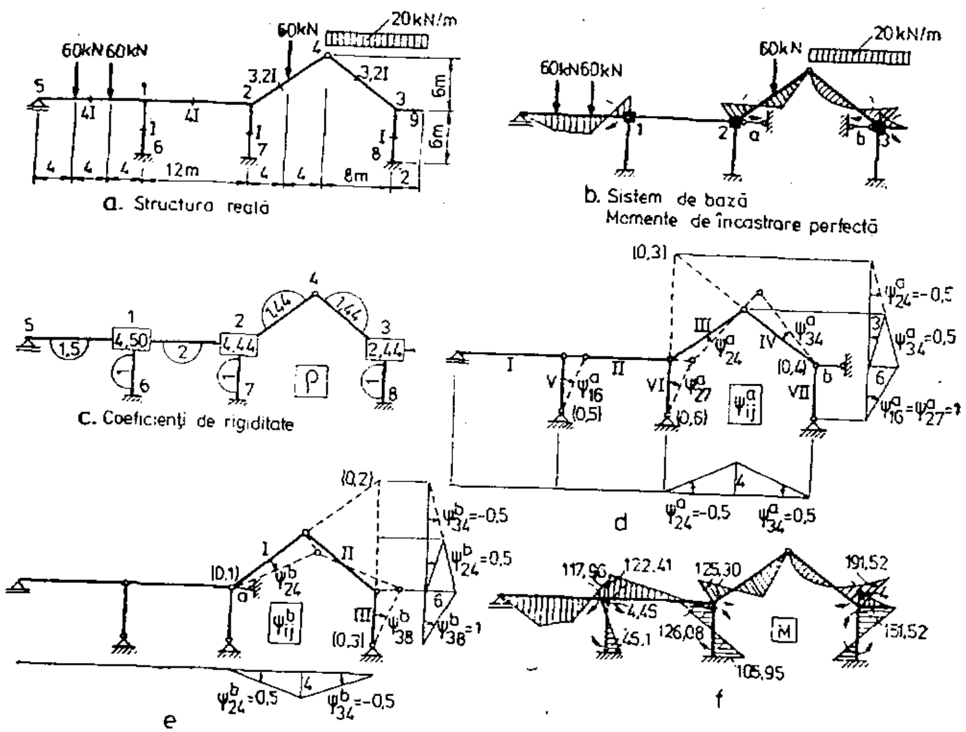


Fig. 13.17.

3) Coeficienții de rigiditate (fig. 13.17, *c*) (pentru $EI = 1{,}5$)

$$\rho_{15} = \frac{3E \cdot 4I}{12} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1{,}5}{12} = 1{,}5 ; \quad \rho_{12} = \frac{4E \cdot 4I}{12} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 1{,}5}{12} = 2 ;$$

$$\rho_{24} = \frac{3E \cdot 3{,}2I}{10} = \frac{3 \cdot 3{,}2 \cdot 1{,}5}{10} = 1{,}44 = \rho_{34}$$

$$\rho_{16} = \rho_{27} = \rho_{38} = \frac{4EI}{6} = \frac{4 \cdot 1{,}5}{6} = 1.$$

4) Studiile cinematice pentru determinarea rotirilor barelor din deplasări unitare corespunzătoare gradelor de libertate Z_a ($\psi_{16}^a = 1$) și Z_b ($\psi_{33}^b = 1$) sînt date în fig. 13.17, *d*, *e*.

5) Calculul coeficienților și termenilor liberi din ecuațiile de condiție

$$r_{11} = \sum_1 \rho = 4{,}50 ; \quad r_{22} = \sum_2 \rho = 4{,}44 ; \quad r_{33} = \sum_3 \rho = 2{,}44 ;$$

$$r_{12} = \frac{1}{2} \rho_{12} = 1 ; \quad r_{13} = 0 ; \quad r_{23} = 0 ;$$

$$r_{1a} = -\frac{3}{2} \sum_1^{|-|} \rho \psi^a - \sum_1^{|-\circ} \rho \psi^a = -\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -1{,}5 ;$$

$$r_{1b} = -\frac{3}{2} \sum_1^{|-|} \rho \psi^b - \sum_1^{|-\bullet} \rho \psi^b = 0 ;$$

$$r_{2a} = -\frac{3}{2}\sum_{2}^{|-|}\rho\psi^a - \sum_{2}^{|-\circ}\rho\psi^a = -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 - 1{,}44(-0{,}5) = -0{,}78\,;$$

$$r_{2b} = -\frac{3}{2}\sum_{2}^{|-|}\rho\psi^b - \sum_{2}^{|-\circ}\rho\psi^b = -1{,}44\cdot 0{,}5 = -0{,}72\,;$$

$$r_{3a} = -\frac{3}{2}\sum_{3}^{|-|}\rho\psi^a - \sum_{3}^{|-\circ}\rho\psi^a = -1{,}44\cdot 0{,}5 = -0{,}72\,;$$

$$r_{3b} = -\frac{3}{2}\sum_{3}^{|-|}\rho\psi^b - \sum_{3}^{|-\circ}\rho\psi^b = -\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1 - 1{,}44(-0{,}5) = -0{,}78\,;$$

$$r_{aa} = 3\sum^{|-|}\rho(\psi^a)^2 + \sum^{|-\circ}\rho(\psi^a)^2 = 3(1\cdot 1^2 + 1\cdot 1^2) + 1{,}44(-0{,}5)^2 + $$
$$+ 1{,}44\cdot 0{,}5^2 = 6{,}72\,;$$

$$r_{bb} = 3\sum^{|-|}\rho(\psi^b)^2 + \sum^{|-\circ}\rho(\psi^b)^2 = 3\cdot 1\cdot 1^2 + 1{,}44\cdot 0{,}5^2 + 1{,}44\cdot(-0{,}5)^2 =$$
$$= 3{,}72\,;$$

$$r_{ab} = 3\sum^{|-|}\rho(\psi^a)(\psi^b) + \sum^{|-\circ}\rho(\psi^a)(\psi^b) = 1{,}44(-0{,}5)\cdot 0{,}5 + 1{,}44\cdot 0{,}5(-0{,}5) =$$
$$= -0{,}72\,;$$

$$R_{ap} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi^a - \sum P\delta_p^a = -(-90 + 0)(-0{,}5) -$$
$$- (160 + 0)(0{,}5) - \left(-60\cdot 2 - 20\cdot\frac{4\cdot 8}{2}\right) = 315{,}0$$

$$R_{1p} = \sum_{1}\mathfrak{M} = 240\,;\ R_{2p} = \sum_{2}\mathfrak{M} = -90\,;\ R_{3p} = \sum_{3}\mathfrak{M} = +160 - 40 =$$
$$= +120$$

$$R_{bp} = -\sum(\mathfrak{M}_{ij} + \mathfrak{M}_{ji})\psi^b - \sum P\delta_p^b = -(-90 + 0)(0{,}5) -$$
$$- (0 + 160)(-0{,}5) - \left(60\cdot 2 + 20\cdot\frac{4\cdot 8}{2}\right) = -315{,}0.$$

6) Determinarea necunoscutelor din sistemul ecuațiilor de condiție

$$4{,}50Z_1 + Z_2 - 1{,}5Z_a + 240 = 0$$
$$Z_1 + 4{,}44Z_2 - 0{,}78Z_a - 0{,}72Z_b - 90 = 0$$
$$2{,}44Z_3 - 0{,}72Z_a - 0{,}78Z_b + 120 = 0$$
$$-1{,}5Z_1 - 0{,}78Z_2 - 0{,}72Z_3 + 6{,}72Z_a - 0{,}72Z_b + 315 = 0$$
$$-0{,}72Z_2 - 0{,}78Z_3 - 0{,}72Z_a + 3{,}72Z_b - 315 = 0$$
$$Z_1 = -81{,}35\,;\ Z_2 = 40{,}29\,;\ Z_3 = -42{,}91\,;\ Z_a = -57{,}20\,;\ Z_b = 72{,}41.$$

7) Rotirile reale ale barelor ($\theta_{ij} = \varphi_{ij}^a Z_a + \psi_{ij}^b Z_b$) vor fi

$$\theta_{15} = \theta_{12} = 0\,;\ \theta_{16} = 1\cdot(-57{,}20) = -57{,}20\,;\ \theta_{27} = 1\cdot(-57{,}20) =$$
$$= -57{,}20\,;$$
$$\theta_{38} = 1\cdot 72{,}41 = 72{,}41\,;\ \theta_{24} = (-0{,}5)(-57{,}20) + 0{,}5\cdot 72{,}41 = 64{,}8;$$
$$\theta_{34} = 0{,}5\cdot(-57{,}20) - 0{,}5\cdot 72{,}41 = -64{,}8$$

8) Calculul momentelor încovoietoare la capetele barelor (după formulele de la pragraful 13.5)

$$M_{15} = 240 + 1{,}5(-81{,}35) - 1{,}5\cdot 0 = 117{,}96 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{16} = 1\cdot(-81{,}35) - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot(-57{,}20) = 4{,}45 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{12} = 2(-81{,}35) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 40{,}29 = -122{,}41 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{27} = 1\cdot 40{,}29 - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot(-57{,}20) = 126{,}08 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{24} = -90 + 1{,}44\cdot 40{,}29 - 1{,}44\cdot 64{,}8 = -125{,}30 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{38} = 1\cdot(-42{,}91) - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 72{,}41 = -151{,}52 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{61} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-81{,}35) - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot(-57{,}20) = 45{,}1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{21} = 2\cdot 40{,}29 + \frac{1}{2}(-81{,}35) = -0{,}78 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{72} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 40{,}29 - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot(-57{,}20) = 105{,}95 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{34} = 160 + 1{,}44(-42{,}91) - 1{,}44(-64{,}8) = 191{,}52 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$M_{83} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-49{,}21) - \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 72{,}41 = -130{,}06 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

9) Verificări

$$\sum_{1} M = +117{,}96 + 4{,}45 - 124{,}41 = 0$$
$$\sum_{2} M = -0{,}75 + 126{,}08 - 125{,}30 = 0$$
$$\sum_{3} M = -40 + 191{,}52 - 151{,}52 = 0.$$

Diagrama M este dată în fig. 13.17, *f*.

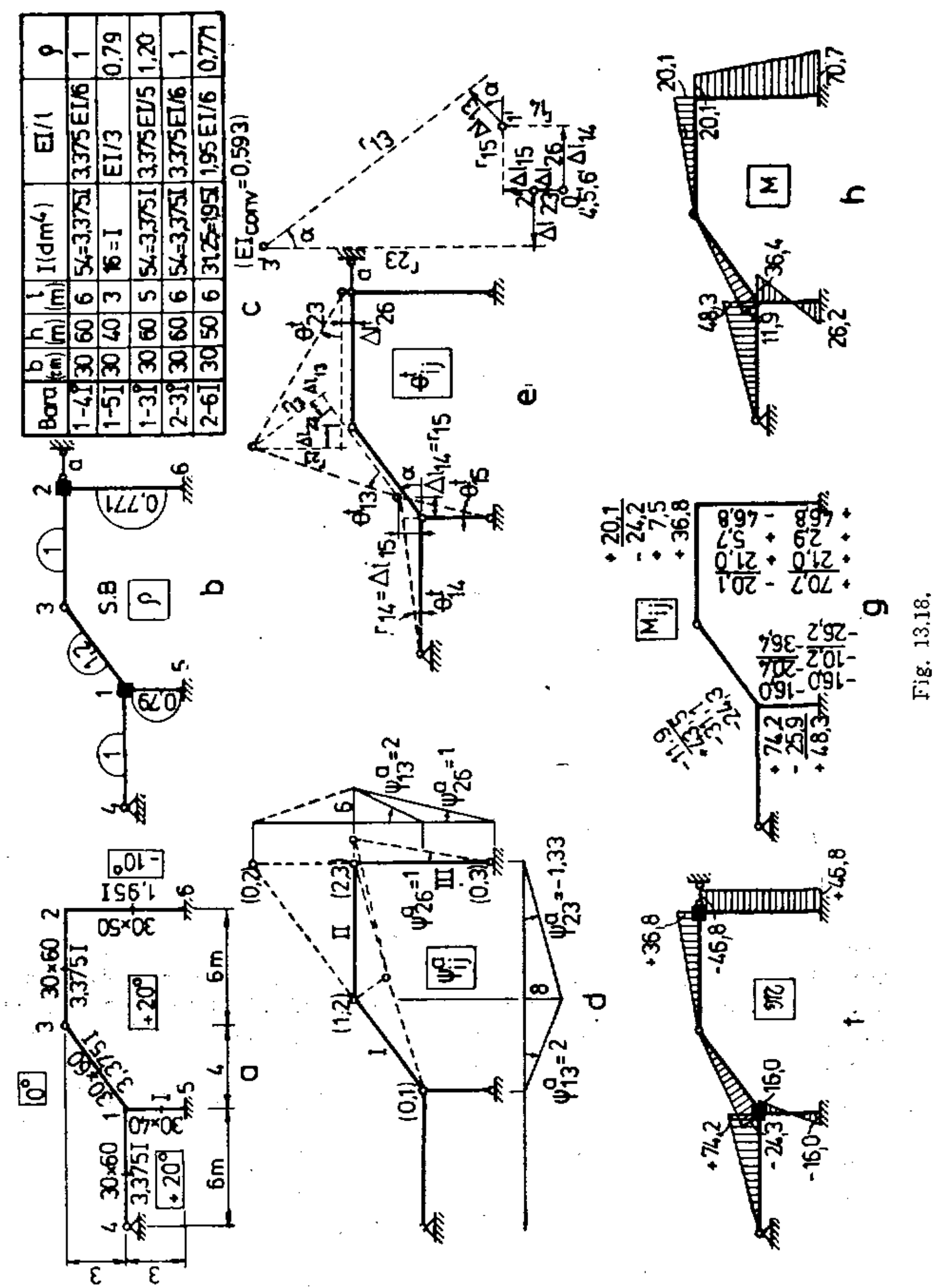
Aplicația 13.2. Pentru cadrul din fig. 13.18, *a* să se determine diagrama de momente din încărcarea cu variațiile de temperatură date, prin metoda generală a deplasărilor. Barele au secțiuni dreptunghiulare cu dimensiunile din figură ($EI = 40\ 000$ kN·m^2 ; $\alpha = 10^{-5}$).

Structura este cadru cu noduri deplasabile cu un grad de libertate ($G_l = 2\cdot 6 - (5 + 6) = 1$). Necunoscutele : rotirile de noduri Z_1 și Z_2 și gradul de libertate Z_a (fig. 13.18, *b*).

Coeficienții de rigiditate sînt calculați în tabelul din figura 13.18, *c*.

Studiul cinematic pentru determinarea rotirilor de bare corespunzătoare deplasării $Z_a = 1$ se prezintă în figura 13.18, *d*.

Rotirile barelor din variația temperaturii $t°$ în axele barelor se determină pe configurația geometrică a sistemului articulat obținut din sistemul de bază, din alungirile (scurtările) barelor (fig. 13.18, *e*).



Bara	b (cm)	h (cm)	l (m)	I (dm⁴)	EI/l	ρ
1-4	30	60	6	54=3,375I	3,375EI/6	1
1-5	30	40	3	16=I	EI/3	0,79
1-3	30	60	5	54=3,375I	3,375EI/5	1,20
2-3	30	60	6	54=3,375I	3,375EI/6	1
2-6	30	50	6	31,25=1,95I	1,95EI/6	0,771

$(EI_{conv}=0,593)$

Fig. 13.18.

Alungirile barelor sînt: $\Delta l_{14} = 10^{-5}\cdot 10\cdot 6 = 60\cdot 10^{-5}$; $\Delta l_{15} = 10^{-5}\cdot 20\cdot 3 = 60\cdot 10^{-5}$; $\Delta l_{13} = 10^{-5}\cdot 10\cdot 5 = 50\cdot 10^{-5}$; $\Delta l_{23} = 10^{-5}\cdot 10\cdot 6 = 60\cdot 10^{-5}$ și $\Delta l_{26} = 10^{-5}\cdot 5\cdot 6 = 30\cdot 10^{-5}$.

În fig. 13.19, *e* în partea dreaptă este reprezentată epura Williot cu ajutorul căreia se pot determina componentele deplasărilor nodurilor perpendiculare pe bare (r) necesare calculului rotirilor de bare ($\theta = r/l$). Din această epură rezultă:

$$r_{14} = \Delta l_{15} = 60\cdot 10^{-5};\quad r_{15} = \Delta l_{14} = 60\cdot 10^{-5};\quad r_{26} = 0;\quad r_{13}\sin\alpha = \Delta l_{13}\cos\alpha + \Delta l_{14} + \Delta l_{23};$$

$$r_{13} = (50\cdot 0.8 + 60 + 60)\cdot 10^{-5}/0,6 = 266,7\cdot 10^{-5};$$

$$r_{23} = r_{13}\cos\alpha + \Delta l_{13}\sin\alpha + \Delta l_{15} - \Delta l_{26} = 273,3\cdot 10^{-5}.$$

Rotirile de bare vor fi:

$$\theta^t_{14} = -\frac{60\cdot 10^{-5}}{6} = -10\cdot 10^{-5}\quad \theta^t_{15}; = +\frac{60\cdot 10^{-5}}{3} = +20\cdot 10^{-5};$$

$$\theta^t_{13} = -\frac{266,7\cdot 10^{-5}}{5} = -53,33\cdot 10^{-5};\quad \theta^t_{23} = +\frac{273,3\cdot 10^{-5}}{6} = +45,5\cdot 10^{-5};\quad \theta^t_{26} = 0.$$

Momentele de încastrare perfectă din variația temperaturii în axele barelor vor fi:

$$\mathfrak{M}^t_{14} = -\frac{3E\cdot 3,375I}{6}\,\theta^t_{14} = \frac{10,125\cdot 40\,000}{6}\cdot 10^{-4} = 6,75\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathfrak{M}^t_{15} = \mathfrak{M}^t_{51} = -\frac{6EI}{3}\,\theta^t_{15} = -\frac{6\cdot 40\,000}{3}\cdot 20\cdot 10^{-5} = -16,0\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathfrak{M}^t_{13} = -\frac{3\,E\cdot 3,375\,I}{5}\,\theta^t_{13} = \frac{10,125\cdot 40\,000}{5}\cdot 53,33\cdot 10^{-5} = 43,2\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\mathfrak{M}^t_{23} = -\frac{3\,E\cdot 3,375\,I}{6}\,\theta^t_{23} = -\frac{10,125\cdot 40\,000}{6}\cdot 45,5\cdot 10^{-5} = 30,7\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

Momentele de încastrare perfectă din diferența de temperatură între fețele barelor (conform tabelului 13.3) sînt:

$$\mathfrak{M}^{\Delta t}_{14} = +\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{0,6}\,3,375\cdot 40\,000\cdot 10^{-5} = 67,5\ \text{kN}\cdot\text{m};\ \mathfrak{M}^{\Delta t}_{51} = \mathfrak{M}^{\Delta t}_{15} = 0$$

$$\mathfrak{M}^{\Delta t}_{13} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{0,6}\,3,375\cdot 40\,000\cdot 10^{-5} = -67,5\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}^{\Delta t}_{23} = +\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{0,6}\,3,375\cdot 40\,000\cdot 10^{-5} = 67,5\ \text{kNm}$$

$$\mathfrak{M}^{\Delta t}_{62} = -\mathfrak{M}^{\Delta t}_{26} = +\frac{30}{0,5}\,1,95\cdot 40\,000\cdot 10^{-5} = 46,8\ \text{kNm}.$$

Momentele de încastrare perfectă totale sînt trecute pe fig. 13.18, *f* ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^t + \mathfrak{M}^{\Delta t}$).

Coeficienţii necunoscutelor:

$$r_{11} = 1 + 1{,}2 + 0{,}79 = 2{,}99\,;\quad r_{22} = 1 + 0{,}771 = 1{,}771\,;\quad r_{12} = 0\,;$$

$$r_{1a} = -1{,}2\cdot 2 = -2{,}4\,;\quad r_{2a} = -\frac{3}{2}\cdot 0{,}771\cdot 1 - 1(-1{,}33) = +0{,}177\,;$$

$$r_{aa} = 3\cdot 0{,}771\cdot 1^2 + 1(-1{,}33)^2 + 1{,}2\cdot 2^2 = 8{,}89.$$

Termenii liberi din ecuaţiile de condiţie:

$$R_{1t} = 74{,}2 - 16{,}0 - 24{,}3 = +33{,}9\,;\quad R_{2t} = +36{,}8 - 46{,}8 = -10{,}0$$

$$R_{at} = -(-24{,}3)\cdot 2 - 36{,}8(-1{,}33) = +97{,}6.$$

Ecuaţiile de condiţie şi valorile necunoscutelor sînt:

$$2{,}99\ Z_1 - 2{,}40\ Z_a + 33{,}9 = 0 \qquad Z_1 = -25{,}92$$

$$1{,}771\ Z_2 + 0{,}177\ Z_a - 10 = 0 \qquad Z_2 = +7{,}46$$

$$-2{,}40\ Z_1 + 0{,}177\ Z_2 + 8{,}89\ Z_a + 97{,}6 = 0\,; \qquad Z_a = -18{,}12.$$

Determinarea momentelor la capetele barelor se prezintă pe schema din fig. 13.18, *g* iar diagrama de momente în fig. 13.18, *h*.

În afara echilibrului nodurilor, diagrama finală se poate verifica şi pe baza principiului lucrului mecanic virtual

$$\Sigma\,(M_{ij} + M_{ji})\psi^a_{ji} = (-11{,}9)\cdot 2 + 20{,}1(-1{,}33) + (70{,}7 - 20{,}1)\cdot 1 =$$
$$= -50{,}6 + 50{,}6 = 0$$

Aplicaţia 13.3. Pentru cadrul din exemplul precedent să se determine diagrama de momente încovoietoare din încărcarea cu cedări de reazeme ($v_4 = 2$ cm, $u_5 = 0{,}75$ cm, $v_5 = 1$ cm, $u_6 = 2$ cm, $\varphi_5 = (1/6)°$ din fig. 13.19, *a*); $EI = 40\ 000$ kN·m².

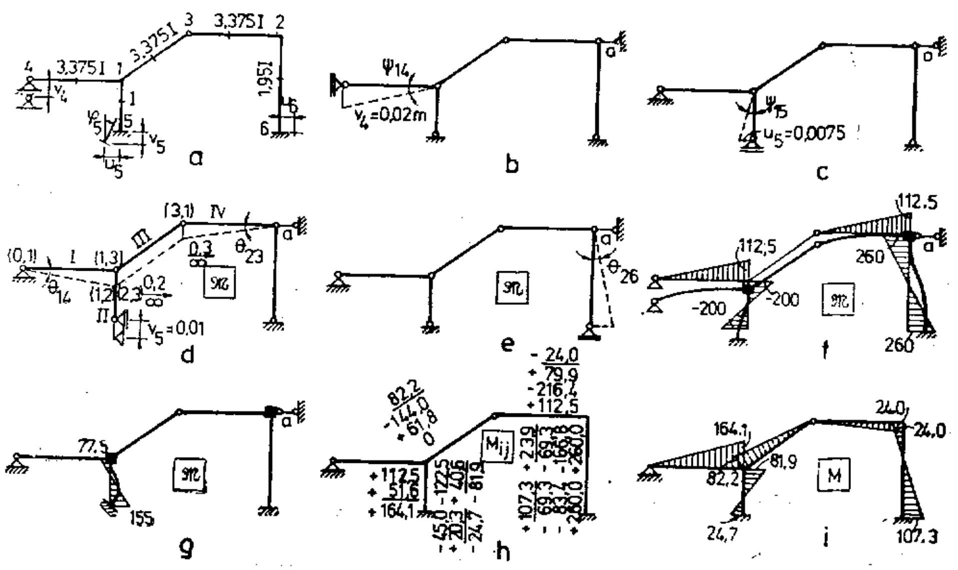


Fig. 13.19.

Coeficienţii necunoscutelor au fost calculaţi în exemplul precedent. Pentru calculul termenilor liberi sînt necesare momentele de încastrare perfectă din cedările de reazeme.

Cedările de reazeme translaţii au ca efect asupra sistemului de bază rotiri de bare care se determină pe sistemul articulat al sistemului de bază la care se suprimă legătura pe direcţia cedării respective (fig. 13.19, *b*, *c*). Rezultă următoarele rotiri de bare:

$$\theta_{14} = -\frac{0{,}02}{6} + \frac{0{,}01}{6} = -1{,}67\cdot 10^{-3}\,;\quad \theta_{15} = +\frac{0{,}0075}{3} = +2{,}5\cdot 10^{-3}$$

$$\theta_{23} = -\frac{0{,}01}{6} = -1{,}67\cdot 10^{-3}\,;\quad \theta_{13} = 0\,;\quad \theta_{26} = -\frac{0{,}02}{6} = -3{,}33\cdot 10^{-3}.$$

Momentele de încastrare perfectă din aceste rotiri produse de cedările translaţii (fig. 13.19, *f*) sînt:

$$\mathfrak{M}_{14} = -\frac{3\,E\cdot 3{,}375\,I}{6}\,\theta_{14} = -\frac{10{,}125\cdot 40\,000}{6}(-1{,}67\cdot 10^{-3}) = +112{,}5\ \text{kN·m}$$

$$\mathfrak{M}_{15} = \mathfrak{M}_{51} = -\frac{6EI}{3}\,\theta_{15} = -\frac{6\cdot 40\,000}{3}\,2{,}5\cdot 10^{-3} = -200\ \text{kN·m}$$

$$\mathfrak{M}_{23} = -\frac{3\,E\cdot 3{,}375\,I}{6}\,\theta_{23} = -\frac{10{,}125\cdot 40\,000}{6}(-1{,}67\cdot 10^{-3}) = +112{,}5\ \text{kN·m}$$

$$\mathfrak{M}_{26} = -\mathfrak{M}_{62} = -\frac{6E\cdot 1{,}96\,I}{6}\,\theta_{26} = -1{,}95\cdot 40\,000(-3{,}33\cdot 10^{-3}) = +260\ \text{kNm}$$

Din cedări rotiri, momentele de încastrare perfectă (fig. 13.19, *g*) sînt:

$$\mathfrak{M}_{51} = \frac{4EI}{3}\,\varphi_5 = \frac{4\cdot 40\,000}{3}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{180}\right) = 155{,}0\ \text{kN·m}\,;$$

$$\mathfrak{M}_{15} = \frac{2EI}{3}\,\varphi_5 = \frac{2\cdot 40\,000}{3}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{180}\right) = 77{,}5\ \text{kN·m}.$$

Momentele de încastrare perfectă totale:

$$\mathfrak{M}_{14} = +112{,}5\ \text{kN·m}\,;\quad \mathfrak{M}_{15} = -200 + 77{,}5 = -122{,}5\ \text{kN·m}\,;$$
$$\mathfrak{M}_{51} = -200 + 155 = -45{,}0\ \text{kN·m}$$

$$\mathfrak{M}_{23} = +112{,}5\ \text{kN·m}\,;\quad \mathfrak{M}_{26} = +260\ \text{kN·m}\,;\quad \mathfrak{M}_{62} = 260\ \text{kN·m}.$$

Termenii liberi din ecuaţiile de condiţie:

$$R_{1\Delta r} = 112{,}5 - 122{,}5 = -10\,;\quad R_{2\Delta r} = 112{,}5 + 260 = 372{,}5$$

$$R_{a\Delta r} = (112{,}5)(-1{,}33) - (260 + 260)\cdot 1 = -370.$$

Ecuaţiile de condiţie şi valorile necunoscutelor:

$$2{,}99\ Z_1 - 2{,}40\ Z_a - 10 = 0\,; \qquad Z_1 = +51{,}6$$

$$1{,}771\ Z_2 + 0{,}177\ Z_a + 372{,}5 = 0\,; \qquad Z_2 = -216{,}5$$

$$-2{,}40\ Z_1 + 0{,}177\ Z_2 + 8{,}89\ Z_a - 370 = 0\,; \qquad Z_a = +59{,}9.$$

Momentele la capetele barelor sînt determinate în fig. 15.19, *h*, iar diagrama de momente este prezentată în fig. 15.19 *i*.

Verificare : $\Sigma(M_{ij} + M_{ji})\psi_{ij}^{a} = (-82{,}2)\cdot 2 + (-24)(-1{,}33) + (24 + 107{,}3)\cdot 1 = -164{,}4 + 163{,}3 \approx 0.$

13.9. PROCEDEUL DISTRIBUȚIEI ȘI TRANSMITERII MOMENTELOR (CROSS)

13.9.1. PRINCIPIUL PROCEDEULUI. COEFICIENT DE DISTRIBUȚIE. COEFICIENT DE TRANSMITERE

Acest procedeu, elaborat de Hardy Cross în anul 1932, are la bază aspectul fizic al trecerii de la sistemul de bază cu noduri blocate la deformata reală pentru cadre cu noduri fixe. Se va urmări principiul acestui procedeu pe cadrul cu noduri fixe din fig. 13.20, *a*. Pentru a trece de la sistemul de bază în fig. 13.20, *b* la sistemul real, trebuie deblocate nodurile pentru a le permite să se rotească ca în sistemul real. Această deblocare nu se poate face simultan la toate nodurile, deoarece nu se cunosc rotirile lor și deci nu se pot afla momentele care apar la capetele barelor din aceste rotiri. Se va debloca succesiv cîte un nod, celelalte noduri rămînînd blocate. În acest mod, la fiecare deblocare de nod se vor putea determina momentele care apar la capetele barelor, așa cum se va vedea mai departe.

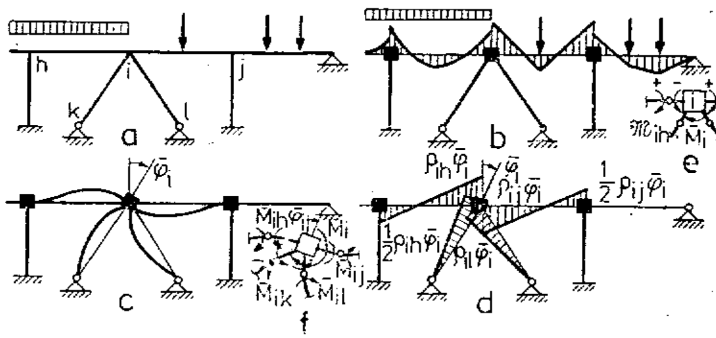


Fig. 13.20.

Înainte de deblocare, asupra unui nod poate acționa un moment neechilibrat dat de suma momentelor de pe capetele de bară din nod. Astfel, asupra nodului *i*, izolat din sistemul de bază în fig. 13.20, *e*, acționează pe nod momentul neechilibrat $\bar{M}_i = \mathfrak{M}_{ij} - \mathfrak{M}_{ih}$.

Deblocînd numai nodul *i*, el se va roti cu $\bar{\varphi}_i$ (fig. 13.20, *c*), barele concurente în nod se deformează pînă cînd momentele care apar pe capetele de bare din nod echilibrează momentul neechilibrat (fig. 13.20, *d*). Condiția de echilibru pentru nodul *i* rotit cu $\bar{\varphi}_i$ va fi (fig. 13.20, *f*)

$$\bar{M}_i + \bar{M}_{ih} + \bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ik} + \bar{M}_{il} = 0$$

$$\text{sau} \quad M_i = -(M_{ih} + M_{ij} + M_{ik} + M_{il}) \tag{13.21}$$

în care momentele pe capetele barelor au fost presupuse pozitive pentru ca din calcule să rezulte cu semnul real. Ultima relație arată că momentul neechilibrat se repartizează sau se distribuie cu semn schimbat pe capetele barelor din nod. Concluzia este valabilă fie că se consideră momentele care acționează pe nod, fie că se consideră momentele care acționează pe bară. Explicația este că atît momentul neechilibrat, dat de suma momentelor pe bară cînd cadrul este blocat, cît și momentele care acționează pe bară din rotirea nodului au semn contrar față de cele care acționează pe nod.

Toate capetele de bară din nod avînd aceeași rotire cu nodul $\bar{\varphi}_i$ și ținînd seama de relația stabilită în paragraful anterior ($M = \rho\varphi$) care dă momentul în capătul barei datorită rotirii acestui capăt, rezultă că rotirea nodului va fi

$$\bar{\varphi}_i = \frac{\bar{M}_{ih}}{\rho_{ih}} = \frac{\bar{M}_{ij}}{\rho_{ij}} = \frac{\bar{M}_{ik}}{\rho_{ik}} = \frac{\bar{M}_{il}}{\rho_{il}} = \frac{\bar{M}_{ih} + \bar{M}_{ij} + \bar{M}_{ik} + \bar{M}_{il}}{\rho_{ih} + \rho_{ij} + \rho_{ik} + \rho_{il}} = -\frac{\bar{M}_i}{\rho_i} \tag{13.22}$$

în care s-a notat $\rho_i = \rho_{ih} + \rho_{ij} + \rho_{ik} + \rho_{il}$ coeficientul de rigiditate al nodului.

Din relația anterioară rezultă valoarea momentelor distribuite pe capetele de bară din nod datorate rotirii nodului produsă de momentul neechilibrat

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ih} &= -\frac{\rho_{ih}}{\rho_i}\bar{M}_i = d_{ih}\bar{M}_i \\ \bar{M}_{ij} &= -\frac{\rho_{ij}}{\rho_i}\bar{M}_i = d_{ij}\bar{M}_i \\ \bar{M}_{ik} &= -\frac{\rho_{ik}}{\rho_i}M_i = d_{ik}\bar{M}_i \\ \bar{M}_{il} &= -\frac{\rho_{il}}{\rho_i}\bar{M}_i = d_{il}\bar{M}_i \end{aligned} \tag{13.23}$$

în care $d_{ij} = -\rho_{ij}/\rho_i$ este coeficientul de distribuție sau repartiție în capătul *i* pe bara *i—j* și care arată că momentul neechilibrat se distribuie cu semn schimbat pe capetele de bară din nod, proporțional cu rigiditatea barelor. Coeficienții de distribuție de pe capetele de bară dintr-un nod se bucură de proprietatea

$$\sum_i d_{ij} = d_{ih} + d_{ij} + d_{ik} + d_{il} = -\frac{\rho_{ih}}{\rho_i} - \frac{\rho_{ij}}{\rho_i} - \frac{\rho_{ik}}{\rho_i} - \frac{\rho_{il}}{\rho_i} = -1 \tag{13.24}$$

ceea ce reprezintă de fapt condiția de echilibru pusă nodului *i* după deblocare.

Prin rotirea nodului, barele concurente în nod se deformează și deci vor apărea momentele încovoietoare și în celelalte capete încastrate în sistemul de bază. Pentru bara dublu încastrată cu secțiune constantă, s-a arătat în paragraful precedent că rotirea secțiunii într-un capăt produce în celălalt capăt un moment (fig. 13.20, *d*)

$$\bar{M}_{ji} = \frac{1}{2}\rho_{ij}\bar{\varphi}_i = \frac{1}{2}\bar{M}_{ij} = \frac{1}{2}d_{ij}\bar{M}_i$$

adică momentul distribuit se transmite în celălalt capăt printr-un coeficient de transmitere a momentelor $t_{ij} = 1/2$.

La fiecare deblocare de nod, chiar dacă nodurile adiacente sînt în echilibru, vor apărea pe ele momente neechilibrate provenite din momentele transmise și deci operațiile de deblocare se vor relua cu toate că nodurile au mai fost deblocate. Aceste operații care, din punct de vedere matematic, repre-

zintă aproximații succesive (iterații) sînt convergente deoarece momentele neechilibrate scad cu fiecare deblocare de nod atît prin operația de distribuție (coeficienții de distribuție sînt subunitari) cît și prin operația de transmitere.

13.9.2. APLICAREA PROCEDEULUI CROSS LA CADRE CU NODURI FIXE

Calcule preliminare. Pentru efectuarea operațiilor rezultate în paragraful precedent sînt necesare următoarele calcule :

— calculul momentelor de inerție ale secțiunilor barelor și raportarea lor la unul dintre ele (de obicei cel mai mic) ;

— calculul coeficienților de rigiditate ai barelor, $\rho = I/l$ pentru bare dublu încastrate cu $\rho = (3/4)I/l$ pentru bare încastrate și articulate ;

— calculul coeficienților de distribuție pe capetele barelor la fiecare nod, $d_{ij} = -\rho_{ij}/\rho_i$;

— calculul momentelor de încastrate perfectă $\mathfrak{M}$ din încărcări pe sistemul de bază.

Efectuarea iterațiilor. Din prezentarea făcută în paragraful precedent rezultă că acest procedeu comportă trei operații care se efectuează pe schema cadrului :

— înscrierea pe capetele barelor a momentelor de încastrare perfectă care reprezintă valori inițiale ;

— distribuția momentelor neechilibrate ;

— transmiterea momentelor distribuite.

Ultimele două operații corespund deblocării cîte unui nod și se vor repeta pentru fiecare deblocare succesivă a nodurilor.

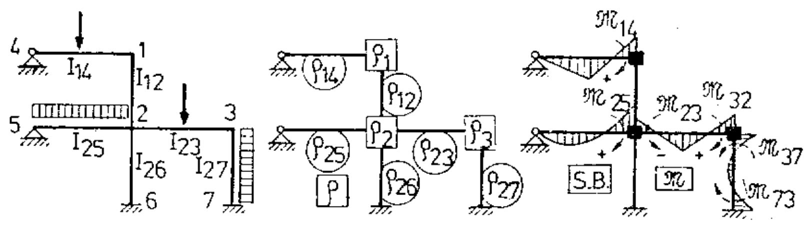


Fig. 13.21.

Efectuarea acestor operații pentru cadrul din fig. 13.21 este prezentată pe schema de calcul din fig. 13.22. Calculele preliminare sînt presupuse efectuate.

Presupunînd că se deblochează primul nodul *1*, momentul neechilibrat $\bar{M}'_1 = \mathfrak{M}_{14}$ rotește nodul distribuindu-se pe capetele barelor din nod, $\bar{M}'_{14} = d_{14}\bar{M}'_1$; $\bar{M}'_{12} = d_{12}\bar{M}'_1$ valori care se înscriu în coloanele momentelor respective. Nodul s-a echilibrat și se reblochează, lucru care se marchează în schema de calcul (fig. 13.22) prin bararea cu o linie peste momentele distribuite. Momentele distribuite se transmit la celelalte capete de bară încastrate, indicîndu-se acest lucru în schemă printr-o săgeată. Astfel, în capătul *2* pe bara *1—2* se transmite $1/2\ d_{12}\bar{M}_1$.

Cu indicele prim s-au notat momentele la prima deblocare a nodului. Dacă nodul următor care se deblochează este nodul *3*, momentul neechilibrat $\bar{M}'_3 = \mathfrak{M}_{32} + \mathfrak{M}_{37}$ se repartizează pe capetele de bară cu valorile $\bar{M}'_{32} = d_{32}\bar{M}'_3$, $\bar{M}'_{37} = d_{37}\bar{M}'_3$.

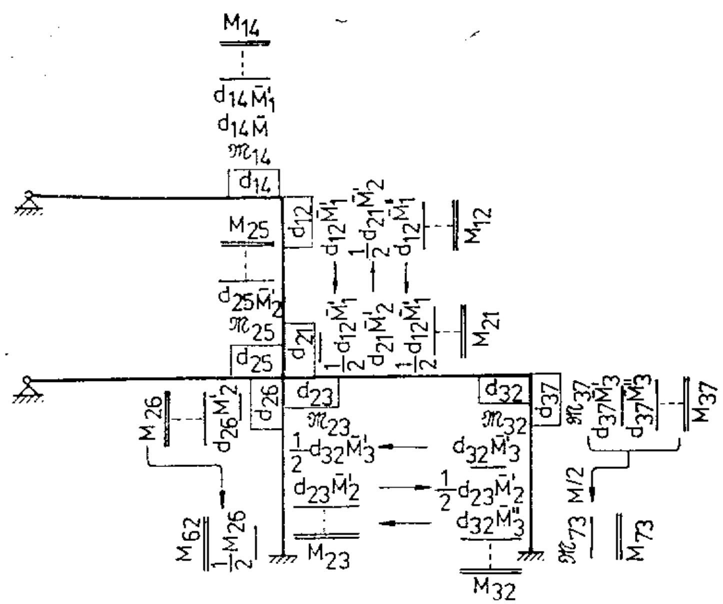


Fig. 13.22.

Se reblochează nodul barîndu-se cu o linie peste momentele distribuite care se transmit pe jumătate în celelalte capete încastrate ale barelor. Trecînd apoi la deblocarea nodului *2*, momentele neechilibrate va conține afară de momentele de încastrare perfectă și momentele transmise prin deblocarea nodurilor adiacente $\bar{M}'_2 = \mathfrak{M}_{25} + \mathfrak{M}_{23} + \frac{1}{2}d_{12}\bar{M}'_1 + \frac{1}{2}d_{32}\bar{M}'_3$. Urmează cele două operații corespunzătoare deblocării nodului, distribuția și transmiterea. Prin transmiterea la nodurile *1* și *3* a momentelor distribuite pe barele din nodul *2*, aceste noduri devin din nou neechilibrate și deci trebuie reluate deblocările succesive. Operațiile de distribuție și transmitere se vor continua pînă cînd valorile distribuite ajung la circa 1—2% din momentele de încastrare perfectă. După prima deblocare a fiecărui nod, momentele neechilibrate vor conține numai momente transmise care se află în afara liniilor care marchează echilibrul nodurilor după o deblocare. Prin însumarea coloanelor respective se obțin momentele la capetele tuturor barelor cu semnele în noua convenție, cu ajutorul cărora se reprezintă diagrama de momente încovoietoare de partea fibrei întinse.

Observații :

— Pentru a mări rapiditatea convergenței, este indicat ca ordinea de deblocare a nodurilor să cuprindă momentele neechilibrate mai mari.

— Ultima operație pentru fiecare nod trebuie să fie distribuția pentru că în final nodurile trebuie să fie în echilibru, deci la ultimul rînd de deblocări nu se mai fac transmiteri.

— Pentru barele care leagă un nod elastic și o încastrare perfectă (la teren) transmiterea se face într-un singur sens de la nodul elastic la încastrarea perfectă. La astfel de bare este bine să se facă transmiterea o singură dată în final, transmițînd suma momentelor distribuite (vezi pe schemă transmiterea de la *2* la *6* și de la *3* la *7*). Nu se transmit momente de încastrare perfectă.

— Pentru un cadru cu noduri fixe încărcat cu forțe concentrate numai la noduri, momentele de încastrare fiind nule, și diagrama finală de momente va fi nulă.

13.9.3. VERIFICAREA DIAGRAMEI DE MOMENTE

Echilibrul nodurilor nu reprezintă o verificare deoarece după fiecare deblocare, nodurile sînt în echilibru. Verificarea se poate face fie ca la metoda eforturilor, fie într-un mod specific acestui procedeu și anume, condiția de compatibilitate a deformatei impune ca toate capetele de bare dintr-un nod să aibă aceeași rotire sau rotirea capătului încastrat perfect al unei bare să fie nulă. Aceste rotiri pot fi calculate pe baza relațiilor între momentele de capăt, încărcări și rotirile secțiunilor de capăt stabilite în paragraful 13.6.

Pentru o bară dublu încastrată $i-j$, rotirile secțiunilor de capăt rezultă din rezolvarea sistemului de ecuații

$$M_{ij} = \mathfrak{M}_{ij} + \rho_{ij}\varphi_i + \frac{1}{2}\rho_{ij}\varphi_j$$
$$M_{ji} = \mathfrak{M}_{ji} + \frac{1}{2}\rho_{ij}\varphi_i + \rho_{ij}\varphi_j \qquad (13.25)$$

de unde:

$$\varphi_i = \frac{4(M_{ij} - \mathfrak{M}_{ij}) - 2(M_{ji} - \mathfrak{M}_{ji})}{3\rho_{ij}}$$
$$\varphi_j = \frac{4(M_{ji} - \mathfrak{M}_{ji}) - 2(M_{ij} - \mathfrak{M}_{ij})}{3\rho_{ij}}. \qquad (13.26)$$

Pentru bara încastrată și articulată $i-h$ rotirile rezultă din relația

$$M_{ih} = \mathfrak{M}_{ih} + \rho_{ih}\varphi_i, \quad \text{și anume}$$
$$\varphi_i = \frac{M_{ih} - \mathfrak{M}_{ih}}{\rho_{ih}}. \qquad (13.26a)$$

Astfel, verificarea rezultatelor din schema din fig. 13.22, punînd condiția egalității rotirilor capetelor de bară din nodul *2* de exemplu, va fi

$$\frac{4(M_{21} - \mathfrak{M}_{21}) - 2(M_{12} - \mathfrak{M}_{12})}{3\rho_{12}} = \frac{4(M_{23} - \mathfrak{M}_{23}) - 2(M_{32} - \mathfrak{M}_{32})}{3\rho_{23}} =$$
$$= \frac{4(M_{26} - \mathfrak{M}_{26}) - 2(M_{62} - \mathfrak{M}_{62})}{3\rho_{26}} = \frac{M_{25} - \mathfrak{M}_{25}}{\rho_{25}}.$$

13.10. REZOLVAREA PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE A CADRELOR CU NODURI DEPLASABILE. CALCULUL ÎN DOUĂ ETAPE

Procedeul Cross a fost demonstrat și se aplică la cadre cu noduri fixe. Acest procedeu poate fi folosit și pentru cadre cu noduri deplasabile însă de fapt se rezolvă prin procedeul Cross cadrul cu noduri fixe obținut din cadrul real prin blocarea gradelor de libertate elastice care definesc translațiile nodurilor. Pentru prezentarea procedeului, se consideră cadrul cu două grade de libertate din fig. 13.23, *a*.

Trecerea de la sistemul de bază cu nodurile complet blocate la rotiri și la translații (grade de libertate elastice) din fig. 13.23, *c*, la cadrul real cu noduri deplasabile (fig. 13.23, *a*) se poate face deblocînd întîi nodurile la rotiri ajungînd la cadrul cu noduri fixe din fig. 13.23, *b* și apoi deblocînd și pendulii *a* și *b* care blochează gradele de libertate elastice. Se ajunge astfel la calculul cadrelor cu noduri deplasabil în două etape:

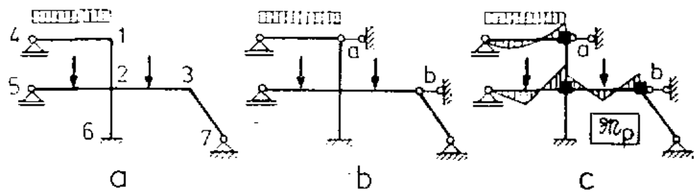


Fig. 13.23.

Etapa I. Pentru a trece de la cadrul cu noduri fixe (fig. 13.23, *b*) la deformata cadrului real, se aplică pe cadrul cu noduri fixe încărcările exterioare date și translațiile elastice ale nodurilor corespunzătoare rotirilor de bare date de cele două grade de libertate *a* și *b*. Determinarea diagramelor de momente din aceste încărcări pe cadrul cu noduri fixe se poate face prin procedeul distribuției și transmiterii momentelor plecînd de la sistemul de bază cu nodurile complet blocate (fig. 13.23. *c*).

Rezolvînd cadrul cu noduri fixe la încărcare cu forțe exterioare prin procedeul Cross, așa cum s-a arătat în paragraful anterior, se obține diagrama de momente M_p^0.

Deoarece nu se cunosc valorile reale ale translațiilor de noduri corespunzătoare gradelor de libertate elastice, se va încărca cadrul cu noduri fixe cu deplasări unitare ($Z_a = 1$, $Z_b = 1$) pentru parametrii care definesc rotirile barelor în cele două grade de libertate. Rezolvarea cadrului cu noduri fixe la aceste încărcări prin procedeul Cross se face la fel ca la încărcarea cu forțe, diferența constînd numai în determinarea momentelor de încastrare perfectă. Încărcînd sistemul de bază cu translații de noduri corespunzătoare gradelor de libertate elastice $Z_a = 1$ și $Z_b = 1$, barele se rotesc fără ca nodurile să se rotească. Barele se deformează corespunzător rotirii lor, apărînd momente de încastrare perfectă, care se determină cu formulele stabilite în paragraful 13.3, și anume $-(3/2)\rho\psi$ pentru bare dublu încastrate și $-\rho\psi$ pentru barele încastrate și articulate.

Rotirile barelor pentru fiecare grad de libertate $Z_a = 1$ sau $Z_b = 1$ se determină dînd o rotire unitară la una dintre bare pe mecanismul cu un grad de libertate obținut din sistemul auxiliar articulat al sistemului de bază, la care se suprimă numai pendulul care blochează gradul de libertate respectiv. În fig. 13.24, *a* și *d* se arată obținerea acestor rotiri pentru $Z_a = 1$ și respectiv $Z_b = 1$, pe baza cărora rezultă deformata sistemului de bază din fig. 13.24, *b* și *c* corespunzător încărcării cu gradele de libertate elastice $Z_a = 1$ și $Z_b = 1$.

Cu relațiile amintite care dau momentele la capetele celor două tipuri de bară ale sistemului de bază din rotiri de bare se determină momentele de încastrare perfectă (fig. 13.24 *e*, *f*). Folosind aceste momente de încastrare perfectă ca valori inițiale, se determină prin procedeul Cross diagramele de momente m_a și m_b din încărcarea cadrului cu noduri fixe (fig. 13.24, *b*) cu gradele de libertate elastice $Z_a = 1$ și respectiv $Z_b = 1$.

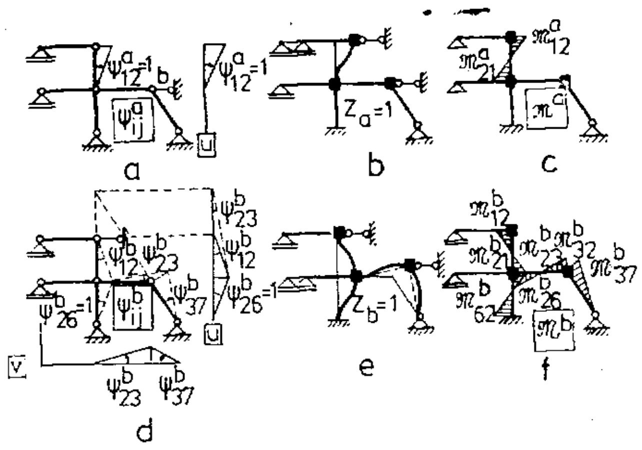


Fig. 13.24.

Diagrama finală pe cadrul cu noduri deplasabile se obține prin suprapunerea diagramelor din cele trei încărcări, forțe exterioare și grade de libertate elastice Z_a și Z_b necunoscute

$$M = M_p^0 + m_a Z_a + m_b Z_b.$$

Etapa II. Problema care se pune este determinarea valorii parametrilor Z_a și Z_b care definesc deplasările gradelor de libertate. Pentru aceasta, se folosesc condițiile de echilibru pentru sistemul auxiliar articulat al sistemului real cu noduri deplasabile, ceea ce echivalează cu a pune condițiile de reacțiuni nule în penduli, care împiedică gradele de libertate deoarece aceștia nu există în sistemul real (v. fig. 13.23, *a*). Sistemul articulat, obținut din sistemul real prin introducerea de articulații în toate nodurile și încastrările, încărcat cu valorile reale ale momentelor la capetele barelor M_{ij}, și forțele exterioare trebuie să fie în echilibru (fig. 13.25). Echilibrul acestui sistem poate fi exprimat pe baza principiului lucrului mecanic virtual prin deplasările virtuale corespunzătoare celor două grade de libertate cinematice $Z_a = 1$ și respectiv $Z_b = 1$ (fig. 13.25, *a*, *d*)

$$\sum (M_{ij} + M_{ij})\psi_{ij}^a + \sum P\delta_p^a = 0 ; \sum (M_{ij} + M_{ji})\varphi_{ij}^b + \sum P\delta_p^b = 0$$

în care primul termen reprezintă lucrul mecanic al momentelor reale prin rotirile barelor și al doilea termen reprezintă lucrul mecanic al forțelor exterioare prin deplasările pe direcțiile lor.

Momentele la capetele barelor s-a arătat că se pot scrie

$$M_{ij} = M_{ij.p}^0 + m_{ij}^a Z_a + m_{ij}^b Z_b \text{ și } M_{ji} = M_{ji.p}^0 + m_{ji}^a Z_a + m_{ji}^b Z_b$$

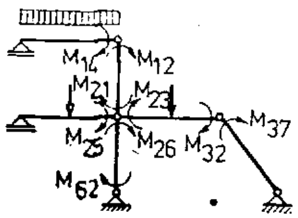


Fig. 13.25.

și deci condițiile de echilibru se pot scrie

$$[\sum (m_{ij}^a + m_{ji}^a)\psi_{ij}^a] Z_a + [\sum (m_{ij}^b + m_{ji}^b)\psi_{ij}^a] Z_b + \sum (M_{ij.p}^0 + M_{ji.p}^0)\psi_{ij}^a + \sum P\delta_p^a = 0$$

$$[\sum (m_{ij}^a + m_{ji}^a)\psi_{ij}^b] Z_a + [\sum (m_{ij}^b + m_{ji}^b)\psi_{ij}^b] Z_b + \sum (M_{ij.p}^0 + M_{ji.p}^0)\psi_{ij}^b + \sum P\delta_p^b = 0$$

sau

$$l_{aa}Z_a + l_{ab}Z_b + L_{ap} = 0$$

$$l_{ba}Z_a + l_{bb}Z_b + L_{bp} = 0$$

în care notațiile adoptate au semnificațiile: $l_{ba} = \sum (m_{ij}^a + m_{ji}^a)\psi_{ij}^b$ — lucrul mecanic al momentelor de capăt din încărcarea cadrului cu noduri fixe cu gradul de libertate elastic $Z_a = 1$ prin deplasările corespunzătoare gradului de libertate cinematic $Z_b = 1$; $L_{ap} = \sum (M_{ij.p}^0 + M_{ji.p}^0)\psi_{ij}^a + \sum P\delta_p^a$ — lucrul mecanic al momentelor de capăt din încărcarea cadrului cu noduri fixe cu forțele exterioare și lucrul mecanic al forțelor exterioare prin deplasările corespunzătoare gradului de libertate cinematic $Z_b = 1$.

Din sistemul de ecuații stabilit rezultă valorile parametrilor care definesc deplasările elastice Z_a și Z_b cu care se determină valorile finale ale momentelor la capetele barelor

$$M = M_p^0 + m_a Z_a + m_b Z_b.$$

Aplicația 13.4. Pentru cadrul unei estacade din beton armat (fig. 13.26) să se determine diagrama de momente încovoietoare prin procedeul Cross

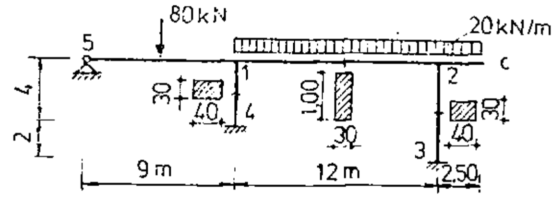


Fig. 13.26.

$$I_{15} = I_{12} = \frac{0,3 \cdot 1,00^3}{12} = 0,025 \text{ m}^4 = 15,6I$$

$$I_{14} = I_{23} = \frac{0,3 \cdot 0,4^3}{12} = 0,0016 \text{ m}^4 = I.$$

1) Necunoscute, sistem de bază. Cadrul avînd două noduri rigide (*1* și *2*), numărul necunoscutelor rotiri de nod este egal cu doi, $N_\varphi = 2$.

Pe sistemul auxiliar articulat (fig. 13.27) rezultă

$N_\theta = 2n - (b + r) = 2 \cdot 5 - (4 + 6) = 0$, deci cadrul este cu noduri fixe, neavînd necunoscute grade de libertate (translații de noduri).

Sistemul de bază obținut prin blocarea rotirilor este reprezentat în fig. 13.28.

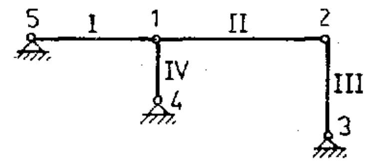


Fig. 13.27.

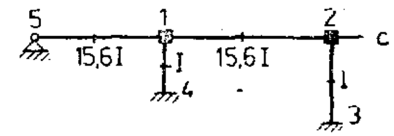


Fig. 13.28.

2) Calculul coeficienţilor de rigiditate

$$\rho_{15} = \frac{3}{4}\frac{I_{15}}{l_{15}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{15{,}6\,I}{9{,}00} = 7{,}8 \text{ unde } I = 6$$

$$\rho_{12} = \frac{I_{12}}{l_{12}} = \frac{15{,}6\,I}{12{,}00} = 7{,}8\,;\quad \rho_{14} = \frac{I_{14}}{l_{14}} = \frac{I}{4{,}00} = 1{,}5\,;$$

$$\rho_{23} = \frac{I_{23}}{l_{23}} = \frac{I}{6{,}00} = 1{,}0.$$

$$\rho_1 = \rho_{15} + \rho_{12} + \rho_{14} = 7{,}8 + 7{,}8 + 1{,}5 = 17{,}1$$

$$\rho_2 = \rho_{12} + \rho_{23} = 7{,}8 + 1 = 8{,}8$$

3) Calculul coeficienţilor de distribuţie

Nodul *1*

$$d_{15} = -\frac{\rho_{15}}{\rho_1} = -\frac{7{,}8}{17{,}1} = -0{,}456$$

$$d_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\rho_1} = -\frac{7{,}8}{17{,}1} = -0{,}456$$

$$d_{14} = -\frac{\rho_{14}}{\rho_1} = -\frac{1{,}5}{17{,}1} = -0{,}088$$

Nodul *2*

$$d_{21} = -\frac{\rho_{12}}{\rho_2} = -\frac{7{,}8}{8{,}8} = -0{,}886$$

$$d_{23} = -\frac{\rho_{23}}{\rho_2} = -\frac{1{,}0}{8{,}8} = -0{,}114$$

Coeficienţii de distribuţie ai momentelor neechilibrate satisfac în fiecare nod condiţia $\sum_i d_{ij} = -1$.

4) Calculul momentelor de încastrare perfectă:

$$\mathcal{M}_{15} = +\frac{3Pl_{15}}{16} = \frac{3\cdot 80\cdot 9{,}0}{16} = +135 \text{ kN·m}$$

$$\mathcal{M}_{12} = -\mathcal{M}_{21} = -\frac{pl_{12}^2}{12} = -\frac{20\cdot 12{,}0^2}{12} = -240 \text{ kN·m}$$

$$\mathcal{M}_{2c} = -20\cdot 2{,}5\cdot\frac{2{,}5}{2} = -62{,}5 \text{ kN·m}.$$

Diagrama momentelor de încastrare perfectă cu semne pe capete de bară este prezentată în fig. 13.29.

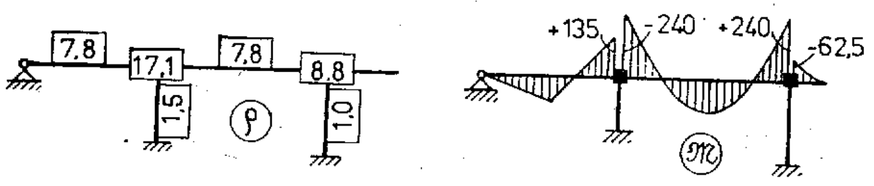


Fig. 13.29.

5) Determinarea diagramei de momente încovoietoare. Schema de calcul pe care se execută operaţiile de iteraţie este dată în fig. 13.30. Pe schemă se înscriu coeficienţii de distribuţie în jurul nodurilor şi de asemenea momentele de încastrare perfectă pe capăt de bară pentru fiecare bară încărcată. Se deschid coloanele de calcul corespunzătoare fiecărei extremităţi de bară, pornind cu valorile momentelor de încastrare perfectă. Se începe apoi echilibrarea nodurilor în ordinea indicată în tabelul din fig. 13.30.

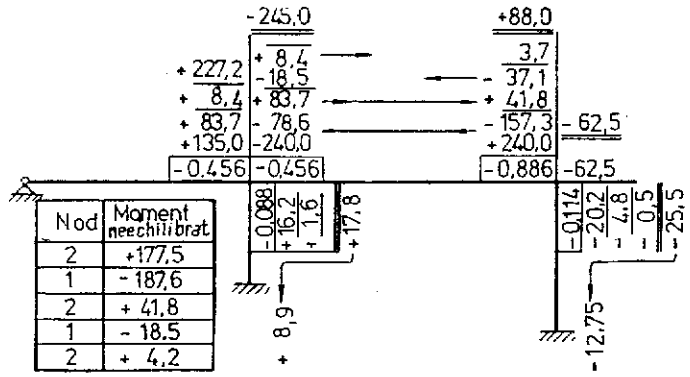


Fig. 13.30.

Momentul neechilibrat cel mai mare în valoare absolută este cel din nodul *2* şi are valoarea: $+240 - 62{,}5 = +177{,}5$; prin multiplicare cu coeficienţii de distribuţie rezultă momentele distribuite:

— pentru bara *2—1*: $+177{,}5\cdot(-0{,}886) = -157{,}3$;

— pentru bara *2—3*: $+177{,}5\cdot(-0{,}114) = -20{,}2$.

Se verifică condiţia ca suma momentelor distribuite în jurul unui nod să fie egală cu momentul neechilibrat $-157{,}3 - 20{,}2 + 177{,}5 = 0$.

Momentele distribuite se transmit în extremităţile de bare de la nodurile vecine:

— pentru bara *1—2*: $-157{,}3\cdot 0{,}5 = -78{,}6$;

— pentru bara *2—3*: transmiterea spre reazem se amînă pentru sfîrşit, deoarece în capătul *2* nu apar decît momente distribuite pentru care se poate transmite suma lor.

Cu aceste operaţii echilibrarea nodului *2* este terminată şi pentru a marca acest lucru se trag linii în coloanele din jurul nodului.

Se trece la nodul *1* unde momentul neechilibrat este: $+135{,}0 - 240 - 78{,}6 = -183{,}6$; acesta se distribuie celor trei bare din nod:

— pentru bara *1—5*: $-183{,}6\cdot(-0{,}456) = +83{,}7$;

— pentru bara *1—4*: $-183{,}6\cdot(-0{,}088) = +16{,}2$;

— pentru bara *1—2*: $-183{,}6\cdot(-0{,}456) = +83{,}7$.

Se verifică condiţia ca suma momentelor distribuite în jurul nodului să fie egală cu momentul neechilibrat $+83{,}7 + 16{,}2 + 83{,}7 - 183{,}6 = 0$.

După echilibrarea nodului *1* se face transmiterea momentelor distribuite în extremităţile de bare de la nodurile vecine:

— pentru bara *2—1*: $+83{,}7\cdot 0{,}50 = +41{,}8$;

— pentru bara *4—1*: transmiterea spre reazem se amînă pentru sfîrşit.

Se revine la nodul *2* unde momentul neechilibrat este $+41{,}8$; se efectuează operaţia de echilibrare a nodului şi de transmitere a momentelor distribuite, apoi se trece succesiv la celelalte noduri repetînd operaţiile de echilibrare şi transmitere pînă cînd momentele distribuite devin neglijabile.

În cazul analizat s-a ajuns la acest rezultat după trei echilibrări ale nodului 2 (circa 1% din valoarea inițială).

Pentru a obține valorile totale ale momentelor de capăt se însumează fiecare coloană de calcul.

6) Verificarea diagramei M. Se face pe baza condiției ca deplasarea pe orizontală a nodurilor riglei să fie nulă, cadrul fiind cu noduri fixe. Folosind calculul redus al deplasărilor, conform formulei Maxwell-Mohr se integrează diagrama M reală (fig. 13.31), cu diagrama de momente încovoietoare m^0 din forță virtuală unitară (fig. 13.32), obținută pe un sistem static determinat convenabil ales

$$EIu_r = (17{,}8\cdot 4\cdot 4)/6 - (8{,}9\cdot 4\cdot 4)/3 = 0.$$

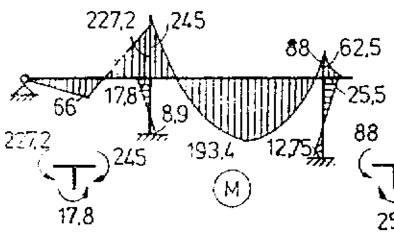


Fig. 13.31.

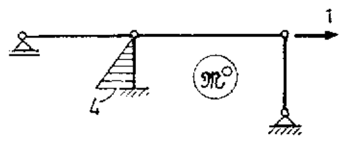


Fig. 13.32.

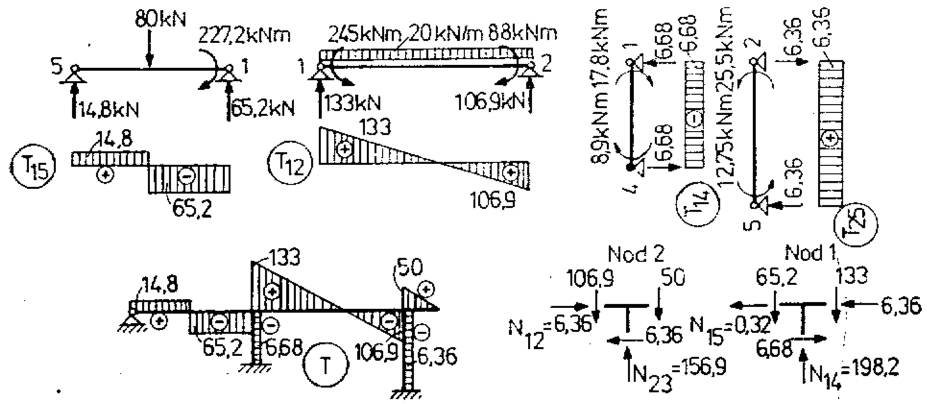


Fig. 13.33.

7) Determinarea diagramelor de forțe tăietoare și forță axială. Obținerea diagramei T pe baza diagramei M este prezentată în fig. 13.33. Diagrama N obținută pe baza diagramei T utilizînd condițiile de echilibru ale nodurilor este prezentată în fig. 13.34.

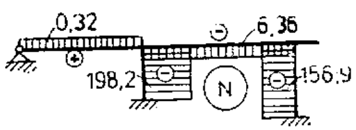


Fig. 13.34.

Aplicația 13.5. Să se traseze diagrama de momente încovoietoare pentru cadrul cu noduri deplasabile din fig. 13.35, *a* folosind procedeul rezolvării în două etape.

Cadrul este cu noduri deplasabile avînd două grade de libertate. În prima etapă

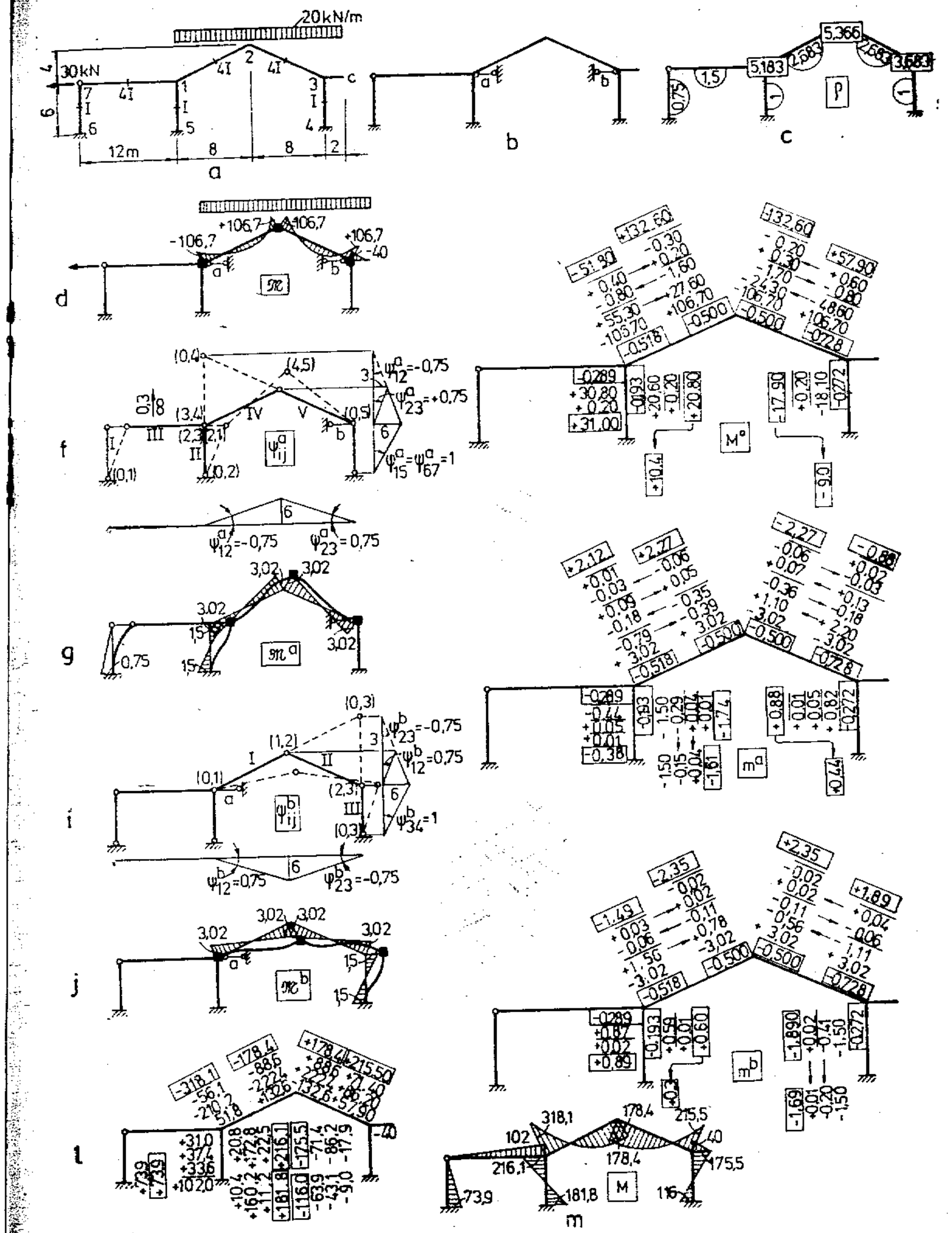


Fig. 13.35.

se rezolvă cadrul cu noduri fixe din fig. 13.35, b la acțiunea încărcărilor date și a încărcărilor cu grade de libertate unitare, $Z_a = 1$, $Z_b = 1$, folosind unul din procedeele iterative pentru cadre cu noduri fixe, de exemplu procedeul Cross.

Coeficienții de rigiditate (fig. 15.35, c) pentru $EI = 1{,}5$ sînt:

$$\rho_{15} = \rho_{34} = \frac{4EI}{6} = 1\,; \quad \rho_{67} = \frac{3EI}{6} = 0{,}75\,; \quad \rho_{17} = \frac{3E\cdot 4I}{12} = 1{,}5\,;$$

$$\rho_{12} = \rho_{23} = \frac{4EI\cdot 4I}{8{,}94} = 2{,}683.$$

Coeficienții de distribuție pentru momente neechilibrate:

$$\text{Nodul } 1 \begin{cases} d_{17} = -\dfrac{1{,}5}{5{,}183} = -0{,}289 \\ d_{12} = -\dfrac{2{,}683}{5{,}183} = -0{,}518 \\ d_{15} = -\dfrac{1}{5{,}183} = -0{,}193 \end{cases} \qquad \sum d = -1$$

$$\text{Nodul } 2 \begin{cases} d_{21} = -\dfrac{2{,}683}{5{,}366} = -0{,}5 \\ d_{23} = -\dfrac{2{,}683}{5{,}366} = -0{,}5 \end{cases} \qquad \sum d = -1$$

$$\text{Nodul } 3 \begin{cases} d_{32} = -\dfrac{2{,}683}{3{,}683} = -0{,}728 \\ d_{34} = -\dfrac{1}{3{,}683} = -0{,}272 \end{cases} \qquad \sum d = -1.$$

Etapa I. Folosind sistemul de bază geometric determinat (fig. 13.35, d), se calculează diagramele de momente pe cadrul cu noduri fixe din:

— Încărcările exterioare date. Momentele de încastrare perfectă din încărcări sînt: $-\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21} = -\mathfrak{M}_{23} = \mathfrak{M}_{32} = 20\cdot 8^2/12 = 106{,}7$; $\mathfrak{M}_{3c} = -40$. Cu ele ca valori inițiale, folosind procedeul Cross, se obțin momentele M° pe cadrul cu noduri fixe (fig. 13.35, e).

— Încărcare cu gradul de libertate elastic $Z_a = 1$. Se determină rotirile de bare ψ^a_{ij} (fig. 13.35, f), pe sistemul articulat al sistemului de bază la care se suprimă pendulul a, dînd la o bară o rotire unitară ($\psi^a_{15} = 1$). Se calculează momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}^a$ din rotirile de bare corespunzătoare gradului de libertate elastic $Z_a = 1$ (fig. 13.35, g):

$$\mathfrak{M}^a_{67} = -0{,}75\cdot 1 = -0{,}75\,; \quad \mathfrak{M}^a_{15} = \mathfrak{M}^a_{51} = -1{,}5\cdot 1\cdot 1 = -1{,}50$$

$$\mathfrak{M}^a_{12} = \mathfrak{M}^a_{21} = -1{,}5\cdot 2{,}683(-0{,}75) = +3{,}02\,;$$

$$\mathfrak{M}^a_{23} = \mathfrak{M}^a_{32} = -1{,}5\cdot 2{,}683(0{,}75) = -3{,}02.$$

Cu aceste momente ca valori inițiale, folosind procedeul Cross, se obțin momentele m^a din încărcarea cadrului cu noduri fixe cu deplasarea elastică $Z_a = 1$ (fig. 13.35, h).

— Încărcare cu gradul de libertate elastic $Z_b = 1$. Studiul cinematic din $Z_b = 1$ este prezentat în fig. 13.35, i. Momentele de încastrare perfectă $\mathfrak{M}^b$ din $Z_b = 1$ (fig. 13.35, j) sînt:

$$\mathfrak{M}^b_{34} = \mathfrak{M}^b_{43} = -1{,}5\cdot 1\cdot 1 = -1{,}5\,; \quad \mathfrak{M}^b_{12} = \mathfrak{M}^b_{21} = -1{,}5\cdot 2{,}683\cdot 0{,}75 = $$
$$= -3{,}02 = -\mathfrak{M}^b_{23} = -\mathfrak{M}^b_{32}.$$

Determinarea momentelor m^b din $Z_b = 1$ prin procedeul Cross se prezintă în fig. 13.35, k.

Etapa II. Se determină parametrii care definesc gradele de libertate Z_a și Z_b din condițiile de anulare a reacțiunilor în pendulii a și b:

$$l_{aa}Z_a + l_{ab}Z_b + L_{a0} = 0$$

$$l_{ba}Z_a + l_{bb}Z_b + L_{b0} = 0.$$

Coeficienții și termenii liberi vor fi:

$$l_{aa} = \sum (m^a_{ij} + m^a_{ji})\psi^a_{ij} = (-0{,}75)\cdot 1 + (-1{,}61 - 1{,}74)\cdot 1 + $$
$$+ (2{,}12 + 2{,}26)(-0{,}75) + (-2{,}27 - 0{,}88)(0{,}75) = -9{,}78$$

$$l_{bb} = \sum (m^b_{ij} + m^b_{ji})\psi^b_{ij} = (-1{,}69 - 1{,}89)\cdot 1 + (-1{,}49 - 2{,}35)(0{,}75) + $$
$$+ (2{,}35 + 1{,}89)(-0{,}75) = -9{,}66$$

$$l_{ab} = l_{ba} = \sum (m^a_{ij} + m^a_{ji})\psi^b_{ij} = (2{,}12 + 2{,}27)(0{,}75) + $$
$$(-2{,}27 - 0{,}88)(-0{,}75) + (0{,}44 + 0{,}88)\cdot 1 = 6{,}96$$

$$L_{a0} = \sum (M^0_{ij} + M^0_{ji})\psi^a_{ij} + \sum P\delta^a_p = (10{,}4 + 20{,}8)\cdot 1 + $$
$$+ (-51{,}8 + 132{,}6)(-0{,}75) + (-132{,}6 + 57{,}9)(0{,}75) + $$
$$+ (-20{,}8\cdot 3\cdot 2 - 30\cdot 6) = -1\,225{,}4$$

$$L_{b0} = \sum (M^0_{ij} + M^0_{ji})\psi^b_{ij} + \sum P\delta^b_p = (-51{,}8 + 132{,}6)(0{,}75) + $$
$$+ (-132{,}6 + 57{,}9)(-0{,}75) + (9 - 17{,}9)\cdot 1 + (20\cdot 8\cdot 3\cdot 2) = +1\,050.$$

Soluția sistemului de ecuații este: $Z_a = -98{,}5$; $Z_b = +37{,}7$.

Momentele finale la capetele barelor se obțin prin suprapunerea $M_{ij} = M^0_{ij} + m^a_{ij}Z_a + m^b_{ij}Z_b$ pe schema din fig. 13.35, l. Diagrama finală se prezintă în fig. 13.35, m.

Verificarea diagramei de momente pe baza principiului lucrului mecanic virtual luînd ca deplasare virtuală deplasările din $Z_b = 1$

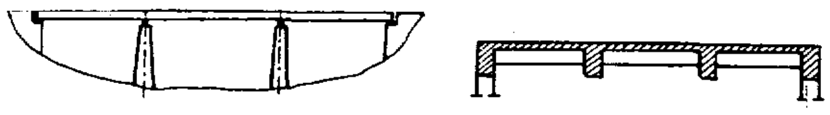
$$\sum (M_{ij} + M_{ji})\psi^b_{ij} + \sum P\delta^b_p = (-318{,}1 - 178{,}4)(0{,}75) + $$
$$+ (178{,}4 + 215{,}5)(-0{,}75) + (-116 - 175{,}5)\cdot 1 + (20\cdot 8\cdot 3\cdot 2) = $$
$$= -959{,}2 + 960 \approx 0.$$

14. Structuri particulare static nedeterminate

14.1. GRINZI CONTINUE

Grinda continuă este o grindă dreaptă pe mai multe reazeme, din care unul fix (articulaţie sau încastrare) şi restul mobile (reazeme simple). Grinzile continue se întîlnesc curent ca structuri de rezistenţă în construcţii, de exemplu la poduri (fig. 14.1, *a*), la planşee (fig. 14.1, *b*).

Tipul obişnuit de grindă continuă are un reazem articulat, care împiedică deplasările pe orizontală, şi restul reazemelor sînt simple (fig. 14.2, *a*). În unele cazuri, grinda continuă poate să aibă, la unul din capete, încastrare. Reazemele simple permit alungirea sau scurtarea liberă a grinzii continue. La încărcări după axa barei, grinda continuă este static determinată, iar la variaţii de temperatură în axa grinzii, nu apar eforturi. Pentru cele două tipuri de grinzi, cu reazem articulat sau cu încastrare (fig. 14.2), gradul de nedeterminare statică este $G_{ns} = n - 2$ respectiv $G_{ns} = n - 1$ unde n este numărul total de reazeme.



a b

Fig. 14.1.



$G_{ns} = n - 2$ $G_{ns} = n - 1$

a b

Fig. 14.2.

14.1.1. REZOLVAREA GRINZILOR CONTINUE PRIN METODA EFORTURILOR. ECUAŢIA CELOR TREI MOMENTE (ECUAŢIA LUI CLAPEYRON)

Aplicarea metodei eforturilor la grinzi continue conduce la o rezolvare sistematizată, în sensul că se obţin expresii tip pentru coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi, ecuaţiile de condiţie avînd aceeaşi formă generală.

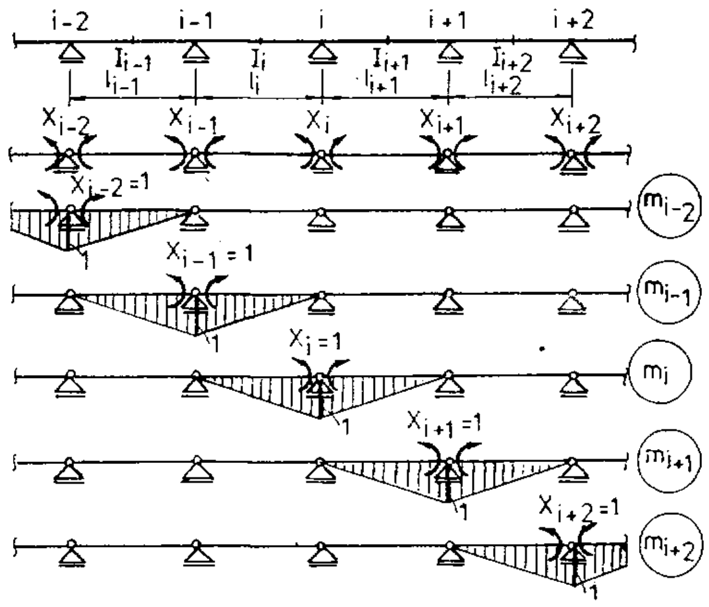


Fig. 14.3.

Stabilirea ecuaţiei celor trei momente. Se consideră o grindă continuă de *n* ori static nedeterminată. Pe baza observaţiilor din cap. 12, sistemul de bază cel mai convenabil se obţine prin suprimarea cîte unei legături în continuitatea grinzii pe reazemele intermediare. Sistemul de bază rezultat este format dintr-o succesiune de grinzi simplu rezemate. Necunoscute sînt momentele încovoietoare pe grinda continuă în secţiunile de pe reazemele suplimentare.

În fig. 14.3 s-a considerat numai o porţiune din această grindă, din sistemul de bază respectiv, şi se prezintă diagramele din necunoscute unitare. Momentele de inerţie se consideră constante pe fiecare deschidere.

Ecuaţiile de condiţie vor exprima restabilirea continuităţii grinzii pe reazeme, adică rotirea relativă a secţiunilor de pe un reazem pentru cele două travee adiacente trebuie să fie nulă. Se va urmări stabilirea ecuaţiei (*i*), în care necunoscuta principală X_i este momentul pe reazemul *i*, pentru cazul particular al grinzii continue

$$\text{(i)} \quad \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{i,\,i-1}X_{i-1} + \delta_{i,\,i}X_i + \delta_{i,\,i+1}X_{i+1} + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{i,0} = 0.$$

Cum, pentru sistemul de bază ales, diagramele din necunoscute unitare se extind numai pe cele două travee adiacente reazemului respectiv, rezultă că în ecuaţia (i) sînt diferiţi de zero numai coeficienţii $\delta_{i,\,i-1}$, $\delta_{i,i}$, $\delta_{i,\,i+1}$ şi deci ecuaţia se va prezenta sub forma:

$$\delta_{i,\,i-1}X_{i-1} + \delta_{i,\,i}X_i + \delta_{i,\,i+1}X_{i+1} + \Delta_{i,0} = 0. \tag{14.1}$$

Deoarece această ecuaţie conţine trei necunoscute momente, poartă numele de ecuaţia celor trei momente sau ecuaţia lui Clapeyron.

Diagramele din necunoscute unitare pe sistemul de bază avînd aceeași formă conduc la expresii tip pentru coeficienții necunoscutelor

$$\delta_{i,\,i-1} = \int \frac{m_i m_{i-1}}{EI}\,dx = \frac{1 \cdot l_i}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\,\frac{1}{EI_i} = \frac{l_i}{6EI_i}$$

$$\delta_{i,i} = \int \frac{m_i^2}{EI}\,dx = \frac{1 \cdot l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI_i} + \frac{1 \cdot l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI_{i-1}} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i-1}}$$

$$\delta_{i,\,i+1} = \int \frac{m_i m_{i+1}}{EI}\,dx = \frac{1 \cdot l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\,\frac{1}{EI_{i-1}} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i-1}}.$$

Înlocuind acești coeficienți în ecuație și multiplicînd ecuația cu 6 EI_0 (I_0 fiind arbitrar, de obicei se ia cel mai mic de pe structură) se obține

$$\frac{I_0}{I_i} l_i X_{i-1} + 2\left(\frac{I_0}{I_i} l_i + \frac{I_0}{I_{i+1}} l_{i+1}\right) X_i + \frac{I_0}{I_{i+1}} l_{i+1} X_{i+1} + 6EI_0\Delta_{i0} = 0$$

sau, notînd cu $\lambda_i = \frac{I_0}{I_i} \cdot l_i$ (deschidere rectificată sau redusă),

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) X_i + \lambda_{i+1} X_{i+1} + 6EI_0\Delta_{i0} = 0. \qquad (14.2)$$

Aceasta este forma tip a ecuației celor trei momente, care trebuie scrisă pentru fiecare reazem pe care există necunoscută moment ($i = 1, 2, \ldots, n$). Termenii liberi se vor stabili pentru fiecare fel de încărcare: cu forțe (Δ_{ip}), cu variații de temperatură (Δ_{it}) și cu cedări de reazeme (Δ_{ir}).

Încărcarea cu forțe. Termenul liber Δ_{ip} reprezintă rotirea relativă pe sistemul de bază a secțiunilor din stînga și din dreapta reazemului din încărcarea dată (fig. 14.4, *b*).

$$\Delta_{i0} = \Delta_{i0}^{st} + \Delta_{i0}^{dr}.$$

La încărcarea cu forțe se pot obține expresii tip pentru termenii liberi folosind metoda grinzii conjugate. Solicitînd grinda conjugată cu încărcarea elastică $\bar{p} = M_p^0$, rotirile relative se obțin ca reacțiuni (salt în diagrama de forțe tăietoare) pe sistemul conjugat

$$\Delta_{ip} = \frac{\bar{R}_{i,\,i-1}}{EI_i} + \frac{\bar{R}_{i,\,i+1}}{EI_{i+1}}$$

unde, de exemplu, $R_{i,\,i-1}$ reprezintă reacțiunea fictivă în i pe bara i, $i - 1$ din încărcarea cu diagrama de momente M_p^0 din forțele date. Sistemul de bază fiind format dintr-o succesiune de grinzi simplu rezemate, și sistemul conjugat va prezenta pe fiecare travee o grindă simplu rezemată pe care reacțiunile se calculează ușor (fig. 14.4, *c*).

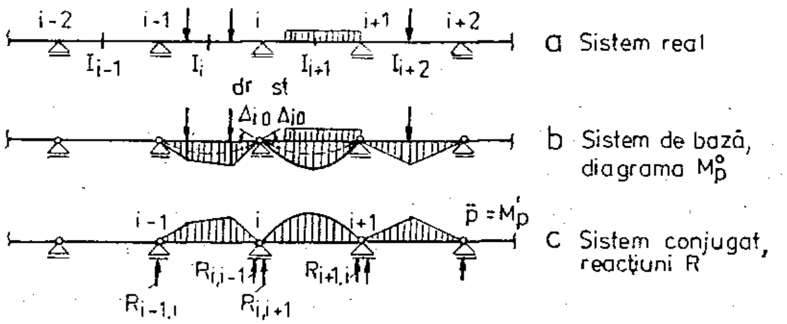


Fig. 14.4.

În ecuația multiplicată cu $6EI_0$, termenul liber va fi

$$6EI_0\Delta_{ip} = 6\frac{I_0}{I_i}\bar{R}_{i,\,i-1} + 6\frac{I_0}{I_{i+1}}\bar{R}_{i,\,i+1} =$$

$$= \frac{6\bar{R}_{i,\,i-1}}{l_i} \cdot \frac{I_0}{I_i} l_i + \frac{6\bar{R}_{i,\,i+1}}{l_{i+1}} \cdot \frac{I_0}{I_{i+1}} l_{i+1}$$

$$6EI_0\Delta_{ip} = m_{i,\,i-1}\lambda_i + m_{i,\,i+1}\lambda_{i+1}$$

în care s-a notat

$$m_{i,\,i-1} = \frac{6\bar{R}_{i,\,i-1}}{l_i};\quad m_{i,\,i+1} = \frac{6\bar{R}_{i,\,i+1}}{l_{i+1}} \qquad (14.3)$$

(m se numește termen de încărcare).

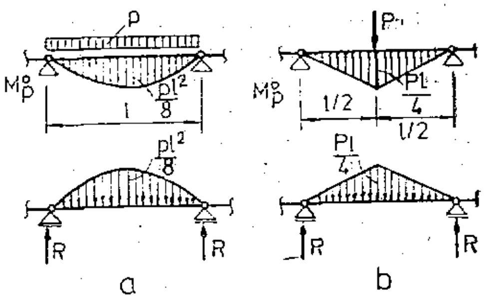


Fig. 14.5.

Rezultă că ecuația celor trei momente pentru solicitarea cu încărcări are următoarea formă

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) X_i + \lambda_{i+1} X_{i+1} + (m_{i,\,i-1}\lambda_i + m_{i,\,i+1}\lambda_{i+1}) = 0. \qquad (14.4)$$

Termenii de încărcare se determină pe baza expresiei lor, calculînd în prealabil reacțiunile fictive pe fiecare travee considerată simplu rezemată (sistemul conjugat al sistemului de bază) din încărcarea cu diagrama M_p^0 răsturnată. Se va urmări determinarea termenilor de încărcare pentru două cazuri de încărcare (fig. 14.5):

— pentru încărcare uniform distribuită (fig. 14,5, *a*)

$$\bar{R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{pl^2}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{pl^3}{24};\qquad m = \frac{6\bar{R}}{l} = \frac{pl^2}{4};$$

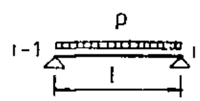
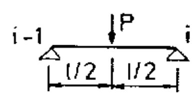
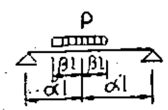
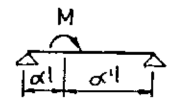
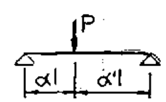
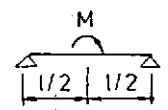
— pentru forță concentrată la mijlocul deschiderii (fig. 14.5, *b*)

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl^2}{16};\qquad m = \frac{6\bar{R}}{l} = \frac{3}{8} Pl.$$

În mod analog se pot calcula și alți termeni de încărcare dați în tabelul 14.1.

Tabelul **14.1**

Termeni de încărcare pentru grinzi cu secțiune constantă

Încărcarea	Termeni de încărcare	Încărcarea	Termeni de încărcare
	$m_{i-1,i} = m_{i,\,i-1} = \frac{pl^2}{4}$		$m_{i-1,i} = m_{i,\,i-1} = \frac{3}{8}\,pl$
	$m_{i-1,i} = 2\beta\alpha'(1 - \beta^2 - \alpha'^2)pl^2$ $m_{i,i-1} = 2\beta\alpha(1 - \beta^2 - \alpha^2)pl^2$		$m_{i-1,i} = (3\alpha'^2 - 1)M$ $m_{i,i-1} = (1 - 3\alpha^2)M$
	$m_{i-1,i} = \alpha\alpha'(1 + \alpha')Pl$ $m_{i,i-1} = \alpha\alpha'(1 + \alpha)Pl$		$m_{i,\,i-1} = -m_{i-1,\,i} = \frac{1}{4}M$

Pentru alte cazuri de încărcări, termenii de încărcare se pot obține pe baza valorilor din tabel prin suprapunerea efectelor. Este evident că pentru travee neîncărcate termenii liberi sînt nuli.

Încărcarea cu variații de temperatură. Schimbarea încărcării la aceeași structură conduce numai la modificarea termenilor liberi, nu și a coeficienților necunoscutelor, care nu depind de încărcare. Încărcarea cu variația temperaturii în axa grinzii nu produce eforturi la grinda continuă deoarece deplasarea produsă de ea nu este împiedicată, reazemele simple permițînd alungirea sau scurtarea în lungul grinzii. Deci, la grinda continuă vor apărea eforturi numai din diferența de temperatură între fața inferioară și superioară $\Delta t = t^i - t^s$ (fig. 14.6, *a*).

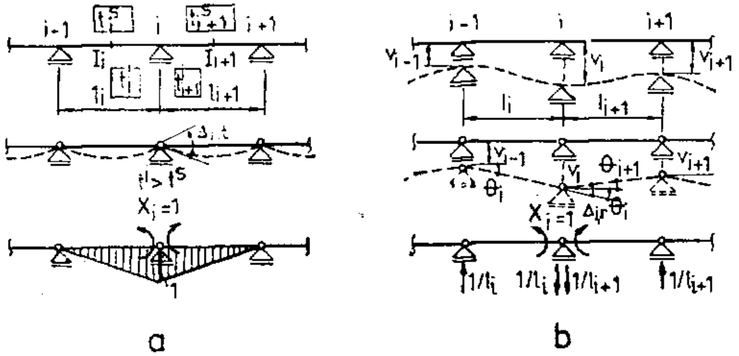


Fig. 14.6.

Ecuația de condiție (*i*) are forma

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} + 6EI_0\Delta_{it} = 0. \quad (14.5)$$

Termenul liber din diferența de temperatură între fețe se obține, conform formulei Maxwell-Mohr, sub forma

$$\Delta_{it} = \Sigma\int\alpha\frac{\Delta t}{h}m_i\,dx = \Sigma\alpha\frac{\Delta t}{h}\,\Omega_{m_i} = \alpha\left[\frac{\Delta t_i}{h_i}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_i\right) + \frac{\Delta t_{i+1}}{h_{i+1}}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l_{i+1}\right)\right]$$

$$6EI_0\Delta_{it} = 3EI_0\alpha\left(\Delta t_i\frac{l_i}{h_i} + \Delta t_{i+1}\frac{l_{i+1}}{h_{i+1}}\right). \quad (14.6)$$

Deci, ecuația de condiție (i) pentru încărcarea cu variații de temperatură va fi

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} + 3EI_0\alpha\left(\Delta t_i\frac{l_i}{h_i} + \Delta t_{i+1}\frac{l_{i+1}}{h_{i+1}}\right) = 0 \quad (14.7)$$

în care Δt_i este diferența de temperatură între fețe pe traveea *i*, semnul plus la termenul liber fiind valabil pentru $t^i > t^s$.

Încărcarea cu cedări de reazeme. Termenul liber din ecuația de condiție (i) va fi egal conform formulei Maxwell-Mohr, cu lucrul mecanic cu semn schimbat al grupului de forțe format din necunoscuta $X_i = 1$ și reacțiunile corespunzătoare prin cedările de reazem reale (fig. 14.6, *b*)

$$\Delta_{ir} = -\Sigma r_i\Delta_r = -\left[-\frac{1}{l_i}v_{i-1} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)v_i - \frac{1}{l_{i+1}}v_{i+1}\right] =$$

$$= -\left[\frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} + \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right]. \quad (14.8)$$

Deci, ecuația de condiție (i) pentru încărcarea cu cedări de reazeme va avea forma

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} - 6EI_0\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} + \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right) = 0 \quad (14.9)$$

unde v_i este tasarea reazemului *i*. Cedările reazemelor pot fi cantități fixe cînd ecuațiile rămîn sub forma ecuațiilor cu trei momente. Sînt cazuri în care cedările de reazeme sînt proporționale cu reacțiunile (grinzi continue pe reazeme elastice), care depind de necunoscute (momentele pe reazeme) și deci termenii liberi depind de necunoscute. În aceste cazuri, prin aranjarea termenilor respectivi, se ajunge la ecuația celor cinci momente.

Aplicarea ecuației celor trei momente. Ecuația de condiție (i) s-a obținut sub forma ecuației celor trei momente care conține ca necunoscute pe reazemul respectiv și momentele pe reazemele adiacente

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} + (m_{i,\,i-1}\lambda_i + m_{i,\,i+1}\lambda_{i+1}) +$$

$$+ 3EI_0\alpha\left(\Delta t_i\frac{l_i}{h_i} + \Delta t_{i+1}\frac{l_{i+1}}{h_{i+1}}\right) - 6EI_0\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} + \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right) = 0. \quad (14.10)$$

Se scrie cîte o astfel de ecuație cu trei momente pentru fiecare reazem intermediar, obținînd un sistem de ecuații în număr egal cu numărul necunoscutelor. Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obțin necunoscutele, care reprezintă momentele încovoietoare pe grinda continuă în secțiunile de pe reazeme cu ajutorul cărora se trasează diagrama de momente.

În aplicarea ecuației celor trei momente, în funcție de condițiile de la capetele grinzii continue, se disting trei cazuri:

Cazul 1. Grinda cu articulații sau reazeme simple la capete (fig. 14.7, *a*). În acest caz, prima ecuație, care exprimă continuitatea pe reazemul *1*, va conține numai două necunoscute, momentul pe primul reazem fiind nul ($X_0 = 0$)

$$2(\lambda_1 + \lambda_2)X_1 + \lambda_2X_2 + 6EI_0\Delta_{10} = 0$$

$$\lambda_2X_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)X_2 + \lambda_3X_3 + 6EI_0\Delta_{20} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

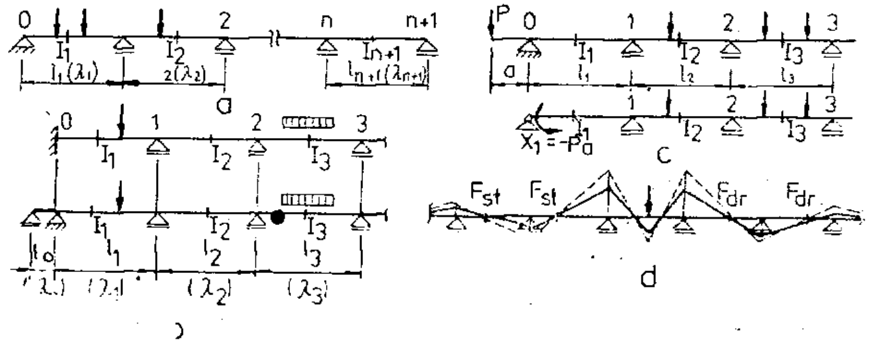


Fig. 14.7.

La fel, dacă ultimul reazem este articulat sau simplu, ultima ecuaţie care exprimă continuitatea pe penultimul reazem va conţine numai două necunoscute

$$\lambda_n X_{n-1} + 2(\lambda_n + \lambda_{n+1})X_n + 6EI_0\Delta_{n0} = 0.$$

Cazul 2. Grinda continuă are încastrare la un capăt (fig. 14.7, *b*). Momentul în încastrarea respectivă este o necunoscută. Ecuaţia celor trei momente se aplică pe baza observaţiei că încastrarea poate fi înlocuită cu două reazeme infinit apropiate ($l_0 \to 0$). Pentru primul reazem încastrat, ecuaţia de continuitate va fi

$$2\lambda_1 X_0 + \lambda_1 X_1 + 6EI_0\Delta_{00} = 0$$

$$\lambda_1 X_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 + 6EI_0\Delta_{10} = 0$$

. . . .

Pentru prima deschidere neîncărcată, prima ecuaţie devine

$$2X_0 + X_1 = 0.$$

Cînd ultimul reazem n este încastrat, atunci ultima ecuaţie are forma

$$\lambda_n X_{n-1} + 2\lambda_n X_n + 6EI_0\Delta_{n0} = 0.$$

Cazul 3. Grinda cu consolă la capete (fig. 14.7, *c*). Efectul consolelor încărcate face ca momentele pe primul, respectiv ultimul reazem să fie diferite de zero dar cunoscute. Prima ecuaţie în acest caz este

$$\lambda_1 X_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 + 6EI_0\Delta_{10} = 0$$

în care $X_0 = M_0 = -Pa$.

La fel, ultima ecuaţie, cînd grinda se termină cu consolă, este

$$\lambda_n X_{n-1} + 2(\lambda_n + \lambda_{n+1})X_n + \lambda_{n+1}X_{n+1} + 6EI_0\Delta_{n0} = 0$$

unde $X_{n+1} = M_{n+1}$.

Observaţie. Rezolvînd pe baza ecuaţiilor cu trei momente o grindă continuă, încărcată pe o singură travee (fig. 14.7, *d*), se constată că pe deschiderile neîncărcate momentele se anulează în aceleaşi puncte, numite puncte fixe, pentru transmiterea momentelor la stînga (F_{st}) şi puncte fixe pentru transmiterea la dreapta (F_{dr}). Poziţia punctelor fixe nu depinde de încărcare fiind caracteristici ale unei structuri date.

14.1.2. PROCEDEUL TRANSMITERII MOMENTELOR PRIN PUNCTE FIXE

Pentru cazul particular al grinzilor continue cu o singură deschidere încărcată, aplicarea ecuaţiilor celor trei momente conduce la un procedeu simplu de obţinere a diagramei de momente încovoietoare, procedeul transmiterii momentelor prin puncte fixe. Se consideră grinda continuă din fig. 14.8 cu momente de inerţie constante pe fiecare deschidere şi avînd o singură deschidere încărcată. Pe deschiderea încărcată, diagrama de momente are o anumită formă funcţie de încărcare (parabolică pentru încărcare uniform distribuită) iar pe deschiderile neîncărcate este liniară, anulîndu-se pe fiecare deschidere în dreptul punctelor de inflexiune din deformată.

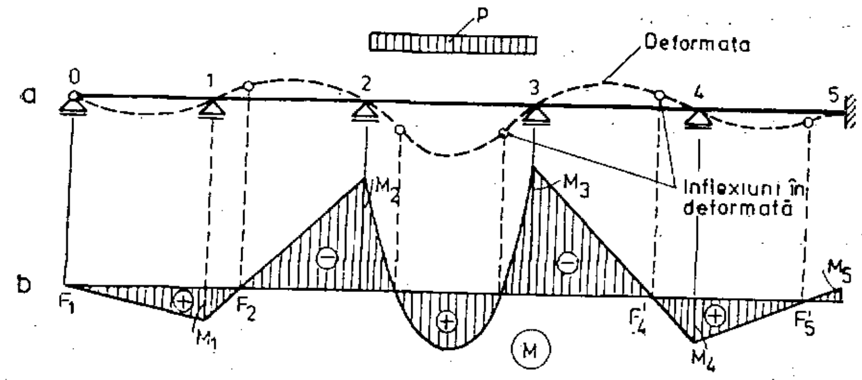


Fig. 14.8.

În continuare, se va arăta că punctele de anulare a diagramei M pe deschiderile neîncărcate (F_1, F_2 respectiv F'_4, F'_5) nu depind de încărcare, fiind nişte caracteristici geometrice ale grinzii şi avînd pentru o grindă dată poziţii fixe (de aceea se numesc puncte fixe). Se consideră partea dintr-o grindă continuă situată la stînga deschiderii încărcate, încărcarea aflîndu-se undeva la dreapta reazemului i (fig. 14.9, *a*, *b*). Ecuaţia celor trei momente corespunzătoare necunoscutei principale M_{i-1}, momentul pe reazemul $i-1$, nu are termeni liberi, deschiderile adiacente reazemului fiind neîncărcate, şi este de forma

$$\lambda_{i-1}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i = 0$$

care, prin împărţire cu $\lambda_i M_{i-1}$, devine

$$\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\cdot\frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} + 2 + \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0$$

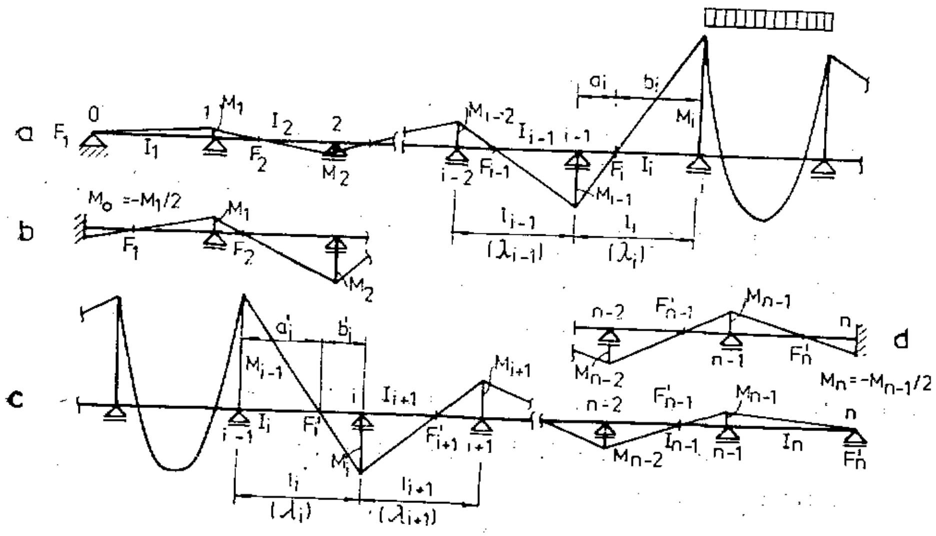


Fig. 14.9.

sau, aranjînd altfel termenii

$$-\frac{M_i}{M_{i-1}} = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2 + \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}}\right).$$

Notînd rapoartele momentelor de capăt pe fiecare deschidere

$$-\frac{M_i}{M_{i-1}} = K_i\,; \quad -\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}} = K_{i-1}$$

relaţia anterioară devine

$$K_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{K_{i-1}}\right). \tag{14.11}$$

Această relaţie este o relaţie de recurenţă care permite determinarea raportului K_i pe o deschidere în funcţie de raportul K_{i-1} pe deschiderea anterioară, plecînd de la prima deschidere din stînga pe care se cunoaşte raportul K_1. Dacă primul reazem este articulat sau simplu (v. fig. 14.9, *a*)

$$K_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

şi dacă primul reazem este încastrare (v. fig. 14.9, *b*):

$$K_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{\frac{-M_1}{2}} = 2.$$

Plecînd de la acest raport pe prima deschidere, se pot determina succesiv rapoartele K pe celelalte deschideri cu relaţia stabilită, astfel:

$$K_2 = 2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(2 - \frac{1}{K_1}\right); \quad K_3 = 2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\left(2 - \frac{1}{K_2}\right); \;\ldots\;.$$

Rezultă că aceste rapoarte depind numai de deschiderile reduse $\lambda_i = (I_0/I_i)l_i$ (care sînt cunoscute pentru o grindă dată) şi de tipul primului reazem. Cum rapoartele $K_i = b_i/a_i$ sînt constante pe fiecare deschidere, înseamnă că punctele de anulare a momentelor, $F_1, F_2, \ldots, F_i$, pe deschiderile neîncărcate de la stînga deschiderii încărcate, au poziţii fixe.

Aceste puncte se numesc puncte fixe pentru transmiterea momentelor la stînga, deoarece momentul pe un reazem se obţine din momentul pe reazemul ulterior considerat că se transmite prin punctul fix al deschiderii ($M_{i-1} = -M_i/K_i$) iar rapoartele $K_1 = -M_1/M_0$, $K_2 = -M_2/M_1, \ldots, K_i = -M_i/M_{i-1}$ se numesc rapoarte de puncte fixe pentru transmiterea la stînga.

În mod analog se pot stabili puncte fixe pentru transmiterea la dreapta $F_i', F_{i+1}', \ldots, F_{n-1}', F_n'$, considerînd partea de grindă din dreapta deschiderii încărcate, încărcarea aflîndu-se la stînga reazemului $i-1$, (fig. 14.9, *c*, *d*). Notînd rapoartele de puncte fixe pentru transmiterea la dreapta prin

$$K_i' = -\frac{M_{i-1}}{M_i}; \quad K_{i+1}' = -\frac{M_i}{M_{i+1}}$$

din ecuaţia celor trei momente pentru reazemul i

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} = 0$$

se obţine relaţia de recurenţă

$$K_i' = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{K_{i+1}'}\right) \tag{14.12}$$

care permite determinarea rapoartelor de puncte fixe K' pentru transmiterea la dreapta plecînd de la ultima deschidere. Dacă ultimul reazem n este articulat sau simplu rezemat

$$K_n' = -\frac{M_{n-1}}{M_n} = -\frac{M_{n-1}}{0} = \infty$$

iar dacă ultimul reazem este încastrat

$$K_n' = -\frac{M_{n-1}}{M_n} = -\frac{M_{n-1}}{\frac{-M_{n-1}}{2}} = 2.$$

Din cele prezentate rezultă că, utilizînd relaţiile de recurenţă, se pot stabili pe fiecare deschidere două puncte fixe F_i, F_i' prin două rapoarte de puncte fixe K_i şi K_i' pentru transmitere la stînga şi respectiv la dreapta. Aceste rapoarte nu se folosesc simultan ci în funcţie de poziţia încărcării, care dacă este în dreapta, momentul de pe reazemul din stînga deschiderii încărcate se transmite prin puncte fixe la stînga utilizînd raportul K, iar dacă încărcarea este în stînga, momentul de pe reazemul din dreapta deschiderii încărcate se transmite la dreapta utilizînd raportul K'.

Pentru obţinerea diagramei de momente încovoietoare mai rămîn de stabilit două necunoscute, momentele la capetele deschiderii încărcate, care apoi se transmit la stînga sau la dreapta prin punctele fixe respective.

Se consideră încărcată deschiderea $i-1$, i şi se scriu ecuaţiile celor trei momente pentru reazemele $i-1$ şi respectiv i

$$\lambda_{i-1}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i = -m_{i-1,\,i}\lambda_i$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} = -m_{i,\,i-1}\lambda_i$$

care, substituind $M_{i-2} = -M_{i-1}/K_{i-1}$ şi $M_{i+1} = -M_i/K_{i+1}'$, devin

$$M_{i-1}\left(2\lambda_{i-1} + 2\lambda_i - \frac{\lambda_{i-1}}{K_{i-1}}\right) + \lambda_i M_i = -m_{i-1,\,i}\lambda_i$$

$$\lambda_i M_{i-1} + M_i\left(2\lambda_i + 2\lambda_{i+1} - \frac{\lambda_{i+1}}{K_{i+1}'}\right) = -m_{i,\,i-1}\lambda_i$$

şi care, prin împărţire cu λ_i, pot fi scrise

$$M_{i-1}\left[2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{K_{i-1}}\right)\right] + M_i = -m_{i-1,\,i}$$

$$M_{i-1} + M_i\left[2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2 - \frac{1}{K_{i+1}'}\right)\right] = -m_{i,\,i-1}$$

sau, utilizînd relaţiile de recurenţă pentru rapoarte de puncte fixe

$$M_{i-1}K_i + M_i = -m_{i-1,\,i}\,; \quad M_{i-1} + M_iK_i' = -m_{i,\,i-1}$$

din care se obţin momentele pe reazemele deschiderii încărcate

$$M_{i-1} = -\frac{m_{i-1,\,i}K_i' - m_{i,\,i-1}}{K_iK_i' - 1}; \quad M_i = -\frac{m_{i,\,i-1}K_i - m_{i-1,\,i}}{K_iK_{i-1}'} \tag{14.13}$$

care se transmit la stînga respectiv la dreapta prin punctele fixe obţinînd momentele pe celelalte reazeme şi deci diagrama de momente încovoietoare (fig. 14.10)

$$M_{i-2} = -M_{i-1}/K_{i-1}; \quad M_{i-3} = -M_{i-2}/K_{i-2}; \ \dots$$
$$M_{i+1} = -M_i/K'_{i+1}; \quad M_{i+2} = -M_{i+1}/K'_{i+2}; \ \dots .$$

Este de remarcat că, deoarece K şi $K' \geqslant 2$, momentele scad pe măsura îndepărtării de deschiderea încărcată.

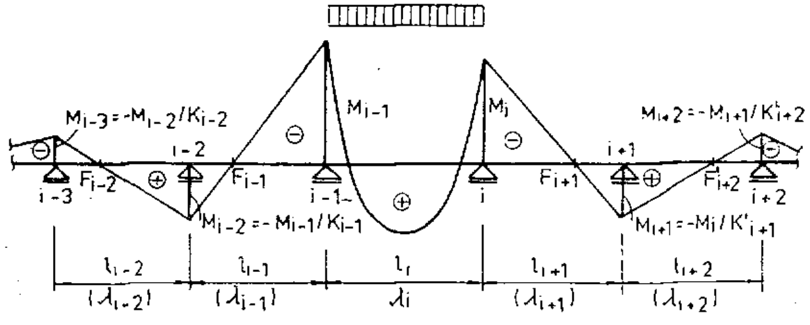


Fig. 14.10.

Pentru grinzi continue cu mai multe deschideri încărcate, se rezolvă grinda prin procedeul transmiterii momentelor prin puncte fixe separat pentru fiecare deschidere încărcată şi apoi se suprapun efectele, adunînd algebric diagramele de momente obţinute. Aici este de remarcat că punctele fixe se determină o singură dată, nedepinzînd de încărcare, urmînd a stabili pentru fiecare caz de încărcare momentele pe reazemele deschiderii încărcate. Acest procedeu este avantajos de aplicat la grinzi cu multe deschideri.

14.1.3. LINII DE INFLUENŢĂ LA GRINZI CONTINUE

Calculul structurilor static nedeterminate la încărcări mobile se face la fel ca la structuri static determinate, pe baza liniilor de influenţă. Definiţia liniei de influenţă rămîne cea stabilită la structuri static determinate : linia de influenţă a unei mărimi statice (reacţiune, efort, deplasare) dintr-o secţiune oarecare reprezintă diagrama de variaţie a mărimii respective cînd pe cale se deplasează o forţă unitară $P_i = 1$ de direcţie constantă. O ordonată din linia de influenţă reprezintă valoarea mărimii statice respective din secţiunea considerată cînd forţa $P = 1$ se află pe cale în dreptul ordonatei.

Linii de influenţă pentru necunoscute. La grinzi continue liniile de influenţă ale necunoscutelor momente pe reazeme se pot determina prin metoda generală a eforturilor folosind un sistem de bază static nedeterminat (fig. 14.11, *a*).

Astfel, pentru determinarea liniei de influenţă a momentului X_2 pe reazemul *2* se suprimă o legătură rămînînd articulaţia şi se introduce necunoscuta. Suprimînd o singură legătură, se scrie o singură ecuaţie de condiţie care să exprime continuitatea grinzii pe reazemul respectiv

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{20} = 0.$$

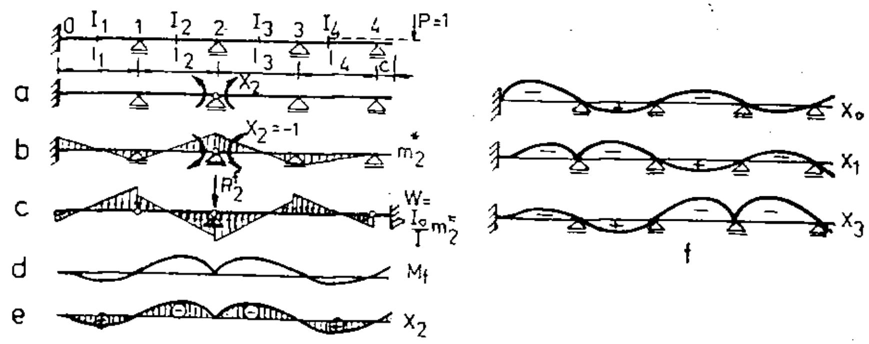


Fig. 14.11.

Termenul liber reprezentînd deplasarea pe direcţia necunoscutei X_2 din încărcarea sistemului de bază static nedeterminat cu forţa unitară mobilă $P_i = 1$, în orice secţiune i a căii, se notează $\Delta_{20} = \delta_{2i}$. Pe baza reciprocităţii deplasărilor din forţe unitare ($\delta_{2i} = \delta_{i2}$) se obţine expresia liniei de influenţă a necunoscutei sub forma

$$X_2 = -\frac{\delta_{2i}}{\delta_{22}} = -\frac{\delta_{i2}}{\delta_{22}} = \frac{\delta_{i2}^*}{\delta_{22}} \tag{14.14}$$

în care δ_{i2}^* reprezintă deplasarea oricărei secţiuni a căii, deci linia elastică pe direcţia forţei $P = 1$ din încărcarea sistemului de bază cu $X_2 = -1$ (fig. 14.11, *b*).

Linia de influenţă a unei necunoscute X_j se obţine deci ca o deformată a căii din încărcarea sistemului de bază de $n - 1$ ori static nedeterminat cu $X_j = -1$, împărţită la o constantă δ_{jj} ce reprezintă rotirea relativă pe reazemul j din $X_j = 1$. Liniile de influenţă la structuri static nedeterminate, obţinîndu-se ca deformate, vor fi curbe, spre deosebire de structurile static determinate la care liniile de influenţă erau liniare.

Problema esenţială este deci determinarea liniilor elastice, care cel mai simplu se obţin prin metoda grinzilor conjugate. Pentru linia elastică δ_{i2}^* se determină în prealabil diagrama m_2^* din $X_2 = -1$ pe sistemul de bază static nedeterminat (v. fig. 14.11, *b*). Se încarcă grinda conjugată cu încărcările elastice $W = \frac{I_0}{I} m_2^*$ (fig. 14.11, *c*) şi se determină diagrama de momente fictive (fig. 14.11, *d*) care reprezintă linia elastică căutată, $M_f = EI_0\delta_{i2}^*$. Numitorul din expresia liniei de influenţă δ_{22} poate fi determinat fie cu formula Maxwell-Mohr

$$EI_0\delta_{22} = \int \frac{I_0}{I} m_2^2 \, dx$$

fie ca reacţiune fictivă pe sistemul conjugat R_2'. Linia de influenţă pentru necunoscuta X_2 se prezintă în fig. 14.11, *e*. În mod analog se obţin liniile de influenţă ale celorlalte necunoscute reprezentate în fig. 14.11, *f*.

Linii de influenţă pentru eforturi şi reacţiuni. Liniile de influenţă ale eforturilor într-o secţiune oarecare pe bară şi ale reacţiunilor se obţin simplu, cunoscînd liniile de influenţă ale momentelor la capetele barelor (necunoscute).

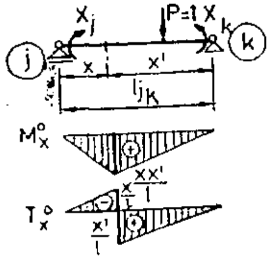


Fig. 14.12.

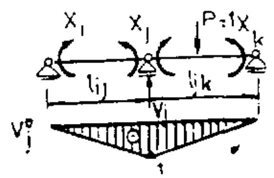


Fig. 14.13.

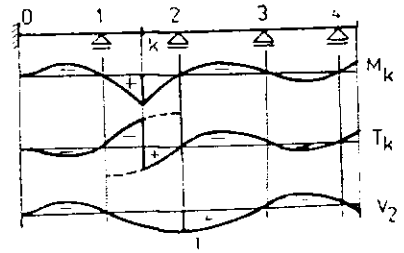


Fig. 14.14.

Izolînd traveea dublu articulată încărcată cu momentele de capăt şi forţa mobilă $P = 1$, liniile de influenţă ale momentului încovoietor şi ale forţei tăietoare într-o secţiune oarecare x pe travee se obţin astfel:

$$M_x = M_x^0 + \frac{x'}{l} X_j + \frac{x}{l} X_k; \quad T_x = T_x^0 + \frac{X_k - X_j}{l}$$

în care M_x^0 şi T_x^0 sînt liniile de influenţă pe grinda simplu rezemată (fig. 14.12) şi se suprapun cu liniile de influenţă ale necunoscutelor X_j şi X_k multiplicate cu nişte constante.

Linia de influenţă a reacţiunii pe reazemul j se obţine prin suprapunere (fig. 14.13)

$$V_j = V_j^0 + \frac{X_i - X_j}{l_{ij}} + \frac{X_k - X_j}{l_{kj}}.$$

În fig. 14.14 se arată cîteva linii de influenţă pentru reacţiuni şi eforturi obţinute cu relaţiile anterioare.

Pentru grinzi continue curente cu secţiuni constante sau cu secţiune variabilă, liniile de influenţă ale eforturilor şi reacţiunilor se găsesc întabulate în lucrarea [2].

14.1.4. DETERMINAREA CURBELOR ÎNFĂŞURĂTOARE PENTRU EFORTURI MAXIME ŞI MINIME

Din punctul de vedere al calculelor de rezistenţă, interesează valorile maxime şi minime ale eforturilor care pot apărea în secţiunile unei structuri din încărcările fixe şi mobile. Prin efort maxim se înţelege cea mai mare valoare pozitivă sau, dacă nu apare valoare pozitivă, cea mai mică valoare negativă. Prin efort minim se înţelege cea mai mare valoare negativă sau cea mai mică valoare pozitivă care poate să apară din încărcările date. Din încărcări permanente, în orice secţiune apar eforturi cu un anumit semn. Din încărcările utile (oameni şi mărfuri la construcţii civile, convoaie de vehicule la poduri) pot apărea în aceeaşi secţiune eforturi cu semne diferite în funcţie de poziţia încărcărilor utile pe structură.

Determinarea eforturilor maxime şi minime care apar în diferite secţiuni ale structurii din încărcări utile se face cu ajutorul liniilor de influenţă ale eforturilor respective.

Se va urmări determinarea curbelor înfăşurătoare pentru eforturi maxime şi minime la o grindă continuă de pod (fig. 14.15, *a*). Convoaiele tip de vehicule pentru diferite tipuri de poduri (şosea sau cale ferată), în funcţie de impor-

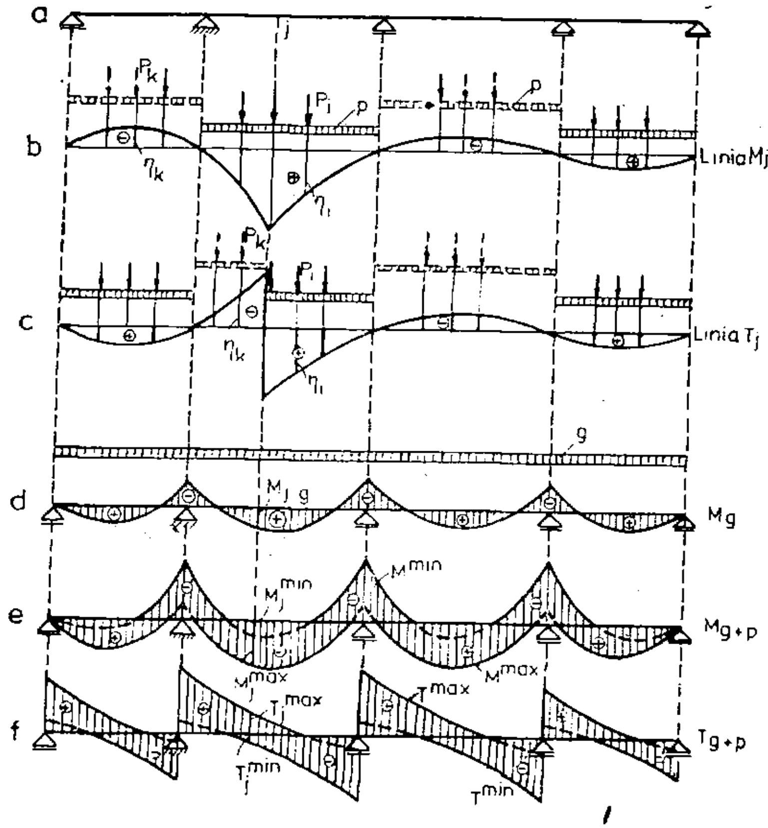


Fig. 14.15.

tanţa lor, se dau în standardele respective. Nu prezintă interes practic determinarea eforturilor maxime şi minime în toate secţiunile structurii ci, în funcţie de importanţa şi deschiderile structurii, se face calculul într-un număr finit de secţiuni. De obicei, la poduri se împarte fiecare deschidere în 10 părţi egale, urmînd a determina eforturile maxime şi minime în fiecare din aceste secţiuni pe baza liniilor de influenţă ale eforturilor din secţiunea respectivă. Efortul maxim, respectiv minim, se obţine încărcînd ramurile pozitive, respectiv negative din linia de influenţă a efortului cu încărcarea utilă aşezată în poziţia cea mai defavorabilă ($\Sigma P\eta$ = max, η fiind ordonatele din linia de influenţă). Deci, în prealabil, se determină sau se scot din tabele liniile de influenţă ale eforturilor în secţiunile considerate.

Astfel, pentru momentul maxim în secţiunea j, se încarcă linia de influenţă respectivă (fig. 14.15, *b*) pe ramurile pozitive cu forţe concentrate P_i (vehicule) şi uniform distribuite p (oameni pe trotuare) şi se calculează

$$M_{jp}^{max} = \Sigma P_i \eta_i + \Sigma p \Omega_\eta^{(+)}$$

Ω_η fiind aria porţiunii de linie de influenţă încărcată cu p.

La fel, pentru momentul minim se încarcă ramurile negative (forţele desenate punctat) şi se calculează

$$M_{jp}^{min} = -(\Sigma P_k \eta_k) + \Sigma p \Omega_\eta^{(-)}.$$

La aceste momente maxime și minime din încărcarea utilă se adaugă momentul în secțiunea respectivă M_{jg} din încărcarea permanentă (fig. 14.15, *d*) care intră cu semnul lui și la valoarea maximă și la valoarea minimă

$$M_j^{max} = M_{jp}^{max} + M_{jg}\,;\quad M_j^{min} = M_{jp}^{min} + M_{jg}.$$

Procedînd analog și în celelalte secțiuni considerate, reprezentînd valorile respective, se obțin curbele înfășurătoare ale momentelor maxime, respectiv minime (fig. 14.15, *e*).

$$M^{max} = M_p^{max} + M_g\,;\quad M^{min} = M_p^{min} + M_g.$$

La fel se obțin și curbele înfășurătoare pentru forțe tăietoare maxime și minime, a căror formă se poate vedea în fig. 14.15, *c*, *f*.

Aplicația 14.1. Pentru grinda continuă din fig. 14.16 să se determine diagramele de eforturi din încărcarea cu forțe date și variații de temperatură.

1) Încărcarea cu forțe date. Deschideri rectificate

$$\lambda_i = \frac{I_0}{I_i} l_i\,;\quad \lambda_1 = \frac{I}{I}\cdot 10 = 10\ \text{m}\,;\quad \lambda_2 = \frac{I}{1{,}2I}\cdot 12 = 10\ \text{m}\,;$$

$$\lambda_3 = \frac{I}{I}\cdot 10 = 10\ \text{m}.$$

Termeni de încărcare

$$\bar{R}_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot l\cdot\frac{pl^2}{8} = \frac{pl^3}{24}\,;\quad m_{10} = \frac{6\bar{R}_{10}}{l_{10}} = \frac{1}{4}pl^2 = \frac{1}{4}\cdot 10\cdot 10^2 = 250$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{1}{4}\cdot 10\cdot 12^2 = 360.$$

Ecuațiile de condiție

$$\lambda_1 X_0 + 2(\lambda_1+\lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 + (m_{10}\lambda_1 + m_{12}\lambda_2) = 0$$

$$\lambda_2 X_1 + 2(\lambda_2+\lambda_3)X_2 + \lambda_3 X_3 + (m_{21}\lambda_2 + 0) = 0\,;$$

$$2(10+10)X_1 + 10X_2 + (250\cdot 10 + 360\cdot 10) = 0$$

$$10X_1 + 2(10+10)X_2 + 360\cdot 10 = 0\,;$$

$$X_1 = -139\ \text{kN}\cdot\text{m}\,;\quad X_2 = -55{,}4\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

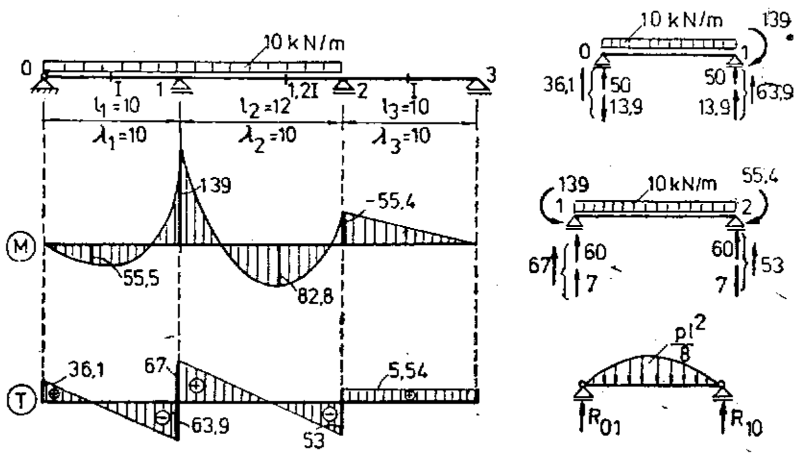


Fig. 14.16.

2) Încărcarea cu variații de temperatură (fig. 14.17). Ecuația celor trei momente este

$$\lambda_i X_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})X_i + \lambda_{i+1}X_{i+1} + 3\,\alpha E I_0\left(\frac{\Delta t_{i,\,i-1}}{h_{i,\,i-1}} l_i + \frac{\Delta t_{i,\,i+1}}{h_{i,\,i+1}} l_{i+1}\right) = 0$$

$$E = 200\,000\ \text{daN/cm}^2 = 2\cdot 10^7\ \text{kN/m}^2\,;\quad I_0 = \frac{0{,}3\cdot 0{,}4^3}{12} =$$

$$= 16\cdot 10^{-4}\ \text{m}^4\,;\quad \alpha = 10^{-5}$$

$$\alpha E I_0 = 10^{-5}\cdot 2\cdot 10^7\cdot 16\cdot 10^{-4} = 32\cdot 10^{-2} = 0{,}32\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$$

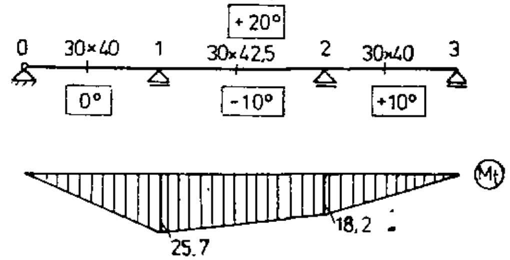


Fig. 14.17.

$$40X_1 + 10X_2 + 3\cdot 0{,}32\left(-\frac{20}{0{,}4}\cdot 10 - \frac{30}{0{,}425}\cdot 12\right) = 0$$

$$10X_1 + 40X_2 + 3\cdot 0{,}32\left(-\frac{30}{0{,}425}\cdot 12 - \frac{10}{0{,}4}\cdot 10\right) = 0\,;$$

$$X_1 = 25{,}7\ \text{kN}\cdot\text{m}\,;\quad X_2 = 18{,}2\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

Aplicația 14.2. Să se traseze diagramele de eforturi din încărcări cu forțe date, din încărcări cu variații de temperatură și din cedări de reazeme la grinda continuă din fig. 14.18.

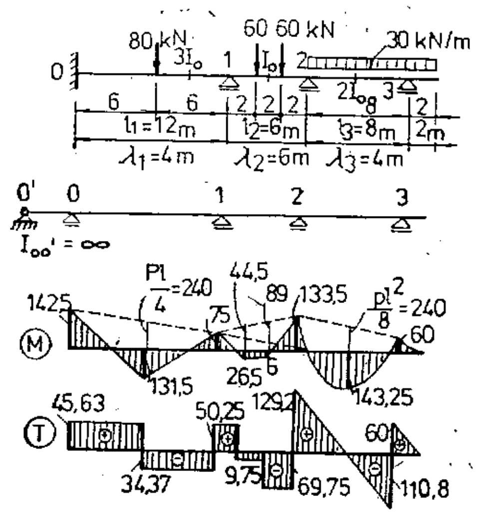


Fig. 14.18.

1) Încărcarea cu forțe (fig. 14.18)
Deschideri rectificate

$$\lambda_1 = \frac{I_0}{3I_0}\cdot 12 = 4 \text{ m}; \quad \lambda_2 = \frac{I_0}{I_0}\cdot 6 = 6 \text{ m}; \quad \lambda_3 = \frac{I_0}{2I_0}\cdot 8 = 4 \text{ m}.$$

Termeni de încărcare

$$m_{01} = m_{10} = \frac{3Pl}{8} = \frac{3\cdot 80\cdot 12}{9} = 360; \quad m_{23} = m_{32} = \frac{1}{4}\cdot 30\cdot 8^2 = 480;$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot 60\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 60\cdot 6 = 240.$$

Ecuațiile de condiție

$$2(\lambda_0+\lambda_1)X_0 + \lambda_1 X_1 + (0 + m_{01}\lambda_1) = 0$$
$$\lambda_1 X_0 + 2(\lambda_1+\lambda_2)X_1 + \lambda_2 X_2 + (m_{10}\lambda_1 + m_{12}\lambda_2) = 0$$
$$\lambda_2 X_1 + 2(\lambda_2+\lambda_3)X_2 + \lambda_3 X_3 + (m_{21}\lambda_2 + m_{23}\lambda_3) = 0;$$
$$2\cdot 4X_0 + 4X_1 + 4\cdot 360 = 0$$
$$4X_0 + 2(4+6)X_1 + 6X_2 + (360\cdot 4 + 240\cdot 6) = 0$$
$$6X_1 + 2(6+4)X_2 + 4(-6) + (240\cdot 6 + 480\cdot 4) = 0;$$
$$2X_0 + X_1 + 360 = 0$$
$$2X_0 + 10X_1 + 3X_2 + 1\,440 = 0$$
$$2X_1 + 10X_2 - 120 + 1\,680 = 0$$
$$X_1 = -75 \text{ kN·m}; \quad X_2 = -133{,}5 \text{ kN·m}; \quad X_0 = -142{,}5 \text{ kN·m}.$$

2) Încărcarea cu variații de temperatură (fig. 14.19)

$$\alpha E I_0 = 10^{-5}\cdot 2{,}5\cdot 10^7\cdot 54\cdot 10^{-4} = 1{,}35.$$

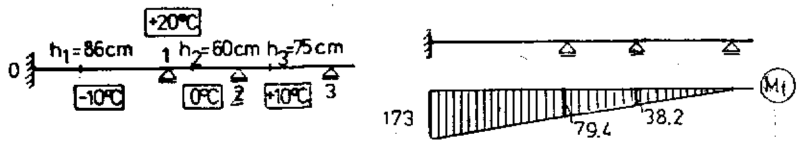


Fig. 14.19.

Ecuațiile celor trei momente

$$8X_0 + 4X_1 + 3\cdot 1{,}35\left(0 - \frac{30}{0{,}86}\cdot 12\right) = 0$$
$$4X_0 + 20X_1 + 6X_2 + 3\cdot 1{,}35\left(-\frac{30}{0{,}86}\cdot 12 - \frac{20}{0{,}6}\cdot 6\right) = 0$$
$$6X_1 + 20X_2 + 3\cdot 1{,}35\left(-\frac{20}{0{,}6}\cdot 6 - \frac{10}{0{,}75}\cdot 8\right) = 0$$
$$8X_0 + 4X_1 - 1\,700 = 0$$
$$4X_0 + 20X_1 + 6X_2 - 2\,510 = 0$$
$$6X_1 + 20X_2 - 1\,240 = 0$$
$$X_0 = 173 \text{ kN·m}; \quad X_1 = 79{,}4 \text{ kN·m}; \quad X_2 = 38{,}3 \text{ kN·m}.$$

3) Încărcarea cu cedări de reazeme (fig. 14.20)

$EI_0 = 1\,350$ kN·m².

Ecuațiile celor trei momente

$$8X_0 + 4X_1 + 6\cdot 1\,350\cdot 10^2\left(0 + \frac{0{,}02 - 0}{12}\right) = 0$$
$$4X_0 + 20X_1 + 6X_2 + 6\cdot 1\,350\cdot 10^2\left(\frac{0 - 0{,}02}{12} + \frac{0{,}01 - 0{,}02}{6}\right) = 0$$
$$6X_1 + 20X_2 + 6\cdot 1\,350\cdot 10^2\left(\frac{0{,}02 - 0{,}01}{6} + \frac{0 - 0{,}01}{8}\right) = 0;$$
$$8X_0 + 4X_1 + 1\,350 = 0$$
$$4X_0 + 20X_1 + 6X_2 - 2\,700 = 0$$
$$6X_1 + 20X_2 + 337{,}5 = 0;$$
$$X_0 = -275 \text{ kN·m}; \quad X_1 = 212 \text{ kN·m}; \quad X_2 = -81{,}2 \text{ kN·m}.$$

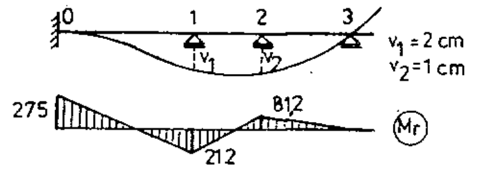


Fig. 14.20.

Aplicația 14.3. Să se determine diagramele de eforturi prin ecuația celor trei momente la grinda din fig. 14.21.

Lungimi rectificate

$$\lambda_1 = \frac{I_0}{I_0}\cdot 6 = 6 \text{ m}; \quad \lambda_2 = \frac{I_0}{I_0}\cdot 7{,}2 = 7{,}2 \text{ m}; \quad \lambda_3 = \frac{I_0}{2{,}5I_0}\cdot 9 = 3{,}6;$$
$$\lambda_4 = \frac{I_0}{2I_0}\cdot 4{,}8 = 2{,}4 \text{ m}.$$

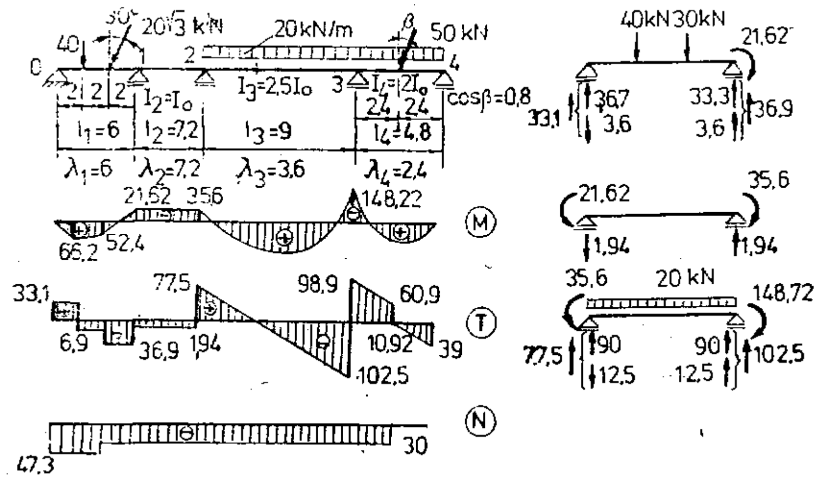


Fig. 14.21.

Sistemul de ecuații

$$M_0\lambda_1 + 2M_1(\lambda_1 + \lambda_2) + M_2\lambda_2 + (m_{10}\lambda_1 + m_{12}\lambda_2) = 0$$

$$M_1\lambda_2 + 2M_2(\lambda_2 + \lambda_3) + M_3\lambda_3 + (m_{21}\lambda_1 + m_{23}\lambda_3) = 0$$

$$M_2\lambda_3 + 2M_3(\lambda_3 + \lambda_4) + 0 + (m_{32}\lambda_3 + m_{34}\lambda_4) = 0 ;$$

$$m_{10} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdot 40\cdot 6 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\right)\cdot 20\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6 = 137{,}78 ;$$

$$m_{12} = m_{21} = 0 ;$$

$$m_{23} = m_{32} = \frac{20\cdot 9^2}{4} = 405 ; \quad m_{34} = \frac{20\cdot 4{,}8^2}{4} + \frac{3}{8}\cdot 50\cdot 0{,}8\cdot 4{,}8 = 187{,}2.$$

$$2M_1(6 + 7{,}2) + 7{,}2M_2 + (137{,}78\cdot 6 + 0) = 0$$

$$7{,}2M_1 + 2M_2(7{,}2 + 3{,}6) + M_3\cdot 3{,}6 + (0 + 405\cdot 3{,}6) = 0$$

$$3{,}6M_2 + 2M_3(3{,}6 + 2{,}4) + (405\cdot 3{,}6 + 187{,}2\cdot 2{,}4) = 0 ;$$

$$26{,}4M_1 + 7{,}2M_2 + 826 = 0$$

$$7{,}2M_1 + 21{,}6M_2 + 3{,}6M_3 + 1\,456 = 0$$

$$3{,}6M_2 + 12M_3 + 1\,906 = 0 ;$$

$$M_1 = -21{,}62 \text{ kN}\cdot\text{m} ; \; M_2 = -35{,}6 \text{ kN}\cdot\text{m} ; \; M_3 = -148{,}22 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Aplicația 14.4. Pentru grinda continuă din fig. 14.22 se cere trasarea diagramei de momente încovoietoare prin procedeul transmiterii prin puncte fixe.

Deschideri rectificate

$$\lambda_1 = \frac{I}{4I}\cdot 18 = 4{,}5 ; \; \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{I}{2I}\cdot 12 = 6 \text{ m} ; \; \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{I}{I}\cdot 9 = 9 \text{ m}.$$

Termeni de încărcare

$$m_{0,1} = m_{1,0} = \frac{pl^2}{4} = \frac{20\cdot 18^2}{4} = 1\,620 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$m_{3,4} = m_{4,3} = \frac{3}{8}Pl = \frac{3}{8}\cdot 240\cdot 9 = 810 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$m_{1,2} = m_{2,1} = m_{3,2} = m_{2,3} = m_{4,5} = m_{5,4} = 0.$$

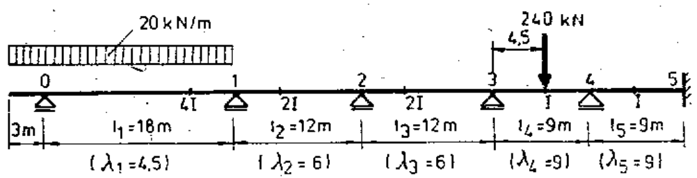


Fig. 14.22.

Rapoarte de puncte fixe pentru transmiterea la stînga

$K_1 = \infty$ (reazem simplu în *0*)

$$K_2 = 2 + \frac{4{,}5}{6}\left(2 - \frac{1}{\infty}\right) = 3{,}5 ; \quad K_3 = 2 + \frac{6}{6}\left(2 - \frac{1}{3{,}5}\right) = 3{,}714 ;$$

$$K_4 = 2 + \frac{6}{9}\left(2 - \frac{1}{3{,}714}\right) = 3{,}154 ; \quad K_5 = 2 + \frac{9}{9}\left(2 - \frac{1}{3{,}154}\right) = 3{,}683.$$

Rapoarte de puncte fixe pentru transmiterea la dreapta

$$K_5' = 2 \text{ (încastrare)} ; \quad K_4' = 2 + \frac{9}{9}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 3{,}5 ;$$

$$K_3' = 2 + \frac{9}{6}\left(2 - \frac{1}{3{,}5}\right) = 4{,}571 ; \quad K_2' = 2 + \frac{6}{6}\left(2 - \frac{1}{4{,}571}\right) = 3{,}782 ;$$

$$K_1' = 2 + \frac{6}{4{,}5}\left(2 - \frac{1}{3{,}782}\right) = 4{,}314.$$

Avînd mai multe deschideri încărcate se vor obține diagramele considerînd pe rînd cîte o deschidere încărcată, determinînd momentele la capetele deschiderii încărcate:

— Cazul 1 (încărcare pe consolă)

$$M_0 = -20\cdot 3\cdot 1{,}5 = -90 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

— Cazul 2 (încărcare pe deschiderea *0—1*)

$$M_1 = -\frac{m_{10}K_1 - m_{01}}{K_1K_1' - 1} = -\frac{m_{10} - \dfrac{m_{01}}{K_1}}{K_1' - 1\dfrac{1}{K_1}} = -\frac{1\,620 - 0}{4{,}314 - 0} = -375{,}5 \text{ kN}\cdot\text{m} ;$$

$$M_0 = 0.$$

— Cazul 3 (încărcare pe deschiderea *3—4*)

$$M_3 = -\frac{m_{34}K_4' - m_{43}}{K_4K_4' - 1} = -\frac{810\cdot 3{,}5 - 810}{3{,}154\cdot 3{,}5 - 1} = -201{,}7 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_4 = -\frac{m_{43}K_4 - m_{34}}{K_4K_4' - 1} = -\frac{810\cdot 3{,}154 - 810}{3{,}154\cdot 3{,}5 - 1} = -173{,}5 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Aceste momente se transmit la stînga sau la dreapta, după caz, prin împărțire la rapoartele de puncte fixe, obținînd diagramele corespunzătoare celor trei cazuri, care prin însumare dau diagrama totală (fig. 14.23)

$$M_0 = -90 ; \; M_1 = 20{,}9 - 375{,}5 - 15{,}5 = -370{,}1 ;$$

$$M_2 = -5{,}5 + 99{,}2 + 54{,}3 = 148 ; \; M_3 = 1{,}2 - 21{,}7 - 201{,}7 = -222{,}2 ;$$

$$M_4 = -0{,}4 + 6{,}2 - 173{,}8 = -168 ; \; M_5 = 0{,}2 - 3{,}1 + 86{,}9 = 84 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

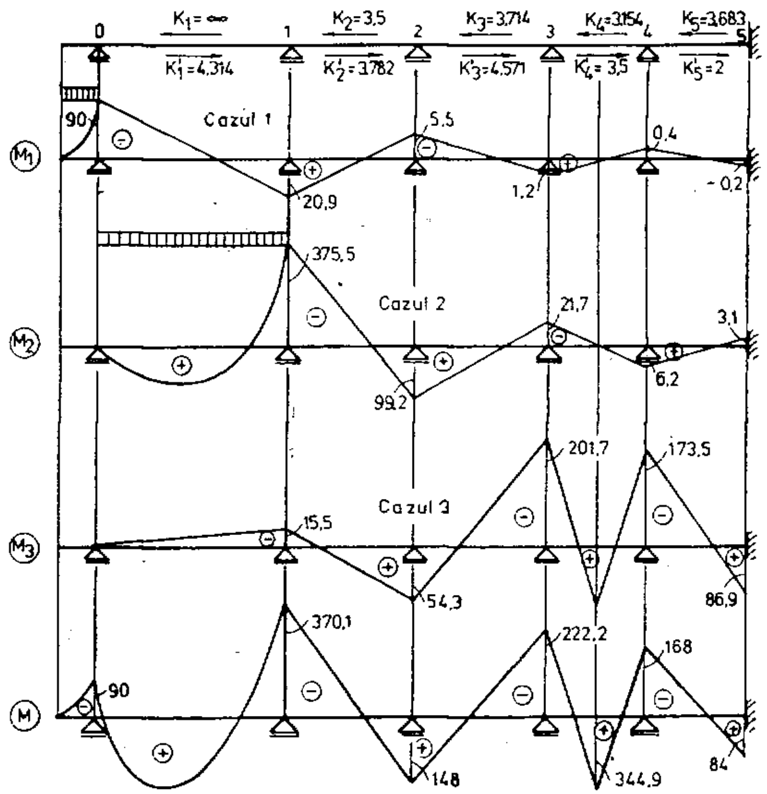


Fig. 14.23.

14.2. ARCE STATIC NEDETERMINATE

Metoda adecvată de rezolvare a arcelor static nedeterminate este metoda generală a eforturilor care se aplică ca la sisteme din bare drepte. La arce, eforturile axiale avînd valori mari și momentele încovoietoare fiind mult reduse față de barele drepte, în calculul deplasărilor pe sistemul de bază, care intervin în ecuațiile de condiție, nu se mai neglijează deformarea din eforturi axiale decît în cazuri justificate.

Integralele din expresiile deplasărilor nu pot fi calculate direct cu regula Vereșceaghin, axa arcului fiind curbă.

14.2.1. ARCUL DUBLU ARTICULAT. INCARCARI FIXE

Arcul cu două articulații (fig. 14.24, *a*), avînd o legătură în plus față de cele trei legături necesare fixării în plan, este o dată static nedeterminat. Sistemul de bază se obține suprimînd o legătură și se poate lua ca sistem de bază fie arcul simplu rezemat, fie arcul cu trei articulații. Se va folosi ca sistem de bază arcul simplu rezemat care prezintă avantajul că la încărcarea cu forțe momentele încovoietoare sînt mari (ca la grinda dreaptă) și se poate

neglija deformarea din eforturi axiale față de deformarea din încovoiere. Pentru acest sistem de bază necunoscuta va fi împingerea X_1 (fig. 14.24, *b*).

Ecuația de condiție, care exprimă că deplasarea pe orizontală în B din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta X_1 și încărcările date este nulă, se scrie

$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0$; ($\Delta_{10} = \Delta_{1p}$ la forțe, $\Delta_{10} = \Delta_{1t}$ la variații de temperatură, $\Delta_{10} = \Delta_{1\Delta r}$ la cedări de reazeme).

Ținînd seama că $m_1 = -y$ și $n_1 = -\cos\varphi$ (fig. 14,24, *c*, *d*), expresia coeficientului necunoscutei este

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds = \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2\varphi}{EA} ds. \tag{14.15}$$

Notînd I_0 și A_0 momentul de inerție și respectiv aria secțiunii de la cheia arcului, în practică se calculează

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi\, ds.$$

Termenul liber depinde de încărcare și se va determina expresia sa pentru fiecare tip de încărcare.

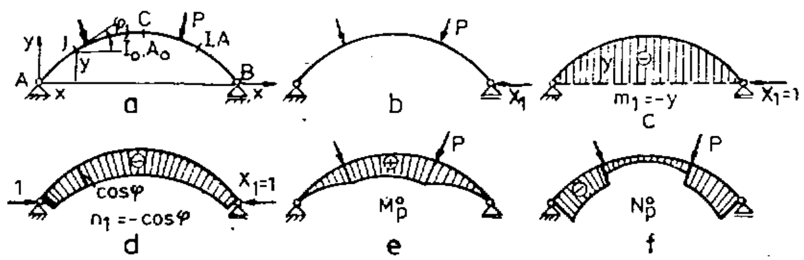


Fig. 14.24.

Încărcarea cu forțe (fig. 14.24, *e*, *f*). Conform formulei Maxwell-Mohr termenul liber are expresia

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^\circ}{EI} ds + \int \frac{n_1 N_p^\circ}{EA} ds = -\int \frac{y M_p^\circ}{EI} ds - \int \frac{\cos\varphi N_p^\circ}{EA} ds$$

sau prin multiplicare cu EI_0

$$EI_0\Delta_{1p} = -\int M_p^\circ y \frac{I_0}{I} ds - \int N_p^\circ \cos\varphi \frac{I_0}{A} ds. \tag{14.16}$$

Expresia generală a necunoscutei la încărcarea cu forțe este

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{\int M_p^\circ y \frac{I_0}{I} ds + \int N_p^\circ \cos\varphi \frac{I_0}{A} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + \int \cos^2\varphi \frac{I_0}{A} ds}. \tag{14.17}$$

Pentru sistemul de bază ales, în Δ_{1p} integrala a doua de la numărător se poate neglija în raport cu prima. De asemenea, la numitor, integrala a doua are valori mici față de prima și fără să se neglijeze se fac unele aproximații,

se neglijează variația secțiunii $A_0 = A$ și se aproximează $\cos\varphi \approx 1$ (sau se consideră variația secțiunii după legea $A = A_0 \cos\varphi$)

$$\int \cos^2\varphi \frac{I_0}{A} ds = \int \frac{I_0}{A_0} \cos\varphi\, ds = \int \frac{I_0}{A_0} dx \approx l i_0^2 \qquad (14.18)$$

unde i_0 este raza de inerție a secțiunii de la cheie.

Cu aproximație acceptabilă, valoarea necunoscutei se poate calcula deci cu expresia

$$X_1 = \frac{\int M_p^0 y \frac{I_0}{I} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2}. \qquad (14.19)$$

Aceste integrale se pot efectua direct pentru cazuri simple de încărcare și pentru arce care au axa după o curbă dată de o anumită funcție (parabolă, cerc). În general, în calculele practice aceste integrale se efectuează numeric. Pentru aceasta se împarte arcul în bolțari care au, de obicei, aceeași proiecție pe orizontală, Δx (8 — 12 bolțari) și pe care se consideră că secțiunea este constantă (fig. 14.25, *a*).

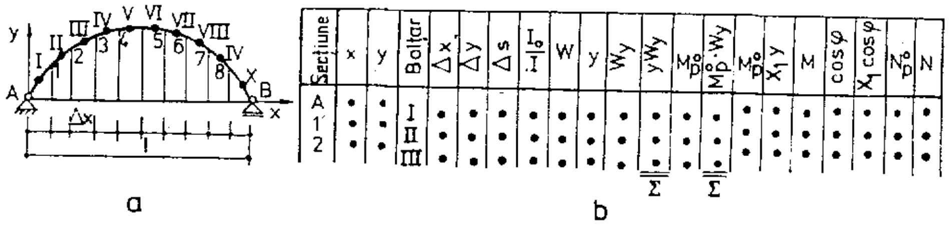


Fig. 14.25.

Înlocuind integralele prin sume, expresia necunoscutei se scrie sub forma

$$X_1 = \frac{\Sigma M_p^0 y \frac{I_0}{I} \Delta s}{\Sigma y^2 \frac{I_0}{I} \Delta s + l i_0^2} = \frac{\Sigma M_p^0 y W}{\Sigma y^2 W + l i_0^2} = \frac{\Sigma M_p^0 W_y}{\Sigma y W_y + l i_0^2} \qquad (14.20)$$

în care: Δs este lungimea bolțarilor, $W = (I_0/I)\Delta s$ — încărcarea elastică; $W_y = yW$.

Eforturile pe arcul static nedeterminat se obțin prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază

$$M = M_p^0 + m_1 X_1 = M_p^0 - X_1 y$$
$$N = N_p^0 + n_1 X_1 = N_p^0 - X_1 \cos\varphi. \qquad (14.21)$$

În calculul pe bolțari determinarea necunoscutei și a eforturilor se face într-un tabel ca în fig. 14.25, *b*.

Încărcarea cu variații de temperatură. Alegînd același sistem de bază ca la încărcarea cu forțe în ecuația de condiție

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0$$

se modifică numai termenul liber care depinde de încărcare.

Termenul liber din încărcarea cu variația temperaturii în axa arcului $t_0 = (t_i + t_s)/2$ (fig. 14.26, *a*) este $\Delta_{1t} = \int \alpha t_0 n_1 ds = -\alpha t_0 \int \cos\varphi ds = -\alpha t_0 l$ unde α este coeficientul de dilatare termică liniară a materialului.

Expresia necunoscutei va fi

$$X_1 = \frac{E I_0 \alpha t_0 l}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2} \approx \frac{E I_0 \alpha t_0 l}{\Sigma y W_y + l i_0^2} \qquad (14.22)$$

iar eforturile se calculează cu relațiile ($M^0 = 0$; $N^0 = 0$)

$$M_t = -X_1 y;\ N_t = -X_1 \cos\varphi. \qquad (14.23)$$

Pentru $t_0 > 0$, diagrama M este negativă și are forma suprafeței cuprinsă între linia nașterilor și arc (fig. 14.26, *b*).

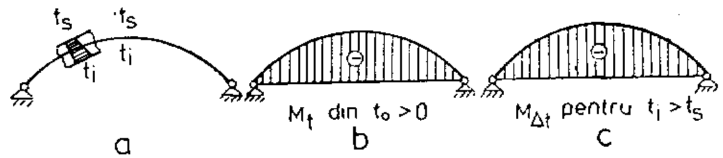


Fig. 14.26.

Din încărcarea cu diferența de temperatură între fețe termenul liber se calculează cu expresia (semnul corespunde la $t_i > t_s$)

$$\Delta_{1\Delta t} = \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_1 ds = -\alpha \Delta t \int \frac{y}{h} ds$$

iar necunoscuta va fi dată de expresia

$$X_1 = \frac{E I_0 \alpha \Delta t \int \frac{y}{h} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2} \approx \frac{E I_0 \alpha \Delta t \Sigma \frac{y}{h} \Delta s}{\Sigma y W_y + l i_0^2}. \qquad (14.24)$$

Eforturile se obțin cu relațiile

$$M_{\Delta t} = -X_1 y;\ N_{\Delta t} = -X_1 \cos\varphi \qquad (14.25)$$

diagrama de momente fiind negativă pentru $\Delta t = t_i - t_s > 0$ (fig. 14.26, *c*).

Încărcarea cu cedări de reazeme. Cedările reazemelor pe verticală nu dau eforturi, arcul deplasîndu-se ca un rigid. Termenul liber din ecuația de condiție pentru cedări pe orizontală va fi

$$\Delta_{1\Delta r} = -\Sigma r_1 \Delta r = -(-1 \cdot u_A - 1 \cdot u_B) = u_A + u_B = u \qquad (14.26)$$

unde u reprezintă deplasarea relativă a reazemelor pe orizontală considerată pozitivă cînd tinde să mărească deschiderea (fig. 14.27 *b*), iar r_1 — reacțiunea virtuală (fig. 14.27, *a*).

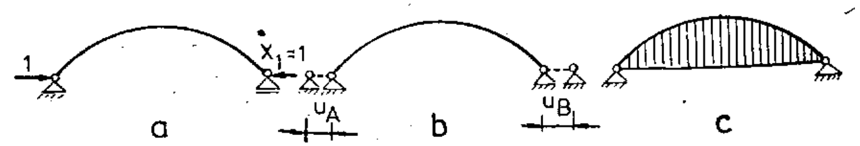


Fig. 14.27.

Necunoscuta va fi

$$X_1 = -\frac{EI_0 u}{\int y^2 \frac{I_0}{I}\,ds + l i_0^2} \approx \frac{EI_0 u}{\Sigma y W_y + l i_0^2} \qquad (14.27)$$

iar eforturile se calculează cu relațiile

$$M_{\Delta r} = m_1 X_1 = -yX_1\,;\; N_{\Delta r} = n_1 X_1 = -X_1 \cos\varphi \qquad (14.28)$$

diagrama de momente are forma arcului și este pozitivă cînd mărește deschiderea (fig. 14.27, *c*).

Arcul cu tirant static nedeterminat (fig. 14.28, *a*). Se folosește cînd reazemele nu pot prelua împingerile. Luînd ca sistem de bază arcul simplu rezemat, necunoscuta X_1 fiind efortul în tirant (fig. 14.28, *b*), relațiile de calcul stabilite la arcul cu două articulații se modifică prin luarea în considerare a deformării tirantului.

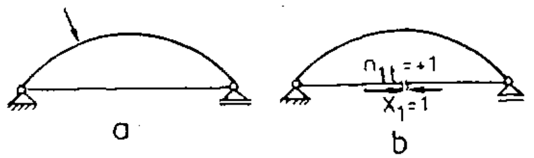


Fig. 14.28.

În ecuația de condiție

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0$$

coeficientul necunoscutei se modifică în felul următor:

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi\, ds + \int \frac{I_0}{A_t}\cdot 1\cdot dx \approx \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l(i_0^2 + i_t^2) \qquad (14.29)$$

în care $l i_t^2$ este efectul deformării tirantului din $X_1 = 1$ și s-a notat $i_t^2 = I_0/A_t$, unde A_t este aria secțiunii transversale a tirantului.

La încărcarea cu forțe, termenul liber din ecuația de condiție nu se modifică și deci necunoscuta va fi

$$X_1 = \frac{\int M_p^0 y \frac{I_0}{I}\,ds}{\int y^2 \frac{I_0}{I}\,ds + l(i_0^2 + i_t^2)} \approx \frac{\Sigma M_p^0 W_y}{\Sigma y W_y + l(i_0^2 + i_t^2)}. \qquad (14.30)$$

La încadrarea cu variații de temperatură, la termenul liber calculat pe arc se mai adaugă termenul corespunzător alungirii tirantului din temperatură

$$\Delta_{1t} = -\alpha t_0 l + \int \alpha_t t_0 n_{1t}\,dx = -l(\alpha - \alpha_t) t_0$$

și deci expresia necunoscutei va fi

$$X_1 = \frac{EI_0 l(\alpha - \alpha_t) t_0}{\int y^2 \frac{I_0}{I}\,ds + l(i_0^2 + i_t^2)} \approx \frac{EI_0 l(\alpha - \alpha_t) t_0}{\Sigma y W_y + l(i_0^2 + i_t^2)} \qquad (14.31)$$

în care α_t este coeficientul de dilatare termică liniară pentru materialul din tirant.

Se observă că pentru cazul în care variația temperaturii în axa arcului și pe tirant este aceeași și tirantul este din același material cu arcul, efortul în tirant $X_1 = 0$ și deci nu apar eforturi.

După determinarea necunoscutei, eforturile în arc se obțin ca la arcul cu două articulații pentru încărcarea respectivă.

Deoarece arcul cu tirant este exterior static determinat, din încărcarea cu cedări de reazeme nu apar eforturi.

14.2.2. ARCUL DUBLU ÎNCASTRAT. ÎNCĂRCĂRI FIXE

Arcul dublu încastrat, avînd trei legături în plus față de cele necesare fixării în plan, este de trei ori static nedeterminat (fig. 14.29, *a*).

Sistemul de bază poate fi obținut în mai multe feluri, de exemplu prin secționarea completă la cheie (fig. 14.29, *b*) sau suprimînd cîte o legătură la nașteri și cheie (arcul cu trei articulații) (fig. 14.29, *c*). Pentru oricare din aceste sisteme de bază, ecuațiile formează un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{20} = 0$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{30} = 0.$$

Calculele se pot simplifica în felul următor. Se consideră arcul secționat la cheie, continuitatea arcului la cheie refăcînd-o printr-o bară infinit rigidă ($I = \infty$) pînă într-un punct *0*, ca în fig. 14.29, *d*. Arcul transformat (fig. 14.29, *d*) se comportă identic cu arcul inițial (fig. 14.29, *a*) și deci se poate rezolva arcul transformat. Sistemul de bază se obține secționînd brațul infinit rigid în punctul *0* și introducînd cele trei forțe de legătură interioare, necunoscutele X_1, X_2 și X_3 (fig. 14.29, *e*). Pentru simplificarea calculelor se pun

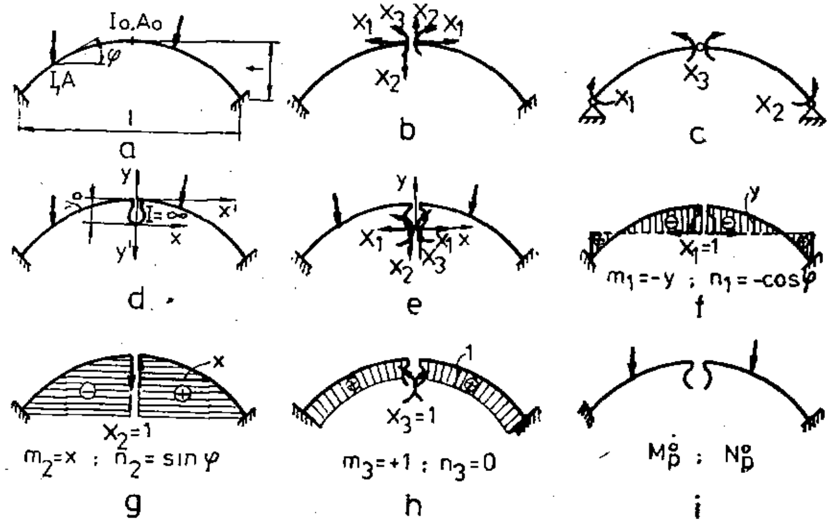


Fig. 14.29.

condiții de anulare a coeficienților secundari ai căror expresii, conform diagramelor unitare (fig. 14.29, f, g și h) sînt:

$$EI_0\delta_{12} = \int m_1 m_2 \frac{I_0}{I} ds = -\int xy \frac{I_0}{I} ds = -\int xy dw = 0$$

$$EI_0\delta_{13} = \int m_1 m_3 \frac{I_0}{I} ds = -\int y \cdot 1 \cdot \frac{I_0}{I} ds = -\int y dw = 0 \quad (14.32)$$

$$EI_0\delta_{23} = \int m_2 m_3 \frac{I_0}{I} ds = \int x \cdot 1 \cdot \frac{I_0}{I} ds = \int x\, dw = 0$$

în care: I_0 este momentul de inerție la cheie; I — momentul de inerție într-o secțiune oarecare; $dw = I_0/I\ ds$.

Considerînd pe fiecare element de arc o încărcare convențională dw, numită încărcare elastică, ultimele două condiții arată că punctul 0, în care se transferă necunoscutele arcului, este centrul de greutate al încărcărilor elastice, numit și centru elastic. Prima condiție arată că momentul de inerție centrifugal al încărcărilor elastice este nul, deci axele x și y sînt axe conjugate. La arce simetrice prima și ultima condiție sînt îndeplinite de la sine, deoarece provin din integrarea de diagrame simetrice (m_1, n_1, m_3) cu diagrame antisimetrice (m_2, n_2). Poziția centrului elastic pe axa de simetrie (y'_0) rezultă din condiția de anulare a coeficientului secundar δ_{13}, în raport cu un sistem de axe inițial x', y'

$$\int y dw = \int (y'_0 - y')dw = y'_0 \int dw - \int y' dw = 0$$

$$y'_0 = \frac{\int y' dw}{\int dw} \approx \frac{\Sigma y' W}{\Sigma W}. \quad (14.33)$$

În calculul numeric s-au înlocuit integralele cu sume pe bolțari, încărcarea elastică pe fiecare bolțar fiind $W = (I_0/I)\Delta_s$.

Pentru necunoscutele transferate în centrul elastic al arcului, ecuațiile de condiție vor fi ecuații independente, calculele ulterioare efectuîndu-se în raport cu sistemul de axe y, x, cu originea în centrul elastic:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{20} = 0$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{30} = 0.$$

Coeficienții principali au următoarele expresii conform diagramelor din fig. 14.29, $f-h$:

$$EI_0\delta_{11} = \int m_1^2 \frac{I_0}{I} ds + \int n_1^2 \frac{I_0}{A} ds = \int y^2 \frac{I_0}{I} ds + \int \cos^2\varphi \cdot \frac{I_0}{A} ds$$

$$EI_0\delta_{22} = \int m_2^2 \frac{I_0}{I} ds + \int n_2^2 \frac{I_0}{A} ds = \int x^2 \frac{I_0}{I} ds + \int \sin^2\varphi \cdot \frac{I_0}{A} ds$$

$$EI_0\delta_{33} = \int m_3^2 \frac{I_0}{I} ds = \int \frac{I_0}{I} ds.$$

Se pot accepta următoarele aproximații: $\int \cos^2\varphi \cdot \frac{I_0}{A} ds \approx l i_0^2$ (ca la arcul cu două articulații) și $\int \sin^2\varphi \frac{I_0}{A} ds \approx 0$ față de prima integrală și deci

$$EI_0\delta_{11} \approx \int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2 \approx \Sigma y W_y + l i_0^2$$

$$EI_0\delta_{22} \approx \int x^2 \frac{I_0}{I} ds \approx x W_x \quad (14.34)$$

$$EI_0\delta_{33} = \int \frac{I_0}{I} ds \approx \Sigma W$$

unde, pentru calculul numeric pe bolțari, s-a notat

$$W = \frac{I_0}{I}\Delta_s;\ W_x = xW;\ W_y = yW.$$

Termenii liberi depind de încărcările date și se vor stabili pentru fiecare caz în parte.

Încărcarea cu forțe. Pentru sistemul de bază ales, sistem fără împingeri (două console), momentele M_p^0 fiind mari, influența forțelor axiale N_p^0 în calculul termenilor liberi se poate neglija și deci termenii liberi pot fi calculați cu aproximație acceptabilă cu expresiile

$$EI_0\Delta_{1p} \approx \int m_1 M_p^0 \frac{I_0}{I} ds = -\int M_p^0 y \frac{I_0}{I} ds \approx -\Sigma M_p^0 W_y$$

$$EI_0\Delta_{2p} \approx \int m_2 M_p^0 \frac{I_0}{I} ds = \int M_p^0 x \frac{I_0}{I} ds \approx \Sigma M_p^0 W_x \quad (14.35)$$

$$EI_0\Delta_{3p} \approx \int m_3 M_p^0 \frac{I_0}{I} ds = \int M_p^0 \frac{I_0}{I} ds \approx \Sigma M_p^0 W.$$

Expresiile necunoscute vor fi

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{\int M_p^0 y \frac{I_0}{I} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2} \approx \frac{\Sigma M_p^0 W_y}{\Sigma y W_y + l i_0^2}$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = \frac{-\int M_p^0 x \frac{I_0}{I} ds}{\int x^2 \frac{I_0}{I} ds} \approx \frac{-\Sigma M_p^0 W_x}{\Sigma x W_x} \quad (14.36)$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{\int M_p^0 \frac{I_0}{I} ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \approx -\frac{\Sigma M_p^0 W}{\Sigma W}.$$

După determinarea necunoscutelor, eforturile în orice secțiune a arcului se obțin prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază

$$M = M_p^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3 = M_p^0 - X_1 y + X_2 x + X_3$$

$$N = N_p^0 + n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3 = N_p^0 - X_1\cos\varphi + X_2\sin\varphi. \quad (14.37)$$

Dacă forțele sînt simetrice, $X_2 = 0$, iar dacă sînt antisimetrice $X_1 = 0$, $X_3 = 0$.

Calculul necunoscutelor și apoi al eforturilor se face întabulat, cum s-a arătat la arcul cu două articulații.

Încărcarea cu variații de temperatură. Termenii liberi din variația simetrică a temperaturii în axa arcului cu $t_0 > 0$ sînt:

$$\Delta_{1t} = \int \alpha t_0 n_1 \, ds = -\int \alpha t_0 \cos\varphi \, ds = -\alpha t_0 \int dx = -\alpha t_0 l$$

$$\Delta_{2t} = \int \alpha t_0 n_2 \, ds = 0 \; ; \quad \Delta_{3t} = 0$$

și deci apare numai necunoscuta X_1 cu expresia

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha t_0 l}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2} \approx \frac{EI_0 \alpha t_0 l}{\Sigma y W_y + l i_0^2} \tag{14.38}$$

iar eforturile se obțin cu relațiile

$$M_t = -X_1 y \; ; \quad N_t = -X_1 \cos\varphi . \tag{14.39}$$

Din diferența de temperatură simetrică între fețele arcului $\Delta_t = t_i - t_s > 0$ rezultă

$$\Delta_{1t} = \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_1 \, ds = -\int \alpha \frac{\Delta t}{h} y \, ds = -\alpha \Delta t \int \frac{y}{h} ds \approx -\alpha \Delta t \Sigma \frac{y}{h} \Delta s \; ; \quad \Delta_{2t} = 0$$

$$\Delta_{3t} = \int \alpha \frac{\Delta t}{h} m_3 \, ds = \int \alpha \frac{\Delta t}{h} ds = \alpha \Delta t \int \frac{1}{h} ds \approx \alpha \Delta t \Sigma \frac{\Delta s}{h}$$

și

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha \Delta t \int \frac{y}{h} ds}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2} \approx \frac{EI_0 \alpha \Delta t \Sigma \frac{y}{h} \Delta s}{\Sigma y W_y + l i_0^2} \; ; \quad X_2 = 0$$

$$X_3 = -\frac{EI_0 \alpha \Delta t \int \frac{1}{h} ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \approx -\frac{EI_0 \alpha \Delta t \Sigma \frac{\Delta s}{h}}{\Sigma W} \tag{14.40}$$

iar eforturile vor fi

$$M_{\Delta t} = -X_1 y + X_3 \; ; \quad N_{\Delta t} = -X_1 \cos\varphi . \tag{14.41}$$

Încărcarea cu cedări de reazeme. Dacă încastrările de la nașteri suferă deplasările u_A, v_A, φ_A și respectiv u_B, v_B, φ_B (cu sensul pozitiv din fig. 14.30, *a*), arcul fiind static nedeterminat se deformează și deci apar eforturi.

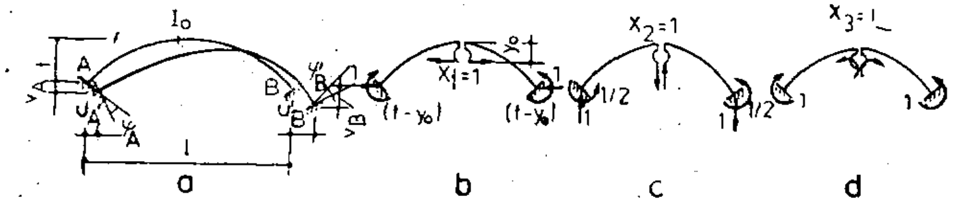


Fig. 14.30.

Termenii liberi din ecuațiile de condiție, conform fig. 14.30, *b*–*d*, sînt:

$$\Delta_{1\Delta r} = -\Sigma r_1 \Delta_r = -[1 \cdot u_A - 1 \cdot u_B + (f - y_0)\varphi_A - (f - y_0)\varphi_B] =$$
$$= -[(u_A - u_B) + (f - y_0)(\varphi_A - \varphi_B)]$$

$$\Delta_{2\Delta r} = -\Sigma r_2 \Delta_r = -(-1 \cdot v_A + 1 \cdot v_B - 0{,}5 l \varphi_A - 0{,}5 l \varphi_B) =$$
$$= -[(v_B - v_A) - 0{,}5 l(\varphi_A - \varphi_B)]$$

$$\Delta_{3\Delta r} = -\Sigma r_3 \Delta_r = -(1 \cdot \varphi_A - 1 \cdot \varphi_B) = -(\varphi_A - \varphi_B). \tag{14.42}$$

Expresiile necunoscutelor sînt:

$$X_1 = \frac{EI_0[(u_A - u_B) + (f - y_0)(\varphi_A - \varphi_B)]}{\int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l i_0^2} \approx \frac{EI_0[(u_A - v_B) + (f - y_0)(\varphi_A - \varphi_B)]}{\Sigma y W_y + l i_0^2}$$

$$X_2 = \frac{EI_0[v_B - v_A - 0{,}5 l(\varphi_A + \varphi_B)]}{\int x^2 \frac{I_0}{I} ds} \approx \frac{EI_0[v_B - v_A - 0{,}5 l(\varphi_A + \varphi_B)]}{\Sigma x W_x} \tag{14.43}$$

$$X_3 = \frac{EI_0(\varphi_A - \varphi_B)}{\int \frac{I_0}{I} ds} \approx \frac{EI_0(\varphi_A - \varphi_B)}{\Sigma W} .$$

După aflarea necunoscutelor, eforturile se determină cu relațiile

$$M_{\Delta r} = -X_1 y + X_2 x + X_3$$
$$N_{\Delta r} = -X_1 \cos\varphi + X_2 \sin\varphi . \tag{14.44}$$

14.2.3. LINII DE INFLUENȚA LA ARCUL DUBLU ARTICULAT

Pentru fiecare tip de arc este suficient să se determine liniile de influență ale necunoscutelor și apoi, pe baza lor, folosind expresiile stabilite la încărcări fixe, se poate determina orice linie de influență. Fiind sisteme static nedeterminate, liniile de influență vor fi curbe și nu linii poligonale ca la sistemele static determinate.

Arcul cu două articulații (fig. 14.31, *a*) fiind o dată nedeterminat este necesară determinarea în prealabil a liniei de influență a necunoscutei.

Se ia ca sistem de bază arcul simplu rezemat (fig. 14.31, *b*), necunoscuta fiind împingerea arcului. Ecuația de condiție este

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1i} = 0$$

în care termenul liber δ_{1i} reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei din forța $P = 1$ mobilă într-o secțiune oarecare i.

Expresia liniei de influență a împingerii rezultă din ecuația precedentă sub forma

$$X_1 = H = -\frac{\delta_{1i}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{i1}}{\delta_{11}} = \frac{\delta_{i1}^*}{\delta_{11}} = \frac{EI_0 \delta_{i1}^*}{EI_0 \delta_{11}} \tag{14.45}$$

în care s-a folosit reciprocitatea deplasărilor din forțe unitare $\delta_{1i} = \delta_{i1}$ și unde δ_{i1}^* reprezintă deplasarea pe direcția forței $P = 1$ a oricărei secțiuni i, deci linia elastică a sistemului de bază din încărcarea cu $X_1 = -1$. Ordonatele

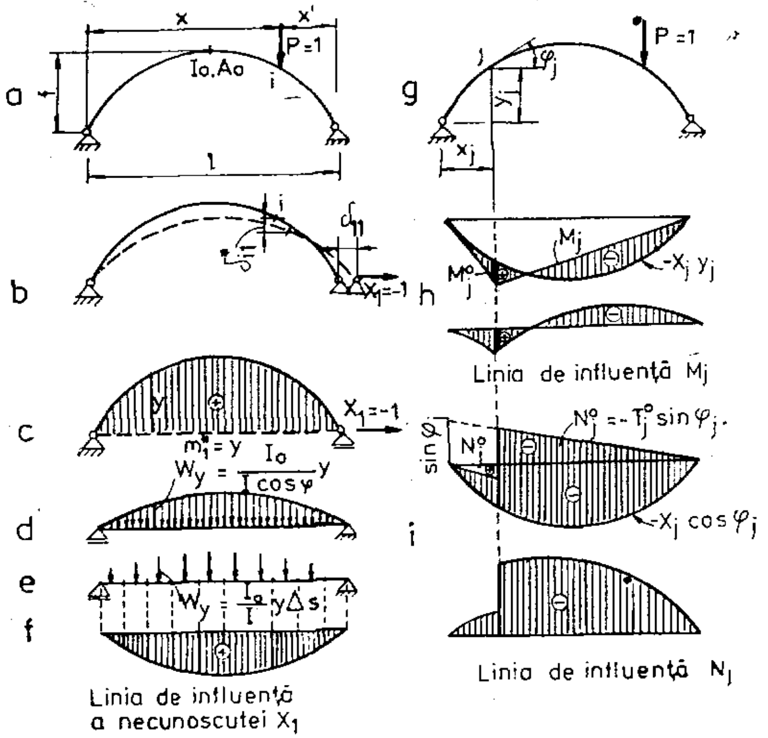


Fig. 14.31.

acestei linii elastice împărțite la constanta δ_{11} care a fost stabilită la încărcări fixe $\left(EI_0\delta_{11} = \int y^2 \frac{I_0}{I} ds + li_0^2\right)$ va reprezenta chiar linia de influență a necunoscutei X_1.

Această linie elastică se obține cel mai simplu cu diagrama de momente pe grinda conjugată care pentru arcul simplu rezemat este o grindă dreaptă simplu rezemată. Încărcările elastice provin din diagrama $m_1^* = y$ (fig. 14.31, *c*) multiplicată cu EI_0 la fel ca și numitorul. Încărcarea elastică distribuită (pe unitatea de lungime de grindă conjugată fig. 14.31, *d*) w_y se concentrează în calculele practice pe proiecția orizontală a bolțarilor în W_y (fig. 14.31, *e*)

$$w_y = \frac{I_0}{I} y \frac{ds}{dx} = \frac{I_0}{I \cos\varphi} y; \quad W_y = w_y dx = \frac{I_0}{I} y\Delta s.$$

Diagrama de momente fictive (calculate în secțiunile ce delimitează bolțarii) din aceste încărcări elastice pe grinda conjugată împărțită la $EI_0\delta_{11}$ va fi linia de influență a împingerii (fig. 14.31, *f*).

Liniile de influență într-o secțiune oarecare pe arc rezultă simplu prin suprapunerea liniilor de influență ale eforturilor pe sistemul de bază cu linia de influență a împingerii, multiplicate cu niște constante, conform expresiilor stabilite la încărcări fixe. Linia de influență a momentului încovoietor într-o secțiune oarecare j pe arcul cu două articulații se obține conform relației

$$M_j = M_j^0 - X_1 y_j = M_j^0 - H y_j$$

scăzînd din linia de influență M_j^0 a momentului în secțiunea respectivă pe arcul simplu rezemat (care este aceeași cu a momentului pe grinda dreaptă

simplu rezemată), linia de influență a împingerii multiplicată cu ordonata y_j a secțiunii respective. Această suprapunere grafică și forma finală a liniei de influență pentru M_j se prezintă în fig. 14.31, *h*.

Linia de influență a efortului axial N_j într-o secțiune oarecare j pe arc se obține conform relației

$$N_j = N_j^0 - X_1 \cos\varphi_j = - T_j^0 \sin\varphi_j - H \cos\varphi_j$$

prin suprapunerea liniei de influență a forței tăietoare T_j^0 în secțiunea j pe grinda dreaptă multiplicată cu constanta $-\sin\varphi_j$, cu linia de influență a împingerii N multiplicată cu constanta $-\cos\varphi_j$. Această suprapunere și forma finală a liniei de influență N_j se prezintă în fig. 14.31, *i*.

Observație. Pentru liniile de influență la arcul cu tirant static nedeterminat singura diferență este că se introduce efectul deformării tirantului (li_t^2) în relația

$$EI_0\delta_{11} = \int y^2 \frac{I_0}{I} ds + l(i_0^2 + i_t^2) \approx \Sigma y W_y + l(i_0^2 + i_t^2)$$

tabilit la încărcări fixe.

14.2.4. LINII DE INFLUENȚĂ LA ARCUL DUBLU ÎNCASTRAT

Folosind același sistem de bază ca la încărcări fixe (fig. 14.32, *a*, *b*), cu necunoscutele transferate în centrul elastic, liniile de influență ale necunoscutelor se obțin foarte simplu pe baza expresiilor rezultate din ecuațiile de condiție

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{1i}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{i1}}{\delta_{11}} = \frac{\delta_{i1}^*}{\delta_{11}} \\ X_2 &= -\frac{\delta_{2i}}{\delta_{22}} = -\frac{\delta_{i2}}{\delta_{22}} = \frac{\delta_{i2}^*}{\delta_{22}} \\ X_3 &= -\frac{\delta_{3i}}{\delta_{33}} = -\frac{\delta_{i3}}{\delta_{33}} = \frac{\delta_{i3}^*}{\delta_{33}} \end{aligned} \tag{14.46}$$

în care termenii liberi din ecuațiile de condiție, provenind din forța $P = 1$ mobilă într-o secțiune oarecare i, s-au notat cu $\Delta_{10} = \delta_{1i}$, $\Delta_{20} = \delta_{2i}$, $\Delta_{30} = \delta_{3i}$ și s-a folosit reciprocitatea deplasărilor din forțe unitare $\delta_{1i} = \delta_{i1}$, $\delta_{2i} = \delta_{i2}$, $\delta_{3i} = \delta_{i3}$.

În felul acesta, liniile de influență se obțin ca linii elastice (diagrame de deplasări pe verticală) δ_{i1}^*, δ_{i2}^*, δ_{i3}^* din încărcarea sistemului de bază cu $X_1 = -1$, $X_2 = -1$ și respectiv $X_3 = -1$, împărțite la constante δ_{11}, δ_{22}, δ_{33} calculate cu expresiile stabilite la încărcări fixe.

Liniile elastice se obțin ca diagrame de momente fictive pe grinda conjugată formată din două console (fig. 14.32, *c*) acționată de încărcările elastice date de diagramele de momente m_1^* (din $X_1 = -1$), m_2^* (din $X_2 = -1$), m_3^* (din $X_3 = -1$). Încărcările elastice distribuite w sau concentrate W în calculul pe bolțari pentru fiecare din cele trei linii elastice vor fi

$$\begin{aligned} w_y &= \frac{I_0}{I\cos\varphi} y; & W_y &= \frac{I_0}{I} y\Delta s \text{ pentru } \delta_{i1}^* \\ w_x &= \frac{I_0}{I\cos\varphi} x; & W_x &= \frac{I_0}{I} x\Delta s \text{ pentru } \delta_{i2}^* \\ w &= \frac{I_0}{I\cos\varphi}; & W &= \frac{I_0}{I} \Delta s \text{ pentru } \delta_{i3}^*. \end{aligned} \tag{14.47}$$

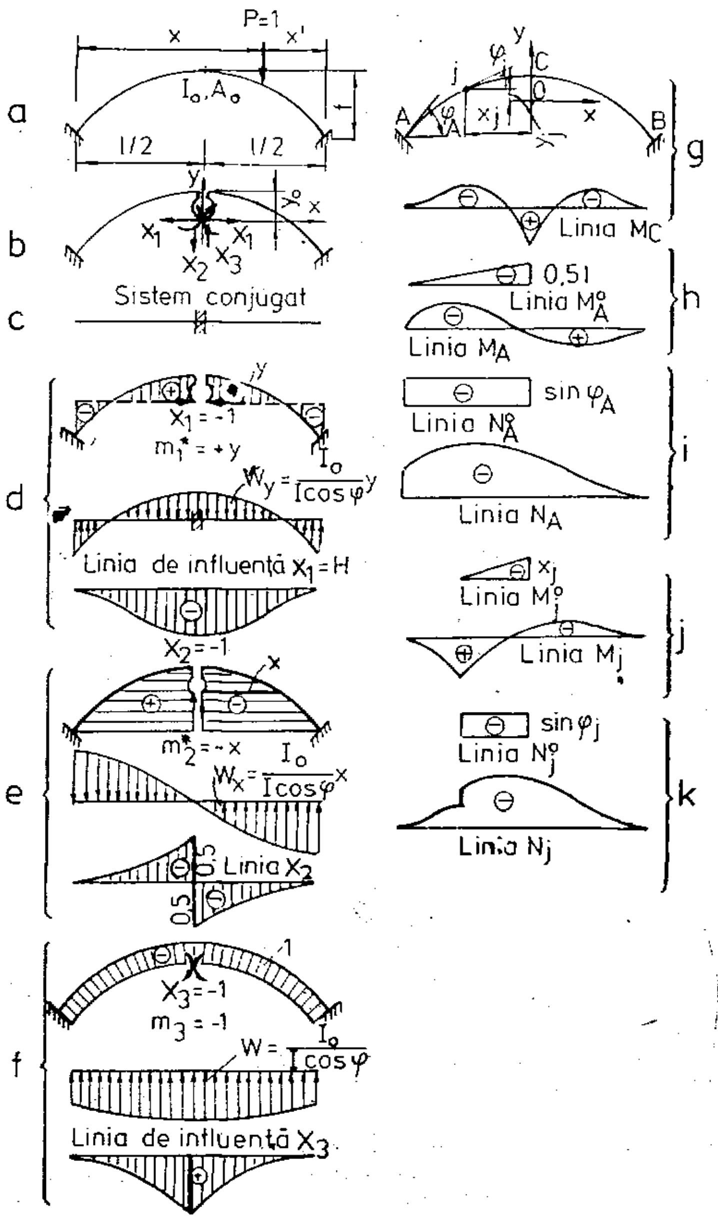


Fig. 14.32.

Determinarea și forma liniilor de influență pentru necunoscutele X_1, X_2, și X_3 sînt prezentate în fig. 14.32, *d*—*f*.

Avînd liniile de influență ale necunoscutelor, se pot obține liniile de influență pentru orice efort pe baza expresiilor stabilite la încărcări fixe.

Linia de influență a momentului încovoietor într-o secțiune oarecare *j* (fig. 14.32, *j*) conform relației

$$M_j = M_j^0 - X_1y_j + X_2x_j + X_3$$

se obține prin suprapunerea liniei de influență a momentului pe sistemul de bază M_j^0 cu liniile de influență ale necunoscutelor X_1 multiplicată cu constanta $-y_j$, X_2 multiplicată cu constanta x_j și X_3.

La fel, linia de influență a efortului axial N_j (fig. 14.32, *k*) într-o secțiune oarecare *j* se obține prin suprapunerea

$$N_j = N_j^0 - X_1 \cos \varphi_j + X_2 \sin \varphi_j$$

Linia de influență a momentului la cheie (fig. 14.32, *g*) se obține la fel

$$M_c = -X_1y_0 + X_3$$

efortul axial la cheie fiind $N_c = -X_1$.

Liniile de influență ale eforturilor la nașterea *A* (fig. 14.32, *h*, *i*) se obțin prin suprapunerea

$$M_A = M_A^0 - X_1(y_0 - f) - X_2 \cdot 0{,}5l + X_3$$

$$N_A = N_A^0 - X_1 \cos \varphi_A + X_2 \sin \varphi_A,$$

Aplicația 14.5. Pentru arcul dublu încastrat prezentat în fig. 14.33, *a*, se cere:

a) să se traseze diagramele de eforturi datorate încărcării permanente (greutate proprie și încărcări transmise la arc prin stîlpi);

b) să se traseze diagramele de eforturi datorate încărcării prezentate în fig. 14.35);

c) să se determine liniile de influență ale momentelor încovoietoare și forțelor axiale în secțiunile de la nașterea *A*, la cheie și la sfert.

Ca axă a arcului dublu încastrat se va adopta forma de coincidență a arcului cu trei articulații, corespunzătoare încărcărilor permanente (greutate proprie și încărcări transmise prin stîlpi).

1) Axa arcului după curba de presiune a încărcărilor permanente. Înălțimea bolțarilor variază după o curbă prezentată în fig. 14.33, *b*. În calculele greutăților bolțarilor se va adopta o înălțime medie pe bolțar, lățimea $b = 0{,}5$ *m*, iar greutatea specifică a betonului $\gamma = 26$ kN/m³.

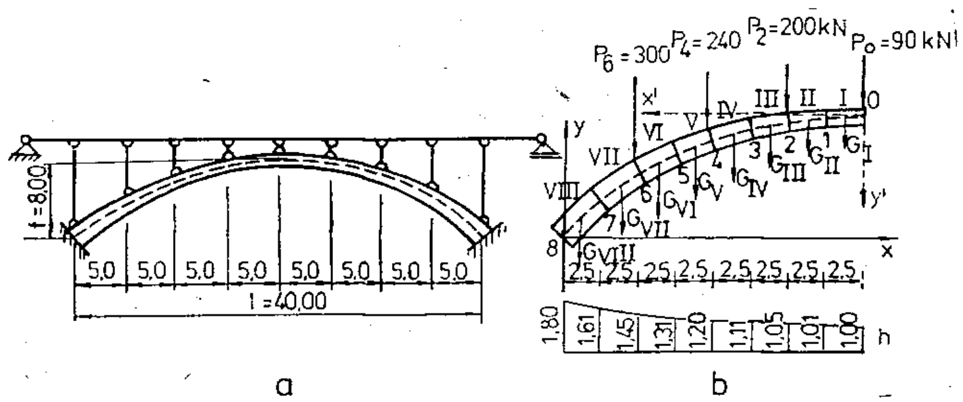


Fig. 14.33.

Tabelul 14.2

Secțiune	Bolțar	x	x^2	y	$y' = f - y$	Δx	$\Delta y = y_i - y_{i+1}$	$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$	Δs	$h_m = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$	$G = \gamma \cdot h_m \cdot b \cdot \Delta s$
0		20	400	8,000	0						
	I					2,5	0,125	6,266	2,50	1,005	32,5
1		17,5	306,25	7,875	0,125						
	II					2,5	0,375	6,350	2,52	1,030	33,8
2		15,0	225,0	7,500	0,500						
	III					2,5	0,625	6,600	2,56	1,080	35,9
3		12,5	156,25	6,875	1,125						
	IV					2,5	0,875	7,016	2,65	1,155	39,8
4		10,0	100,00	6,000	2,000						
	V					2,5	1,125	7,515	2,75	1,255	44,9
5		7,50	56,25	4,875	3,125						
	VI					2,5	1,375	8,140	2,85	1,380	51,1
6		5,00	25,00	3,500	4,500						
	VII					2,5	1,625	8,890	2,89	1,530	59,2
7		2,50	6,25	1,875	6,125						
	VIII					2,5	1,785	9,770	3,12	1,705	69,2
8		0	0	0	8,000						

Tabelul 14.3

Secțiune	Bolțar	G_i	P_i	$\sum_0^{i-1} P_i$	$\sum_0^{i-1} G_i$	$\sum_0^{i-1} P_i + \sum_0^{i-1} G_i$	$G_i \frac{d}{2}$	$(\sum_0^{i-1} G_i + \sum_0^{i-1} G_i)d$	$(\sum_0^{i-1} P_i + \sum_0^{i-1} G_i)d + G_i \frac{d}{2}$	M_i	y_i	y'
0			90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	I	32,5										
1			0	90	0	90,0	36,6	225	261,6	261,6	0,178	0,125
	II	33,8										
2			200	90	32,5	122,5	38,0	306	344,0	605,6	0,411	0,500
	III	35,9										
3			0	290	66,3	356,3	40,4	892	932,4	1 538,0	1,040	1,125
	IV	39,8										
4			240	290	102,2	392,2	44,8	980	1 024,8	2 562,8	1,740	2,000
	V	44,9										
5			0	530	142,0	672,0	50,5	1 680	1 730,5	4 293,3	2,910	3,125
	VI	51,1										
6			300	530	186,9	716,9	57,5	1 792	1 849,5	6 412,8	4,160	4,500
	VII	59,2										
7			0	830	238,0	1 068,0	66,4	2 670	2 736,6	8 879,4	6,030	6,125
	VIII	69,2										
8			0	830	297,2	1 127,2	77,8	2 820	2 897,8	11 772,2	8,000	8,000

Ca axă inițială se adoptă parabola de gradul doi

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) = \frac{4 \cdot 8}{40^2} x(40 - x) = 0{,}8x - 0{,}002x^2.$$

Caracteristicile geometrice și greutățile bolțarilor sînt prezentate în tabelul 14.2.

Calculul ordonatelor primei curbe de presiune este prezentat sistematizat în tabelul 14.3.

Împingerea H are valoarea

$$H = \frac{M_s}{f} = \frac{11\,777{,}2}{8} = 1\,472 \text{ kN}.$$

Deoarece noile ordonate ale curbei de presiune y_1' diferă sensibil de ordonatele corespunzătoare axei inițiale y', se refac calculele adoptîndu-se ca axă a arcului curba obținută. Reevaluarea încărcărilor este prezentată în tabelul 14.4.

Tabelul 14.4

Secțiune	y_1'	Bolțar	Δx	Δy	$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$	Δs	$h_m = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$	$G = \gamma\, h_m\, b \Delta s$	$\text{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
0	0											
		I	2,5	0,178	6,282	2,50	1,005	32,6	0,071	1,000	1,000	0,071
1	0,178											
		II	2,5	0,233	6,304	2,51	1,030	33,6	0,093	1,004	0,996	0,0926
2	0,411											
		III	2,5	0,629	6,645	2,57	1,080	36,1	0,251	1,029	0,972	0,244
3	1,040											
		IV	2,5	0,700	6,740	2,59	1,155	38,9	0,280	1,037	0,965	0,270
4	1,740											
		V	2,5	1,170	7,620	2,76	1,255	45,0	0,468	1,103	0,905	0,424
5	2,910											
		VI	2,5	1,250	7,810	2,80	1,380	50,3	0,500	1,118	0,894	0,447
6	4,160											
		VII	2,5	1,810	9,750	3,12	1,530	62,0	0,748	1,248	0,801	0,600
7	6,030											
		VIII	2,5	1,970	10,150	3,18	1,705	70,5	0,780	1,268	0,788	0,620
8	8,000											

Cu încărcările reevaluate se determină ordonatele noii curbe de presiune în a doua aproximație (tabelul 14.5).

Împingerea H este

$$H = \frac{11\,771{,}3}{8} = 1\,471 \text{ kN}.$$

Ordonatele y_2' și y_1' sînt foarte apropiate, deci curba obținută este definitivă și se adoptă drept axă a arcului dublu încastrat.

Tabelul 14.5

Secțiune	Bolțar	G_i	P_i	$\sum_0^{i-1} P_i$	$\sum_0^{i-1} G_i$	$\sum_0^{i-1} P_i + \sum_0^{i-1} G_i$	$G_i \cdot \frac{d}{2}$	$(\sum P_i + \sum G_i)d$	$(\sum P_i + \sum G)d + G_i \cdot \frac{d}{2}$	M_i	y'_2	y'_1
0			90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	I	32,6										
1			0	90	0	90,0	31,6	225	261,6	261,6	0,18	0,178
	II	33,6										
2			200	90	32,6	122,6	37,8	306	343,8	605,4	0,41	0,411
	III	36,1										
3			0	290	66,1	356,1	43,6	891	931,6	1 537,0	1,04	1,040
	IV	38,9										
4			240	290	102,2	392,2	43,8	981,1	1 024,9	2 561,9	1,74	1,740
	V	45,0										
5			0	530	141,1	671,1	50,6	1 678	1 728,6	4 290,5	2,92	2,910
	VI	50,3										
6			300	530	186,1	716,1	56,6	1 790	1 846,6	6 137,1	4,17	4,160
	VII	62,0										
7			0	830	236,4	1 066,4	96,8	2 665	2 734,8	8 871,9	6,03	6,030
	VIII	70,5										
8			0	830	298,4	1 128,4	79,4	2 820	2 899,4	11 771,3	8,00	8,000

2) Alegerea sistemului de bază, necunoscute. Arcul dublu încastrat reprezentînd un contur închis, necunoscutele X_1, X_2, X_3 se separă dacă sînt introduse în centrul elastic al arcului (fig. 14.34).

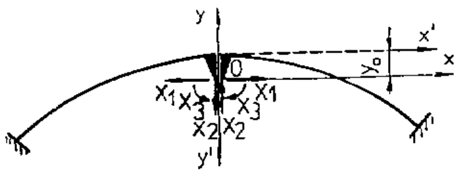


Fig. 14.34.

3) Determinarea poziției centrului elastic. Poziția centrului elastic se obține din ecuația de momente statice a încărcărilor elastice față de axa orizontală Ox' ce trece prin cheia arcului.

Pentru calculul numeric se introduc încărcările elastice în centrul de greutate al bolțarilor, deci poziția centrului elastic se determină sub forma

$$y_0 = \frac{\sum Wy'}{\sum W}$$

unde $W = (I_0/I)\Delta s$ este încărcarea elastică.

Calculul poziției centrului elastic este prezentat sistematizat în tabelul 14.6, unde s-au utilizat următoarele notații: y'_s — ordonata secțiunii de separație a bolțarilor, în sistemul de axe $x'y'$; y'_b — ordonata centrului de

Tabelul 14.6

Secțiune	y'_s	Bolțar	y'_b	h_m	h_m^3	$\frac{I_0}{I}$	Δs	W	$y'_b W$	$y = 1,64 - y'_b$
0	0									
		I	0,09	1,005	1,00	1,00	2,50	2,50	0,225	1,55
1	0,18									
		II	0,295	1,030	1,090	0,927	2,51	2,43	0,715	1,345
2	0,41									
		III	0,725	1,080	1,260	0,793	2,57	2,04	1,480	0,915
3	1,04									
		IV	1,39	1,155	1,54	0,649	2,59	1,68	2,300	0,250
4	1,74									
		V	2,33	1,255	1,975	0,506	2,76	1,395	3,250	−0,690
5	2,92									
		VI	3,545	1,380	2,630	0,380	2,80	1,064	3,770	−1,905
6	4,17									
		VII	5,10	1,530	3,580	0,279	3,12	0,871	4,550	−3,46
7	6,03									
		VIII	7,015	1,705	4,950	0,202	3,18	0,643	4,51	−5,375
8	8,00									
								12,623	20,70	

greutate al bolțarilor în sistemul de axe $x'y'$; y — ordonata centrului de greutate al bolțarilor în raport cu sistemul de axe ce trece prin centrul elastic ($y = y_0 - y'_b$);

$$\frac{I_0}{I} = \frac{bh_0^3/12}{bh_m^3/12} = \frac{h_0^3}{h_m^3}$$

$$y_0 = \frac{20,7}{12,623} = 1,64 \text{ m.}$$

Observație. Deoarece arcul este simetric, calculul din tabelul 14.6 a fost condus numai pe jumătate din arc.

4) Calculul deplasărilor δ_{11}, δ_{22}, δ_{33}. Acest calcul se conduce astfel:

$$EI_0\delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 \, ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \, ds = \sum y^2 W + \sum \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \, \Delta s.$$

Al doilea termen al expresiei anterioare se poate pune sub forma

$$\sum \frac{I_0}{A} \cdot \frac{I}{I} \cos^2 \varphi \Delta s = \sum \frac{I}{A} W \cos^2 \varphi = \sum i^2 W \cos^2 \varphi \approx li_0^2$$

unde:

$$i^2 = \frac{I}{A} = \frac{bh_m^3/12}{bh_m} = \frac{h_m^2}{12}.$$

Pentru comparație, calculul lui δ_{11} se va face atît exact cît și aproximativ utilizînd relațiile

$$EI_0\delta_{11} = \sum y^2 W + \sum i^2 W \cos^2 \varphi \text{ sau } EI_0 \delta_{11} = \sum y^2 W + li_0^2$$

$$EI_0\delta_{22} = \int \frac{I_0}{I} x^2\, ds + \int \frac{I_0}{A} \sin^2 \varphi\, ds \approx \sum x^2 W$$ (sin φ fiind mic, al doilea termen se neglijează).

$$EI_0\delta_{33} = \int \frac{I_0}{I}\, ds = \sum W.$$

Calculul sistematizat al deplasărilor δ_{11}, δ_{22}, δ_{33} este prezentat în tabelul 14.7.

Pe baza simetriei elastice, geometrice și de încărcare a arcului, calculele au fost conduse pe o jumătate de arc. Valorile deplasărilor pentru tot arcul vor fi

$$EI_0\delta_{11} = 2\cdot 45{,}749 + 2\cdot 1{,}37 = 94{,}27$$

$$EI_0\delta_{22} = 2\cdot 1\,080{,}16 = 2\,160{,}32$$

$$EI_0\delta_{33} = 2\cdot 12{,}623 = 25{,}246.$$

Observație. Pentru un calcul aproximativ, ultimul termen din expresia lui δ_{11} se poate calcula sub forma

$$li_0^2 = 40\cdot \frac{h_0^2}{12} = 40\cdot \frac{1}{12} = 3{,}333$$

față de evaluarea corectă $\sum Wi^2 \cos^2 \varphi = 2{,}74$.

5) Eforturi în arc datorate încărcării permanente. Este de precizat că, deși arcul cu trei articulații constituie o curbă de coincidență pentru încărcarea permanentă (greutatea arcului și încărcări transmise prin stîlpi), arcul dublu încastrat nu mai rămîne o curbă de coincidență datorită scurtării sale prin deformație axială, deci diagrama momentelor încovoietoare este diferită de zero.

a) Determinarea necunoscutelor. Sistemul de bază pentru încărcările exterioare este format din două console — sistem fără împingeri — deci influența forțelor axiale N_i^0 în calculul deplasărilor poate fi neglijată în raport cu cea a momentelor M_i^0. Expresiile de calcul ai termenilor liberi sînt:

$$EI_0\Delta_{10} = \sum M_i^0 W_y; \qquad EI_0\Delta_{20} = \sum M_i^0 W_x; \qquad EI_0\Delta_{30} = \sum M_i^0 W.$$

Calculul sistematizat al valorilor termenilor liberi este prezentat în tabelul 14.8.

Efectuînd sumele pentru întreg arcul, se obține:

$$EI_0\Delta_{10} = 2\cdot 67\,411{,}24 = 134\,822{,}48$$

$$EI_0\Delta_{20} = 408\,087{,}24 - 408\,087{,}24 = 0$$

$$EI_0\Delta_{30} = -2\cdot 30\,368{,}05 = -60\,736{,}1.$$

Rezultă:

$$X_1 = \frac{\sum M_i^0 W_y}{\sum y W_y + \sum \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \Delta s} = \frac{134\,822{,}48}{94{,}27} = 1\,430{,}17$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = -\frac{\sum M_i^0 W}{\sum W} = -\frac{60\,736{,}1}{25{,}246} = 2\,405{,}8.$$

Tabelul 14.7

Bolțar	x	y	W	$W_x = xW$	$W_y = yW$	x^2W	y^2W	$i^2 = \frac{h_m^2}{12}$	i^2W	cos φ	$Wi^2 \cos^2 \varphi$
I	1,25	1,550	2,50	3,13	3,88	3,90	6,006	0,083	0,207	1,00	0,207
II	3,75	1,345	2,43	9,11	3,27	34,20	4,400	0,0855	0,215	0,996	0,214
III	6,25	0,915	2,04	12,75	1,867	79,68	1,708	0,0971	0,198	0,972	0,192
IV	8,75	0,250	1,68	14,70	0,420	128,62	0,105	0,1113	0,187	0,965	0,180
V	11,25	−0,690	1,395	15,70	−0,963	176,55	0,660	0,1314	0,184	0,905	0,166
VI	13,75	−1,905	1,064	14,62	−2,025	201,16	3,860	0,1588	0,169	0,894	0,151
VII	16,25	−3,46	0,871	14,15	−3,015	230,00	10,43	0,195	0,170	0,801	0,136
VIII	18,75	−5,375	0,643	12,06	−3,456	226,05	18,58	0,2425	0,156	0,788	0,122
			12,623			1 080,16	45,749				1,37

Tabelul 14.8

Bolțar	W	W_x	W_y	M_i^0	$M_i^0 W$	$M_i^0 W_x$	$M_i^0 W_y$
I	2,50	3,13	3,88	−112,5	−281,25	−352,12	−436,5
II	2,43	9,11	3,27	−419,0	−1 018,17	−3 817,09	−1 370,13
III	2,04	12,75	1,867	−1 059,5	−2 161,38	−13 508,63	−1 978,08
IV	1,68	14,70	0,420	−2 040,25	−3 427,62	−29 991,67	−926,27
V	1,395	15,70	−0,963	−3 418,25	−4 768,46	−53 666,52	3 291,77
VI	1,064	14,62	−2,025	−5 208,75	−5 542,11	−76 151,93	10 547,72
VII	0,871	14,15	−3,015	−7 500,0	−6 532,5	−106 125,0	22 612,5
VIII	0,643	12,06	−3,456	−10 321,25	−6 636,56	−124 474,27	35 670,24
					−30 368,05	−408 087,24	67 411,24

b) Diagramele de eforturi M și N. Eforturile finale într-o secțiune curentă a arcului se determină pe baza relațiilor

$$M_i = M_i^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3 = M_i^0 - yX_1 + X_3$$

$$N_i = N_i^0 + n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3 = N_i^0 - X_1 \cos\varphi.$$

În tabelul 14.9 este prezentat sistematizat calculul eforturilor M și N.

Tabelul 14.9

Secțiune	$M_i = M_i^0 - X_1y + X_3$					$N_i = N_i^0 - X_1\cos\varphi$			
	M_i^0	y	$-1\,430,2y$	X_3	M_i	N_i^0	$\cos\varphi$	$-X_1\cos\varphi$	N_i
0	0	1,64	−2 345,4	2 405,8	60,4	− 6,4	1,000	−1 430,1	−1 436,5
1	−261,6	1,46	−2 088,0	2 405,8	56,2	− 8,8	1,000	−1 430,1	−1 438,9
						−11,1	0,996	−1 424,4	−1 435,5
2	−605,4	1,23	−1 759,1	2 405,8	41,3	−14,2	0,996	−1 424,4	−1 438,6
						−87,2	0,972	−1 390,1	−1 477;3
3	−1 537,0	0,60	−858,1	2 405,8	10,7	−96,1	0,972	−1 390,1	−1 486,2
						−105,9	0,965	−1 380,1	−1 486,0
4	−2 591,9	−0,10	143,0	2 405,8	−41,3	−116,4	0,965	−1 380,1	−1 496,5
						−286,6	0,905	−1 294,3	−1 580,9
5	−4 290,5	−1,28	1 830,6	2 405,8	−54,1	−305,8	0,905	−1 294,3	−1 600,1
						−319,4	0,894	−1 278,5	−1 597,9
6	−6 137,1	−2,53	3 618,3	2 405,8	−113,0	−341,8	0,894	−1 278,5	−1 620,3
						−635,6	0,801	−1 145,5	−1 781,1
7	−8 871,9	−4,39	6 278,4	2 405,8	−187,7	−672,5	0,801	−1 145,5	−1 818,0
						−699,6	0,788	−1 126,9	−1 826,5
8	−11 771,3	−6,36	9 095,9	2 405,8	−269,6	−743,1	0,788	−1 126,9	−1 870,0

6) Diagrama de eforturi datorate încărcării din fig. 14.35.

a) Determinarea necunoscutelor. În fig. 14.36 sînt prezentate diagramele M^0 și N^0 pe sistemul de bază, avînd marcate ordonatele corespunzătoare centrului de greutate al bolțarilor.

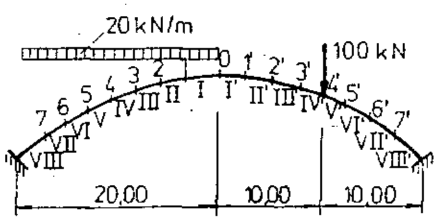


Fig. 14.35.

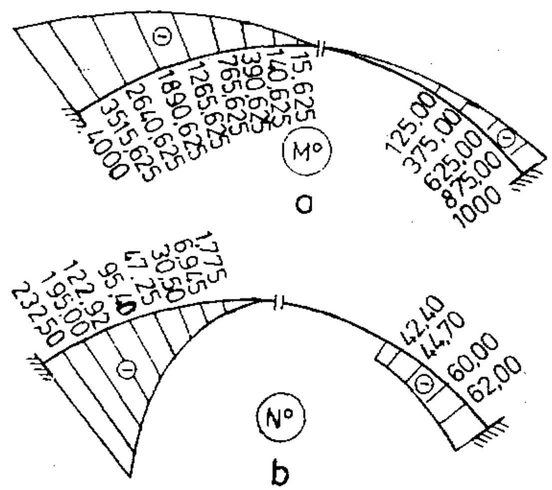


Fig. 14.36.

Pe baza tabelului 14.10 se pot determina termenii liberi, sub forma: $EI_0\Delta_{10} = 29\,375,59$; $EI_0\Delta_{20} = 117\,998,44$; $EI_0\Delta_{30} = -12\,481,98$.

Tabelul 14.10

Bolțar	W	W_x	W_y	M_i^0	$M_i^0 W$	$M_i^0 W_x$	$M_i^0 W_y$
VIII	0,643	−12,06	−3,456	−3 515,625	−2 260,546	42 398,44	12 150,0
VII	0,871	−14,15	−3,015	−2 640,625	−2 299,98	37 364,84	7 961,48
VI	1,064	−14,62	−2,025	−1 890,625	−2 011,625	27 640,9375	3 828,51
V	1,395	−15,70	−0,963	−1 265,625	−1 765,55	19 870,31	1 218,80
IV	1,680	−14,70	0,420	−765,625	−1 286,25	11 254,687	−321,56
III	2,040	−12,75	1,867	−390,625	−796,875	4 900,469	−729,29
II	2,43	−9,11	3,27	−140,625	−341,72	1 281,09	− 459,84
I	2,50	−3,13	3,88	−15,625	−39,06	48,906	− 60,625
I′	2,50	3,13	3,88	0	0	0	0
II′	2,43	9,11	3,27	0	0	0	0
III′	2,04	12,75	1.867	0	0	0	0
IV′	1,68	14,70	0,420	0	0	0	0
V′	1,395	15,70	−0,963	−125,0	−174,375	−1 962,50	120,375
VI′	1,064	14,62	−2,025	−375,0	−399,00	−5 482,50	759,375
VII′	0,871	14,15	−3,015	−625,0	−544,375	−8 843,75	1 884,3
VIII′	0,643	12,06	−3,456	−875,0	−562,625	−10 552,50	3 024,0
					−12 481,98	117 998,44	29 375,59

Valorile necunoscutelor sînt:

$$X_1 = \frac{\Sigma M_i^0 W_y}{\Sigma y W_y + \Sigma \frac{I_0}{A} \cos^2\varphi \Delta s} = \frac{29\,375,59}{94,27} = 311,61 \text{ kN}$$

$$X_2 = -\frac{\Sigma M_i^0 W_x}{\Sigma x W_x} = -\frac{117\,998,44}{2\,160,32} = -54,62 \text{ kN}$$

$$X_3 = -\frac{\Sigma M_i^0 W}{\Sigma W} = -\frac{-12\,481,98}{25,246} = 494,41 \text{ kN}\cdot\text{m}.$$

Tabelul 14.11

Secțiune	x	y	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$M_i = M_i^0 - X_1y + X_2x + X_3$					$N_i = N_i^0 - X_1\cos\varphi - X_2\sin\varphi$			
					M_i^0	$-311,6 \cdot y$	$-54,62x$	X_3	M_i	N_i^0	$-311,61\cos\varphi$	$54,62\sin\varphi$	N_i
8	−20,0	−6,36	0,620	0,788	−4 000,0	1 981,8	1 092,4	494,4	−431,4	−248,0	−245,5	33,9	−459,6
7	−17,5	−4,39	0,620	0,788	3 062,5	1 367,9	955,8	494,4	−244,4	−217,0	−245,5	33,9	−428,6
			0,596	0,801						−208,6	−249,6	32,5	−425,7
6	−15,0	−2,53	0,596	0,801	−2 250,0	788,3	819,3	494,4	−148 υ	−178,8	−249,6	32,5	−395,9
			0,446	0,894						−133,8	−278,6	24,4	−388,0
5	−12,5	−1,28	0,446	0,894	−1 562,5	398,8	682,7	494,4	13,4	−111,5	−278,6	24,4	−365,7
			0,427	0,905						−106,7	−282,0	23,3	−365,4
4	−10,0	−0,10	0,427	0,905	−1 000,0	31,2	546,2	494,4	71,8	−85,4	−282,0	23,3	−344,1
			0,270	0,965						−54,0	−300,7	14,7	−340,0
3	−7,5	0,60	0,270	0,965	−562,5	186,9	409,6	494,4	154,6	−40,5	−300,7	14,7	−326,5
			0,245	0,972						−36,7	−302,9	13,4	−326,2
2	−5,0	1,23	0,245	0,972	−250,0	−383,2	−273,1	494,4	134,3	−24,5	−302,9	13,4	−314,0
			0,091	0,996						−9,1	−310,4	5,0	−314,5
1	−2,5	1,46	0,091	0,996	62,5	−454,9	136,5	494,4	113,5	−4,5	−310,4	5,0	−309,9
			0,072	1,000						−3,6	−311,6	3,9	−311,3
0	0	1,64	0,072	1,000	0	−511,0	0	494,4	−15,6	0	−311,6	3,9	−307,7
			−0,072	1,000						0	−311,6	−3,9	−315,7
1'	2,5	1,46	−0,072	1,000	0	−454,9	−136,5	494,4	−97,0	0	−311,6	−3,9	−315,7
			−0,091	0,996						0	−310,4	−5,0	−315,4
2'	5,0	1,23	−0,091	0,996	0	−383,2	−273,1	494,4	−161,9	0	−310,4	−5,0	−315,4
			−0,245	0,972						0	−302,9	−13,4	−316,3
3'	7,5	0,60	−0,245	0,972	0	−186,9	−409,6	494,4	−102,1	0	−302,9	−13,4	−316,3
			−0,270	0,965						0	−300,7	−14,7	−315,4
4'	10,0	−0,10	−0,270	0,965	0	31,2	−546,2	494,4	−20,6	0	−300,7	−14,7	−315,4
			−0,427	0,905						−42,7	−282,0	−23,3	−348,0
5'	12,5	−1,28	−0,427	0,905	−250,0	398,8	−682,7	494,4	−39,5	−42,7	−282,0	−23,3	−348,0
			−0,446	0,894						−44,6	−278,6	−24,4	−347,6
6'	15,0	−2,53	−0,446	0,894	−500,0	788,3	−819,3	494,4	−36,6	−44,6	−278,6	−24,4	−347,6
			−0,596	0,801						−59,6	−249,6	−32,5	−341,7
7'	17,5	−4,39	−0,596	0,801	−750,0	1 367,9	−955,8	494,4	156,5	−59,6	−249,6	−32,5	−341,2
			−0,620	0,788						−62,0	−245,5	−33,0	−341,4
8'	20,0	−6,36	−0,620	0,788	−1 000,0	1 981,8	−1092,4	494,4	383,8	−62,0	−245,5	−33,9	−341,4

Eforturile finale M și N (fig. 14.37) se calculează cu expresiile

$$M_i = M_i^0 - X_1y + X_2x + X_3$$

$$N_i = N_i^0 - X_1\cos\varphi - X_2\sin\varphi.$$

În tabelul 14.11 este prezentat sistematizat calculul eforturilor.

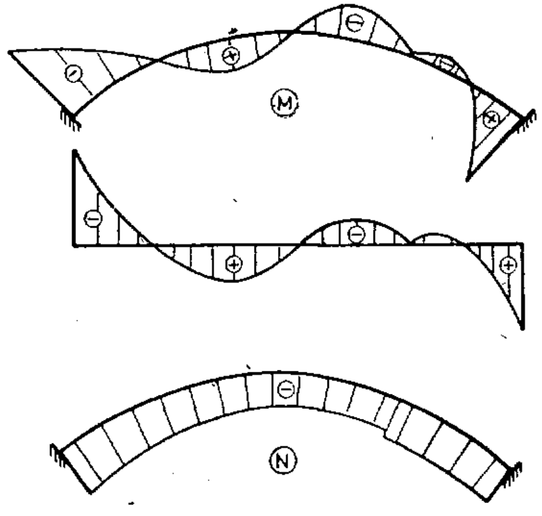


Fig. 14.37.

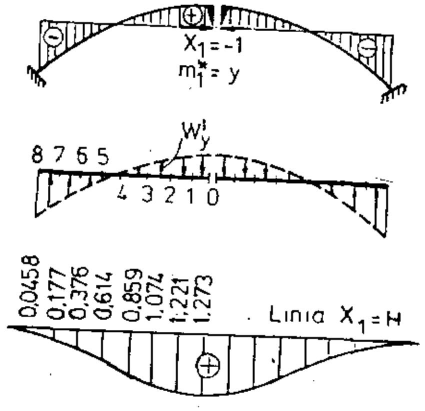


Fig. 14.38.

7) Linii de influență ale necunoscutelor.

a) Linia de influență pentru necunoscuta X_1

$$X_1 = \frac{\delta_{i1}}{\delta_{11}} = \eta_{1i}$$

unde: $EI_0\delta_{11} = 94{,}27$ iar $\delta_{1i} = M_i^f$ este diagrama de momente pe grinda conjugată încărcată cu încărcările elastice $\bar{p} = \frac{I_0}{I} m_1^* \Delta s$, produse de încărcarea $X_1 = -1$ (fig. 14.38, *a*).

Încărcarea elastică pentru un bolțar i este

$$\bar{p} = \frac{I_0}{I} m_1^* \Delta s_i = \frac{I_0}{I} y \Delta s_i = W_y^i.$$

Calculul momentului fictiv într-o secțiune (rost) i se face pe baza relației de recurență

$$M_i^f = M_{i+1}^f + T_{i+1}^f \Delta x + W_{i+1}\frac{\Delta x}{2}$$

unde T_i^f este forța tăietoare fictivă.

Datorită simetriei elastice și de încărcare se va lucra numai pe jumătatea din stînga. Ordonatele η_{1i} ale liniei X_1 se obțin în tabelul 14.12 și sînt reprezentate în fig. 14.38, *b*.

Tabelul 14.12

Bolțar	W_y	Secțiune	T^f_{i+1}	$T^f_{i+1}\Delta x$	$W_y \frac{\Delta x}{2}$	$T^f_{i+1}\Delta x + W_y \frac{\Delta x}{2}$	M^f_i	$\eta_{i1} = \frac{M^f_i}{EI_0\delta_{11}}$
		8	—	—	—	—	0	0
VIII	−3,456							
		7	—	—	4,32	4,32	4,32	0,0458
VII	−3,015							
		6	3,456	8,64	3,768	12,408	16,728	0,177
VI	−2,025							
		5	6,471	16,177	2,531	18,708	35,436	0,376
V	−0,963							
		4	8,496	21,24	1,203	22,443	57,879	0,614
IV	0,420							
		3	9,459	23,647	−0,525	23,122	81,001	0,859
III	1,867							
		2	9,039	22,597	−2,333	20,264	101,265	1,074
II	3,27							
		1	7,172	17,93	−4,087	13,843	115,108	1,221
I	3,88							
		0	3,902	9,755	−4,85	4,905	120,013	1,273

Tabelul 14.13

Bolțar	W_x	Secțiune	T^f_{i+1}	$T^f_{i+1}\Delta x$	$W_x \cdot \frac{\Delta x}{2}$	$T^f_{i+1}\Delta x + W \cdot \frac{\Delta x}{2}$	M^f_i	$\eta_{2i} = \frac{M^f_i}{EI_0\delta_{22}}$
		8	—	—	—	0	0	0
VIII	−12,06							
		7	—	—	−15,08	−15,08	−15,08	−0,007
VII	−14,15							
		6	−12,06	−30,16	−17,70	−47,86	−62,94	−0,029
VI	−14,62							
		5	−26,21	−65,50	−18,28	−83,78	−146,72	−0,068
V	−15,70							
		4	−40,83	−102,0	−19,62	−121,62	−268,34	−0,124
IV	14,70							
		3	−56,53	−141,30	−18,38	−159,68	−428,02	−0,198
III	−12,75							
		2	−71,23	−178,20	−15,94	−194,14	−622,16	−0,288
II	−9,11							
		1	−83,98	−210,0	−11,40	−221,4	−843,56	−0,39
I	−3,13							
		0	−93,09	−232,6	−3,91	−336,51	−1 080,16	−0,500

b) **Linia de influență pentru necunoscuta** X_2

$$X_2 = \frac{\delta^*_{i2}}{\delta_{22}} = \eta_{2i}$$

unde: $EI_0\delta_{22} = 2\,160{,}32$, iar $\delta^*_{i2} = M^f_i$ este diagrama de momente pe sistemul conjugat încărcat cu încărcarea elastică $\bar{p} = \frac{I_0}{I} m^*_2 \Delta s$ datorată încărcării $X_2 = -1$ (fig. 14.39, *a*).

Încărcarea elastică pentru un bolțar *i* este

$$\bar{p} = \frac{I_0}{I} m^*_2 \Delta s = \frac{I_0}{I} x \Delta s = W^i_x.$$

Ordonatele η_{2i} sînt date în tabelul 14.13 pentru jumătatea din stînga a arcului și reprezentate pentru tot arcul în fig. 14.39, *b*.

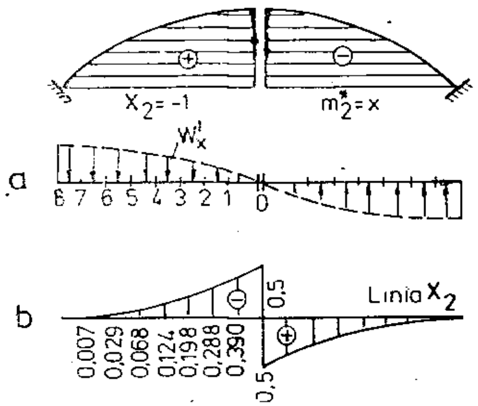


Fig. 14.39.

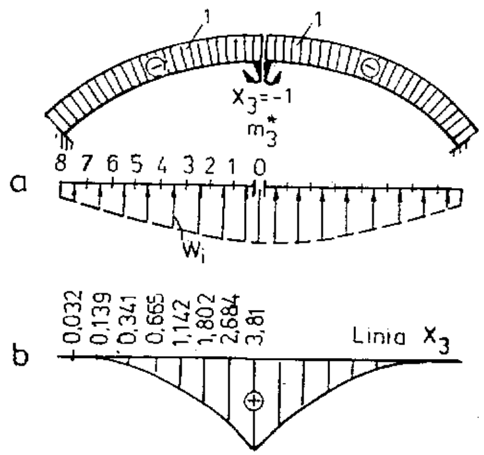


Fig. 14.40.

c) **Linia de influență pentru necunoscuta** X_3

$$X_3 = \frac{\delta^*_{i3}}{\delta_{33}} = \eta_{3i}$$

unde: $EI_0\delta_{33} = 25{,}246$, iar δ^*_{i3} este linia elastică a formei de bază din încărcarea $X_3 = -1$ (fig. 14.40, *a*).

Încărcarea elastică aferentă unui bolțar *i* este

$$\bar{p} = \frac{I_0}{I} m^*_3 \Delta s = \frac{I_0}{I} \Delta s = W_i.$$

Ordonatele η_{3i} sînt calculate în tabelul 14.14 pentru jumătatea din stînga a arcului și reprezentate pentru tot arcul în fig. 14.40, *b*.

8) **Linii de influență pentru eforturi.** Pe baza suprapunerii efectelor pe sistemul de bază se vor determina liniile de influență ale momentelor în secțiunile de la naștere, sfert, cheie și a forței axiale în secțiunea de la naștere.

Tabelul 14.14

Bolțar	W_i	Secțiune	T'_{i+1}	$T'_{i+1}\,\Delta x$	$W_{i+1}\dfrac{\Delta x}{2}$	$T'_{i+1}\,\Delta x + W\cdot\dfrac{\Delta x}{2}$	M'_i	$\eta_{3i} = \dfrac{M'_i}{EI_0\delta_{33}}$
		8	—	—	0	0	0	0
VIII	0,643							
		7	—	—	0,808	0,808	0,808	0,032
VII	0,871							
		6	0,643	1,61	1,09	2,70	3,508	0,139
VI	1,064							
		5	1,514	3,78	1,33	5,11	8,618	0,341
V	1,395							
		4	2,578	6,44	1,74	8,18	16,798	0,665
IV	1,680							
		3	3,973	9,93	2,10	12,03	28,828	1,142
III	2,040							
		2	5,653	14,13	2,55	16,68	45,508	1,802
II	2,43							
		1	7,693	19,21	3,04	22,25	67,758	2,684
I	2,50							
		0	10,123	25,30	3,13	28,43	96,188	3,81

Secțiune	η_{1i}	η_{2i}	η_{3i}	$M_0 = -1,64X_1 + X_3$: $1,64X_1$	η_{M0}	$M_4 = M_4^0 + 0,1X_1$: M_4^0	$0,1X_1$	$-10X_2$
8	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0,0458	−0,007	0,032	−0,075	−0,043	0	0,00458	0,07
6	0,177	−0,029	0,139	−0,29	−0,151	0	0,0177	0,29
5	0,376	−0,068	0,341	−0,617	−0,276	0	0,0376	0,68
4	0,614	−0,124	0,665	−1,007	−0,342	0	0,0614	1,24
3	0,859	−0,198	1,142	−1,408	−0,266	−2,5	0,0859	1,98
2	1,074	−0,288	1,802	−1,761	0,041	−5,0	0,1074	2,88
1	1,221	−0,390	2,684	−2,002	0,682	−7,5	0,1221	3,90
0	1,273	−0,50 / 0,50	3,81	−2,088	1,722	−10,0	0,1273	5,00 / −5,00
1′	1,221	0,390	2,864	−2,002	0,682	0	0,1221	−3,9
2′	1,074	0,288	1,802	−1,761	0,041	0	0,1074	−2,88
3′	0,859	1,198	1,142	−1,408	−0,266	0	0,0859	−1,98
4′	0,614	0,124	0,665	−1,408	−0,342	0	0,0614	−1,24
5′	0,376	0,068	0,341	−0,617	−0,276	0	0,0376	−0,68
6′	0,177	0,029	0,139	−0,29	−0,151	0	0,0177	−0,29
7′	0,0458	0,007	0,032	−0,075	−0,043	0	0,00458	−0,07
8′	0	0	0	0	0	0	0	0

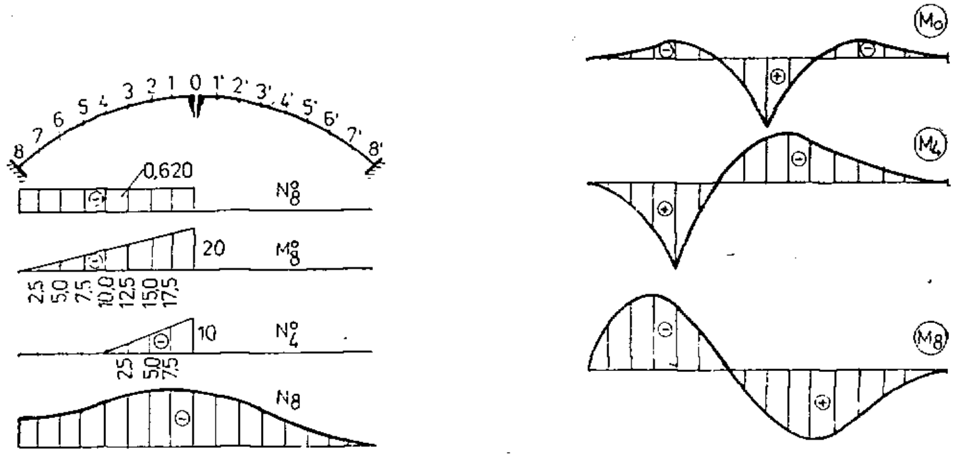


Fig. 14.41.

Liniile de influență pentru eforturi se determină pe baza relațiilor

$$M_8 = M_8^0 - yX_1 + xX_2 + X_3 = M_8^0 + 6,36X_1 - 20X_2 + X_3$$

$$N_8 = N_8^0 - \cos\varphi X_1 - \sin\varphi X_2 = N_8^0 - 0,788X_1 - 0,62X_2$$

$$M_4 = M_4^0 - yX_1 + xX_2 + X_3 = M_4^0 + 0,1X_1 - 10X_2 + X_3$$

$$M_0 = M_0^0 - yX_1 + xX_2 + X_3 = -1,64X_1 + X_3.$$

Pe baza relațiilor date mai înainte s-a alcătuit tabelul 14.15 care permite determinarea ordonatelor liniilor de influență ale eforturilor în secțiunile specificate. În fig. 14.41 sînt prezentate atît liniile de influență ale eforturilor pe sistemul de bază cît și liniile de influență finale.

Tabelul 14.15

$-10X_2+X_3$: η_{M4}	$M_8 = M_8^0 + 6,36X_1 - 20X_2 + X_3$: M_8^0	$6,36X_1$	$20X_2$	η_{M8}	$N_8 = N_8^0 - 0,788X_1 - 0,62X_2$: N_8^0	$-0,788X_1$	$-0,62X_2$	η_{N8}
0	0	0	0	0	−0,62	0	0	−0,62
0,106	−2,5	0,291	0,14	−2.37	−0,62	−0,036	0,0043	−0,652
0,4467	−5,0	1,125	0,58	−3,156	−0,62	−0,139	0,0119	−0,741
1,058	−7,5	2,391	1,36	−3,408	−0,62	−0,296	0,0422	−0,874
1,966	−10,0	3,905	2,48	−2,95	−0,62	−0,484	0,0769	−1,027
0,708	−12,5	5,463	3,96	−1.935	−0,62	−0,677	0,1227	−1,174
−0,2106	−15,0	6,831	5,76	−0,607	−0,62	−0,846	0,178	−1,288
−0,794	−17,5	7,765	7,80	0,749	−0,62	−0,962	0,242	−1,34
−1,063	−20,0	8,096	10,0 / −10,0	1,906	−0,62	−1,003	0.31 / −0,31	−1,313
−1,094	0	7,765	−7,80	2,649	0	−0,962	−0,242	−1,204
−0,908	0	6,831	−5,76	2,873	0	−0,846	−0,178	−1,024
−0,752	0	5,463	−3,96	2,645	0	−0,677	−0,1227	−0,80
−0,5136	0	3,905	−2,48	2.09	0	−0,484	−0,0769	−0,561
−0,301	0	2,391	−1,36	1,372	0	−0,296	−0,0422	−0,388
−0,133	0	1,125	−0,58	0,648	0	−0,139	−0,0179	−0,157
−0,033	0	0,291	−0,14	0,183	0	−0,036	−0,0043	−0,04
0	0	0	0	0	0	0	0	0

14.3. GRINZI CU ZĂBRELE STATIC NEDETERMINATE

14.3.1. GRINZI CU ZABRELE STATIC NEDETERMINATE CU NODURI ARTICULATE

La astfel de grinzi se mențin ipotezele de la grinzi static determinate, inclusiv aceea că nodurile sînt articulații perfecte. Rezultă că în bare se vor dezvolta numai eforturi axiale. Nedeterminarea statică poate proveni din legături suplimentare interioare (bare), (fig. 14.42, *a*), exterioare (fig. 14.42, *b*) sau combinate (fig. 14.42, *c*, *d*). Gradul de nedeterminare statică se determină cu relația

$$G_{ns} = (b + r) - 2n$$

în care : b este numărul de bare ; r este numărul total de legături simple ; n este numărul de noduri.

Calculul la încărcări fixe. Metoda de calcul care conduce la calcule mai simple este metoda generală a eforturilor. Sistemul de bază static determinat și geometric strict invariabil se obține prin suprimarea unui număr de legături interioare sau exterioare corespunzător nedeterminării statice. Se pot utiliza și sisteme de bază static nedeterminate (calculul în două etape) indicate în special cînd necunoscutele sînt de natură diferită (eforturi în bare și reacțiuni). La alegerea sistemului de bază trebuie ținut seama de posibilitatea de simplificare a calculelor și ecuațiilor de condiție : simetria, necunoscutele unitare să producă eforturi într-un număr cît mai mic de bare etc. În fig. 14.42, *e* este prezentat sistemul de bază pentru grinda din fig. 14.42, *d*. În fig. 14.42, *f*

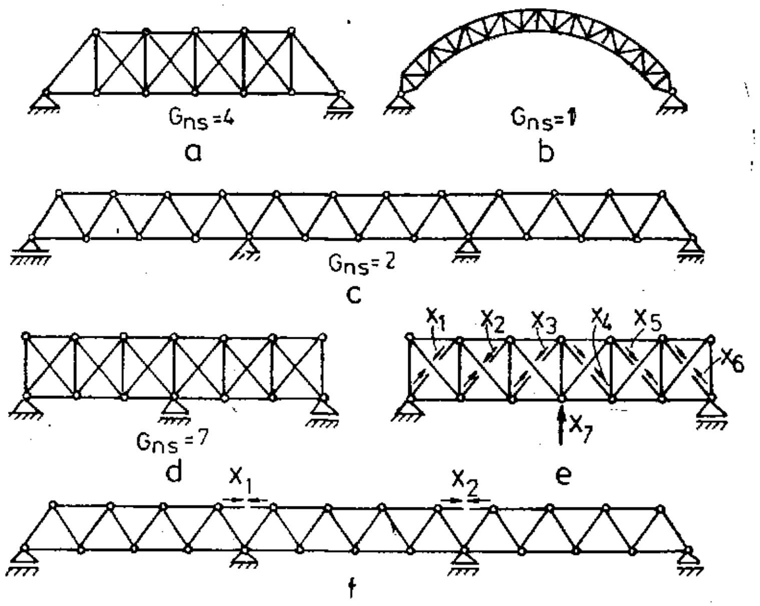


Fig. 14.42.

se prezintă sistemul de bază pentru grinda cu zăbrele continuă din fig. 14.42, *c*. Ecuația de condiție i din sistemul de ecuații canonice are forma

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{i0} = 0.$$

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi au următoarele expresii (multiplicați cu EA_0 pentru a nu lucra cu valori foarte mici, A_0 fiind aria secțiunii unei bare luată ca reper) :

$$EA_0\delta_{ij} = \sum \frac{A_0}{A} n_i n_j l \; ; \quad EA_0\delta_{ii} = \sum \frac{A_0}{A} n_i^2 l$$

— pentru încărcarea cu forțe

$$EA_0\Delta_{ip} = \sum \frac{A_0}{A} N^\circ n_i l \; ; \tag{14.48}$$

— pentru încărcarea cu variația temperaturii în axa barelor

$$EA_0\Delta_{it} = EA_0\alpha \sum t_0 n_i l \; ;$$

— pentru încărcarea cu cedări de reazeme

$$EA_0\Delta_{i\Delta r} = -EA_0 \sum r_i \Delta_r$$

în care : n_i sînt eforturile în barele sistemului de bază din $X_i = 1$; N° — eforturile axiale în barele sistemului de bază din încărcarea exterioară dată ; l — lungimile barelor ; EA — modulul de rigiditate la efort axial al unei bare oarecare ; A — aria secțiunii transversale prin bare ; E — modulul de elasticitate al materialului ; α — coeficientul de dilatare termică a materialului ; t_0 — variația de temperatură în axele barelor ; $\Sigma r_i \Delta_r$ — lucrul mecanic efectuat de grupul de forțe r_i format din $X_i = 1$ și reacțiunile corespunzătoare prin cedările de reazeme Δ_r date. În formulele anterioare sumele se referă la toate barele sistemului de bază.

Efortul axial într-o bară oarecare k se obține cu relația

$$N_k = N_k^0 + \sum_{i=1}^{n} n_{ki} X_i. \tag{14.49}$$

Linii de influență. Expresiile liniilor de influență ale necunoscutelor în cazul folosirii unui sistem de bază static determinat rezultă din rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție (în care termenii liberi s-au notat $\Delta_{j0} = \delta_{ji}$ pentru forța $P = 1$ mobilă în poziția oarecare i) sub forma

$$X_j = \beta_{1j}\delta_{i1} + \beta_{2j}\delta_{i2} + \ldots + \beta_{jj}\delta_{ij} + \beta_{kj}\delta_{ik} + \ldots + \beta_{nj}\delta_{in} \tag{14.50}$$

unde s-a folosit reciprocitatea deplasărilor din forțe unitare ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$) și în care coeficienții conjugați β_{kj} reprezintă valoarea necunoscută X_j cînd toți termenii liberi sînt nuli în afară de $\delta_{ik} = 1$ și are forma

$$\beta_{kj} = \frac{\alpha_{kj}}{D} (-1)^{k+j-1}$$

în care α_{kj} este minorul determinantului coeficienților necunoscutelor D corespunzător liniei i a coloanei j.

În acest mod, linia de influență a unei necunoscute se obține prin suprapunerea liniară a liniilor elastice din necunoscute unitare (δ_{ij} reprezintă linia elastică pe verticală a nodurilor căii din $X_j = 1$). Aceste linii elastice se pot obține prin procedeul grinzii conjugate, epura Williot (grafic sau analitic) sau determinînd deplasările nodurilor cu formula Maxwell-Mohr.

Liniile de influență ale necunoscutelor se pot obține și folosind un sistem de bază de $(n - 1)$ ori static nedeterminat prin suprimarea legăturii pe direcția unei singure necunoscute.

În acest caz, din ecuația de condiție

$$\delta_{jj}X_j + \delta_{ji} = 0$$

rezultă expresia necunoscutei sub forma

$$X_j = -\frac{\delta_{ji}}{\delta_{jj}} = -\frac{\delta_{ij}}{\delta_{jj}} = \frac{\delta^*_{ij}}{\delta_{jj}} \tag{14.51}$$

în care δ^*_{ij} este linia elastică pe verticala din $X_j = -1$ pe sistemul de bază de $(n - 1)$ ori static nedeterminat iar δ_{jj} este deplasarea pe direcția necunoscutei X_j din încărcarea sistemului de bază, de $(n - 1)$ ori static nedeterminat cu $X_j = 1$.

După determinarea liniilor de influență ale necunoscutelor, liniile de influență ale eforturilor în barele grinzii cu zăbrele rezultă prin suprapunerea efectelor pe sistemul de bază sub forma

$$N_k = N_k^0 + \sum n_{kj}X_j$$

în care: N_k^0 reprezintă linia de influență a efortului în bara k pe sistemul de bază; X_j — liniile de influență ale necunoscutelor; n_{kj} — efortul în bara k pe sistemul de bază din $X_j = 1$.

Calculele se efectuează în tabele.

Aplicația 14.6. Se determină eforturile în barele grinzii cu zăbrele static nedeterminată din fig. 14.43, *a* în ipoteza nodurilor articulate.

Grinda cu zăbrele dată este de opt ori static nedeterminată ($G_{n's} = 41 + 3 - 2 \cdot 18 = 8$). Pentru încărcare simetrică se alege un sistem de bază simetric grupînd necunoscutele în patru necunoscute simetrice X_1, X_2, X_3 și X_4 (fig. 14.43, *b*). Ecuațiile de condiție vor fi

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} = 0$$

$$\delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} = 0$$

în care s-a ținut seama că din necunoscutele unitare apar eforturi axiale numai în barele panoului corespunzător necunoscutei respective și deci $\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{41} = 0$. Eforturile pe sistemul de bază din încărcări, N^o, și din necunoscute unitare, n, sînt prezentate în fig. 14.43, *c*, *d*.

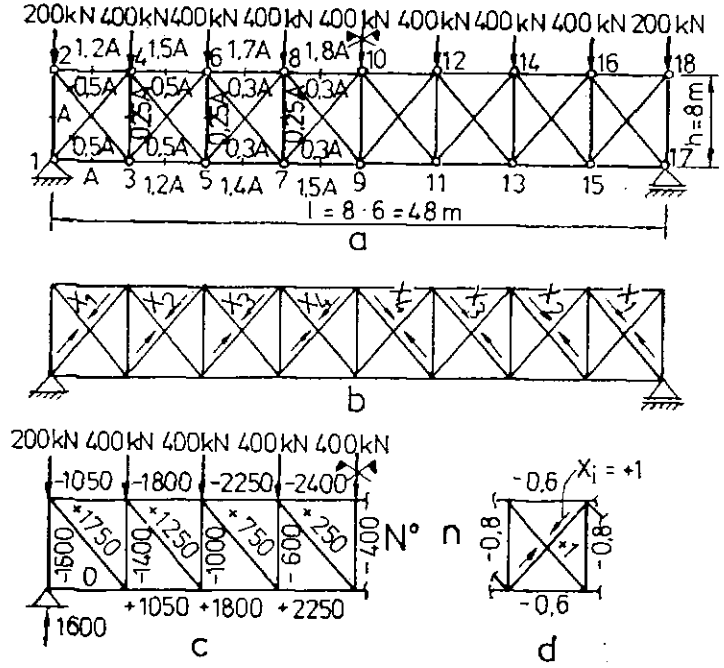


Fig. 14.43.

Calculul coeficienților necunoscutelor și al termenilor liberi s-a făcut în tabelele 14.16 și 14.17. Din aceste tabele rezultă:

$$EA\delta_{11} = 2 \cdot 69{,}58 = 139{,}16\,; \quad EA\delta_{22} = 2 \cdot 84{,}24 = 168{,}48\,; \quad EA\delta_{33} = 2 \cdot 110{,}48 = 220{,}96\,;$$

$$EA\delta_{44} = 2 \cdot 110{,}31 = 220{,}62\,; \quad EA\delta_{12} = EA\delta_{23} = EA\delta_{34} = 2 \cdot 20{,}50 = 41{,}00\,;$$

$$EA\Delta_{1p} = 2 \cdot 84\,230 = 168\,460\,; \quad EA\Delta_{2p} = 2 \cdot 87\,610 = 175\,220\,;$$

$$EA\Delta_{3p} = 2 \cdot 66\,100 = 132\,200\,; \quad EA\Delta_{4p} = 2 \cdot 33\,330 = 66\,660.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obțin următoarele valori pentru necunoscute:

$$X_1 = -1\,006{,}0 \text{ kN}\,; \quad X_2 = -631{,}5 \text{ kN}\,; \quad X_3 = -429{,}0 \text{ kN}\,;$$

$$X_4 = -222{,}2 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori s-au calculat în tabelul 14.17 eforturile în barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate cu relația $N = N^o + n_1X_1 + n_2X_2 + n_3X_3 + n_4X_4$.

Tabelul 14.16

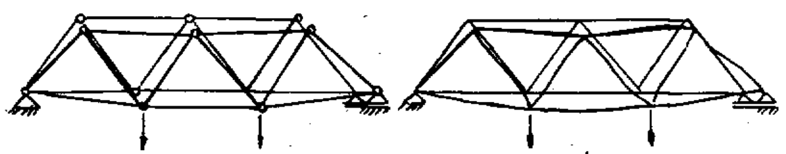
Bara	l_k	A_k	$\frac{A_0}{A_k}$	$l_k \frac{A_0}{A_k}$	n_1	n_2	n_3	n_4	$(l_k A_0/A_k)\times$ n_1^2	n_2^2	n_3^2	n_4^2	$n_1 n_2$	$n_2 n_3$	$n_3 n_4$
1—3	6,00	A	1,000	6,00	−0,60				2,16						
3—5	6,00	1,2A	0,833	5,00		−0,60				1,80					
5—7	6,00	1,4A	0,714	4,28			−0,60				1,54				
7—9	6,00	1,5A	0,667	4,00				−0,60				1,44			
2—4	6,00	1,2A	0,833	5,00	−0,60				1,80						
4—6	6,00	1,5A	0,667	4,00		−0,60				1,44					
6—8	6,00	1,7A	0,588	3,53			−0,60				1,27				
8—10	6,00	1,8A	0,555	3,33				−0,60				1,20			
2—3	10,00	0,5A	2,000	20,00	1,00				20,00						
4—5	10,00	0,5A	2,000	20,00		1,00				20,00					
6—7	10,00	0,3A	3,333	3,33			1,00				33,33				
8—9	10,00	0,3A	3,333	33,33				1,00				33,33			
1—4	10,00	0,5A	2,000	20,00	1,00				20,00						
3—6	10,00	0,5A	2,000	20,00		1,00				20,00					
5—8	10,00	0,3A	3,333	33,33			1,00				33,33				
7—10	10,00	0,3A	3,333	33,33				1,00				33,33			
1—2	8,00	A	1,000	8,00	−0,80				5,12						
3—4	8,00	0,25A	4,000	32,00	−0,80	−0,80			20,50	20,50			20,50		
5—6	8,00	0,25A	4,000	32,00		−0,80	−0,80			20,50	20,50			20,50	
7—8	8,00	0,25A	4,000	32,00			−0,80	−0,80			20,50	20,50			20,50
9—10	8,00	0,25A	4,000	32,00				−0,80				20,50			
									69,58	84,24	110,48	110,31	20,50	20,50	20,50

Tabelul 14. 17

Bara	N^0	n_1N^0	n_2N^0	n_3N^0	n_4N^0	$(l_kA_0/A_k)\times$				n_1X_1	n_2X_2	n_3X_3	n_4X_4	N
						n_1N^0	n_2N^0	n_3N^0	n_4N^0					
1—3										604				604
3—5	1 050		−630				−3 150				415,0			1 465
5—7	1 800			−1 080				−4 622,4				257,7		2 057,5
7—9	2 250				−1 350				−5 400				133,5	2 383,5
2—4	−1 050	630				3 150				604				− 446,0
4—6	−1 800		1 080				4 320				415,0			−1 385
6—8	−2 250			1 350				4 765,5				257,5		1 992,5
8—10	−2 420				−1 440				4 795,2				133,5	−2 266,5
2—3	1 750	1 750				35 000				−1 006				744,0
4—5	1 250		1 250				25 000				−691,5			−558,5
6—7	750			750				25 000				−429,0		321,0
8—9	250				250				8 332,5				−222,2	27,80
1—4	0									−1 006				−1 006
3—6	0										−691,5			− 691,5
5—8	0											−429,0		−429,0
7—10	0												−222,2	−222,2
1—2	−1 600	1 280				10 240				805,0				−795,0
3—4	−1 400	1 120	1 120			35 840	35 840			805,0	553,5			−41,50
5—6	−1 000		800	800			25 600	25 600			553,5	343,5		−103,0
7—8	−600			480	480			15 360	15 360			343,5	177,8	−78,70
9—10	−400				320				10 240				355,6	−44,40
						84 230	87 610	66 100	33 330					

14.3.2 GRINZI CU ZABRELE STATIC NEDETERMINATE CU NODURI RIGIDE. EFORTURI SUPLIMENTARE

În calculul grinzilor cu zăbrele se admite ipoteza că barele sînt perfect articulate în noduri şi deci pentru încărcări aplicate la noduri, în bare apar numai eforturi axiale numite eforturi principale (fig. 14.44, *a*). În realitate, din motive constructive, nodurile grinzilor cu zăbrele metalice şi din beton armat se realizează rigid. Datorită rigidităţii nodurilor, prin deformarea grinzii sub încărcări barele se deformează prin încovoiere şi deci apar momente încovoietoare numite eforturi suplimentare (fig. 14.44, *b*).



a b

Fig. 14.44.

Pe baza eforturilor axiale determinate în ipoteza nodurilor articulate se determină variaţiile lungimilor barelor care produc rotiri de bare. Aceste rotiri de bare se pot determina prin unul din procedeele cunoscute :

1) Aplicarea formei Maxwell-Mohr pentru fiecare bară în parte, rotirea fiind dată de relaţia

$$\theta_{ij} = \sum \frac{N_{mn}n^{ij}_{mn}}{EA_{mn}} l_{mn} = \sum \Delta l_{mn} n^{ij}_{mn} \tag{14.52}$$

în care : N_{mn} este efortul axial într-o bară oarecare $m - n$ din încărcările date ; n^{ij}_{mn} — efortul axial în bara $m - n$ din încărcarea virtuală care este un cuplu unitar format din forţe concentrate normale la capetele barei $i - j$ de mărime $1/l_{ij}$; l_{mn} şi A_{mn} — lungimea şi respectiv aria secţiunii barei $m - n$; Δl_{mn} — variaţia lungimii barei $m - n$. Suma se referă la toate barele grinzii.

2) Procedeul grinzilor conjugate și al încărcărilor elastice.

3) Epura Williot (grafic sau analitic).

Determinarea eforturilor secundare se reduce în acest fel la calculul unui cadru cu noduri fixe încărcat cu deplasări cunoscute ale nodurilor (echivalente cu rotirile de bare determinate ca mai înainte). Metoda convenabilă de calcul este metoda deplasărilor în care necunoscute sînt rotirile nodurilor produse de deplasări de noduri cunoscute. Rotirile de bare produc, pe sistemul de bază al metodei deplasărilor cu noduri blocate la rotiri, momente de încastrare perfectă egale cu

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_{ji} = -\frac{6E_{ij}}{l_{ij}}\,\theta_{ij}.$$

Aplicația 14.7. Se determină eforturile secundare în barele grinzii cu zăbrele din fig. 14.45 considerînd prinderea rigidă a barelor la noduri. Datele caracteristice pentru barele grinzii sînt date în figură ($EA = 2\cdot10^6$ kN; $EI = 50\,000$ kN·m²).

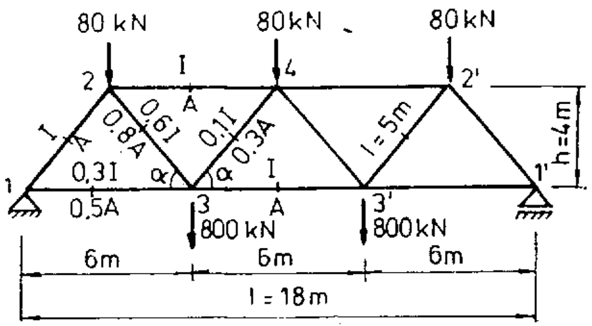


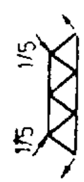
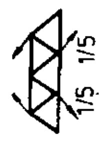
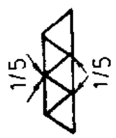
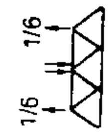
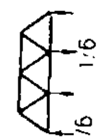
Fig. 14.45.

Eforturile axiale calculate în ipoteza nodurilor articulate sînt date în tabelul 14.18 în care s-au calculat și alungirile sau scurtările barelor din aceste eforturi.

Tabelul 14.18

Bara	l_{jk} m	A_{jk}	EA_{jk} kN	N_{jk} kN	$N_{jk}\cdot l_{jk}$ kN·m	$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ m
1–2 1'–2'	5,00	A	$20\cdot10^5$	−1 150	−5 750	$-287{,}5\cdot10^{-5}$
2–3 2'–3'	5,00	0,8A	$16\cdot10^5$	1 050	5 250	$328{,}0\cdot10^{-5}$
3–4 3'–4'	5,00	0,3A	$6\cdot10^5$	−50	−250	$-41{,}7\cdot10^{-5}$
2–4 2'–4'	6,00	A	$20\cdot10^5$	−1 320	−7 920	$-396{,}0\cdot10^{-5}$
1–3 1'–3'	6,00	0,5A	$10\cdot10^5$	690	4 140	$414{,}0\cdot10^{-5}$
3–3'	6,00	A	$20\cdot10^5$	1 350	−8 100	$405{,}0\cdot10^{-5}$

Tabelul 14.19

Bara	$\Delta l\cdot10^{-3}$ m	θ_{12} 		θ_{23} 		θ_{34} 		θ_{24} 		θ_{13} 	
		n_{jk}	$n_{jk}\cdot\Delta l_{jk}\cdot10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk}\cdot\Delta l_{jk}\cdot10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk}\cdot\Delta l_{jk}\cdot10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk}\cdot\Delta l_{jk}\cdot10^{-3}$	n_{jk}	$n_{jk}\cdot\Delta l_{jk}\cdot10^{-3}$
1–2	−2,875	−0,15	0,431	0	0	0	0	0	0	−0,208	0,598
2–3	3,280	0	0	0,15	0,492	0	0	0,208	0,683	0,208	0,683
3–4	−0,417	0	0	0	0	−0,15	0,062	−0,208	0,087	0	0
2–4	−3,960	−0,25	0,990	−0,25	0,990	0	0	−0,125	0,495	−0,25	0,990
1–3	4,140	0,25	1,035	0	0	0	0	0	0	0,125	0,517
3–3'	$4{,}05\ \frac{1}{2}$	0,25	0,506	0,25	0,506	0,25	0,506	0,25	0,506	0,25	0,506
			$2{,}962\cdot10^{-3}$		$1{,}988\cdot10^{-3}$		$0{,}568\cdot10^{-3}$		$1{,}771\cdot10^{-3}$		$3{,}294\cdot10^{-3}$

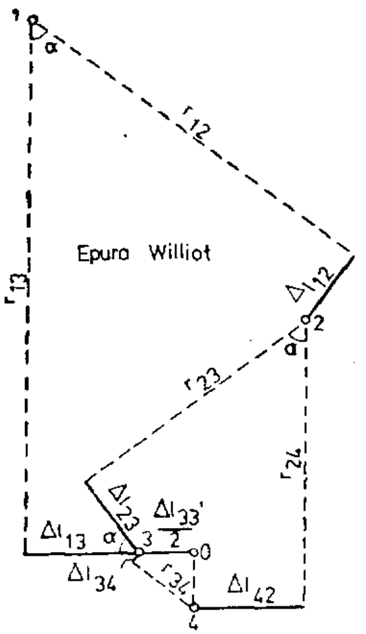


Fig. 14.46.

Pentru calculul rotirilor barelor din deformare axială s-a construit epura Williot în fig. 14.46. Segmentele r_{jk} pot fi măsurate la scara respectivă sau calculate analitic pe baza elementelor geometrice din epura Williot.

$$r_{34} = 284{,}5\cdot 10^{-5}; \quad r_{23} = 994\cdot 10^{-5};$$

$$r_{24} = 1\,062{,}7\cdot 10^{-5}; \quad r_{12} = 1\,482\cdot 10^{-5};$$

$$r_{13} = 1\,976{,}5\cdot 10^{-5}.$$

Rezultă următoarele rotiri de bare $\left(\theta_{jk} = \frac{r_{jk}}{l_{jk}}\right)$:

$$\theta_{12} = \frac{1\,482\cdot 10^{-5}}{5} = 296{,}4\cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{23} = \frac{994\cdot 10^{-5}}{5} = 198{,}8\cdot 10^{-5}; \quad \theta_{33'} = 0$$

$$\theta_{34} = \frac{284{,}5\cdot 10^{-5}}{5} = 56{,}9\cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{24} = \frac{1\,062{,}7\cdot 10^{-5}}{6} = 177{,}1\cdot 10^{-5};$$

$$\theta_{13} = \frac{1\,976{,}5\cdot 10^{-5}}{6} = 329{,}4\cdot 10^{-5}.$$

Rotirile de bare au fost recalculate cu formula Maxwell-Mohr în tabelul 14.19.

Coeficienţii de rigiditate şi momentele de încastrare perfectă din rotiri de bare s-au calculat în tabelul 14.20.

Tabelul 14.20

Bara	l m	I	$\rho = \frac{I}{l}$, $I = 6$	$\theta_{jk}\cdot 10^{-3}$	EI kN·m³	$\frac{6EI}{l}$	$\mathfrak{M}_{jk} = \mathfrak{M}_{kj} = -\frac{6EI}{l}$
1–2, 1'–2'	5,00	I	1,20	2,962	50 000	60 000	–177,7
2–3, 2'–3'	5,00	0,6I	0,72	1,988	30 000	36 000	–71,6
3–4, 3'–4'	5,00	0,1I	0,12	0,568	5 000	6 000	–3,4
2–4, 2'–4'	6,00	I	1,00	1,771	50 000	50 000	–88,5
1–3, 1'–3'	6,00	0,3I	0,3	3,294	15 000	15 000	–49,4
3–3'	6,00	I	1,00	0	50 000	50 000	0

Calculul momentelor încovoietoare la capetele barelor se face cu metoda transmiterii rotirilor. Coeficienţii de transmitere a rotirilor sînt $\left(t_{jk} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho_{jk}}{\rho_k}\right)$:

$$t_{12} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}20}{2{,}92} = -0{,}2055; \quad t_{21} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}20}{1{,}50} = -0{,}400;$$

$$t_{23} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}72}{1{,}64} = -0{,}2195;$$

$$t_{32} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}72}{2{,}92} = -0{,}1233; \quad t_{13} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}30}{1{,}64} = -0{,}0915;$$

$$t_{31} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}30}{1{,}50} = -0{,}100.$$

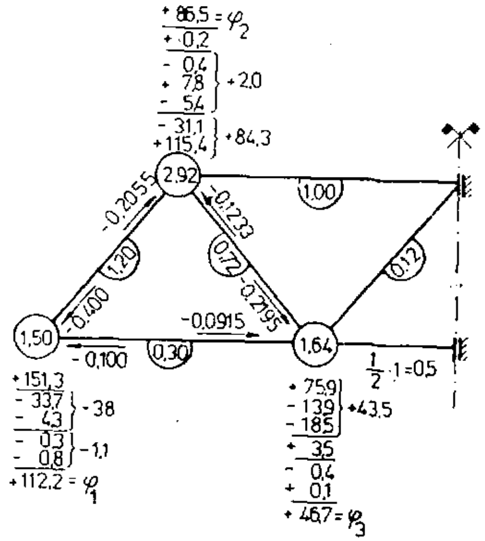


Fig. 14.47.

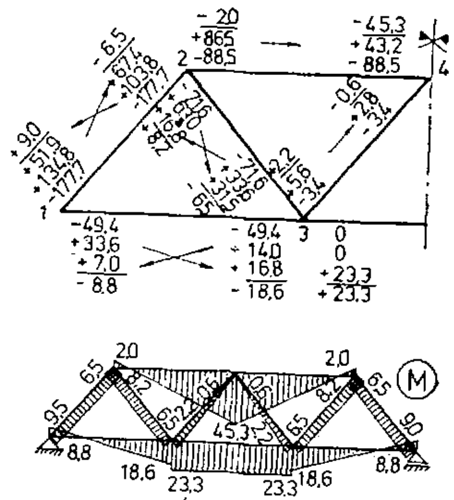


Fig. 14.48

Valorile iniţiale ale rotirilor nodurilor sînt:

$$\varphi_j^0 = -\frac{\sum_k \mathfrak{M}_{jk}}{\rho_j}; \quad \varphi_1^0 = -\frac{-177{,}7 - 49{,}4}{1{,}50} = +151{,}3;$$

$$\varphi_2^0 = -\frac{-177{,}7 - 71{,}6 - 88{,}5}{2{,}92} = +115{,}4; \quad \varphi_3^0 = -\frac{-49{,}4 - 71{,}6 - 3{,}4}{1{,}64} = +75{,}9.$$

Determinarea rotirilor finale de noduri s-a făcut pe schema din fig. 14.47. Obţinerea momentelor de capăt este prezentată în fig. 14.48, *a* iar diagrama de momente încovoietoare în *fig. 14.48, b*.

BIBLIOGRAFIE

1. A g e n t, R. *Sisteme reticulare nedeterminate*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1970.
2. A v r a m, C. *Grinzi continue*. Ed. III, Bucureşti, Editura Tehnică, 1981.
3. B ă l a n, Şt. *Lecţii complementare de mecanică teoretică*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1969.
4. B e l e ş, A. şi V o i n e a, R. *Rezistenţa materialelor*. Vol. II, Bucureşti, Editura Tehnică, 1958.
5. C a r a c o s t e a, A. şi alţii. *Manual pentru calculul construcţiilor*. Vol. I, Bucureşti, Editura Tehnică, 1977.
6. C a r a c o s t e a, A., P e t r u ş c u, A. şi I l i e, G h. *Statica construcţiilor în exemple şi probleme*. Vol. I, Bucureşti, Institutul de Căi Ferate, 1957.
7. C o u r b o n, J. *Calcul des structures*. Paris, Dunod, 1972.
8. F i e r b i n ţ e a n u, V. şi B u c u r, C. *Mecanică. Culegere de probleme*. Institutul de Construcţii Bucureşti, 1983.
9. F i l i m o n, I. şi S o a r e, V. M. *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în mecanica construcţiilor*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1983.
10. F i l i p e s c u, G h. *Statica construcţiilor şi Rezistenţa materialelor*. Bucureşti, Imprimeria Naţională, 1940.
11. G h e o r g h i u, A l. *Statica construcţiilor*. Vol. I şi II, Bucureşti, Editura Tehnică, 1960, 1965.
12. I l i e, G h., F i e r b i n ţ e a n u, V. şi S t ă n i l ă, N. *Mecanica construcţiilor*. Vol. I şi II, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1974, 1975.
13. I l i e, G h., F i e r b i n ţ e a n u, V., S t ă n i l ă, N. şi P e t r e s c u, I. *Mecanica construcţiilor*. Vol. III, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1976.
14. I a c o b, C. *Mecanica teoretică*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1980.
15. I r o d o v, I. *Principes fondamentaux de la Mécanique*. Moscou, Edition Mir, 1981.
16. L a n d a u, L. şi L i f c h i t z, E. *Mécanique*. Moscou, Editions Mir, 1981.
17. M a s s o n n e t, C h. *Résistance des materiaux*. Liège, Science et Lettres, 1976.
18. M a z i l u, P. *Statica construcţiilor*. Vol. I şi II, Bucureşti, Editura Tehnică, 1955, 1959.
19. M a z i l u, P. *Rezistenţa materialelor*. Institutul de Construcţii Bucureşti, 1974.
20. N e g o e s c u, E. şi F i e r b i n ţ e a n u, V. *Proiectarea şi protecţia antiseismică a podurilor şi construcţiilor pentru transporturi*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1985.
21. O l a r i u, V., S i m a, P. şi A c h i r i l o a i e, V., *Mecanica tehnică*. Bucureşti, Editura Tehnică, 1982.
22. P e t r e s c u, M. *Rezistenţa materialelor*. Fascicola 1 şi 2, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1976.
23. P e t r e s c u, M., B a l c u, M. şi C r e ţ u, D. *Rezistenţa materialelor. Culegere de probleme*. Institutul de Construcţii Bucureşti, 1977.
24. P o s e a, N. *Rezistenţa materialelor*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1979.
25. P r o c o f i e v, I. P. şi S m i r n o v, A. F. *Statica construcţiilor*, vol. III (trad. din lb. rusă). Bucureşti, Editura Tehnică, 1951.
26. R ă d o i, M. şi D e c i u, E. *Mecanică*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.
27. S o a r e, M. V. *Rezistenţa materialelor. Curs şi aplicaţii*. Vol. I şi II, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1978.
28. S o a r e, M. V. *Structuri discrete şi structuri continue în Mecanica construcţiilor*. Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1986.
29. S t a r z h i n s k i i, V. M. *An Advanced Course of Theoretical Mechanics. for Engineering Students*. Moscow, Mir Publishers, 1982.
30. T e o d o r e s c u, C. şi P e t r e s c u, M. *Rezistenţa materialelor*. Vol. I, Bucureşti, Institutul de Căi Ferate, 1959.
31. V o i n e a, R., V o i c u l e s c u, D. şi C e a u ş u, V., *Mecanica*. Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1975.
32. W i l l i a m, A. N a s h. *Theory and Problems of Strenght of Materials*. 2 ed., McGraw Hill Book Company, 1972.